基于粒子滤波的混沌系统参数估计和滤波方法

李国辉[1,2]，李亚安[1]，杨宏[1,2]

(1. 西北工业大学 航海学院，陕西 西安 710072；2. 西安邮电大学 电子工程学院，陕西 西安 710121)

摘要：混沌系统的参数估计是混沌系统控制和同步的前提。鉴于混沌系统具有初值敏感性、不能长期预测等特点，提出了一种基于粒子滤波(PF)的混沌系统参数估计和滤波方法，并将其用于 Lorenz 混沌系统的参数估计和滤波，在叠加噪声情况下对混沌系统进行仿真分析。结果表明，文中提出的滤波方法在估计偏差方面优于基于扩展卡尔曼滤波(EKF)的混沌系统参数估计和滤波方法，对混沌系统的参数估计和滤波是一种有效的方法。

关键词：自动控制技术；混沌系统；粒子滤波；扩展卡尔曼滤波器；滤波

中图分类号：TP391　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-1093(2012)12-1504-06

A Parameter Estimation and Filtering Method of Chaotic System Based on Particle Filter

LI Guo-hui[1,2], LI Ya-an[1], YANG Hong[1,2]

(1. School of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, Shaanxi, China;
2. School of Electronic and Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, Shaanxi, China)

Abstract: The parameter estimation of chaotic system is a premise of system control and synchronization. In view of chaotic system's characteristics, such as sensitivity to initial condition, long-term unpredictability and so on, a filter applying to chaotic system was proposed based on chaotic system state space theory and particle filter (PF) theory. In a superimposed noise conditions, the parameter estimation and filtering of Lorenz chaotic system were simulated and analyzed. The simulation results show the proposed filtering algorithm is better than a chaotic system parameter estimation and filtering method based on extended Kalman filter (EKF) in bias estimates, and is an effective method for estimating the parameters of chaotic system and filter.

Key words: automatic control technology; chaotic system; particle filter; extended Kalman filter; filter

0　引言

混沌系统的参数估计是混沌系统控制和同步的前提，具有十分重要的现实意义[1-2]。近年来，混沌系统参数估计方法研究已成为一个热点，国内外研究学者先后提出了多种估计混沌系统参数的有效方法，如遗传算法[3]、改进粒子群优化算法[4]、混合差分进化算法[5]、混合遗传粒子群算法[6]、混合量子进化计算[7]等。但这些算法的理论并不完善，而在线性和非线性系统中，粒子滤波(PF)具有较好的估计性能。

针对混沌系统的特点，尝试提出一种基于 PF 的混沌系统参数估计和滤波方法，并将其用于 Lorenz 混沌系统的参数估计和滤波，在叠加噪声情况下对系统进行仿真分析。

收稿日期：2011-12-14

基金项目：国家自然科学基金项目(51179157)；陕西省教育厅专项科研计划项目(2010JK823、2012JK0493)；西安邮电大学青年教师科研基金(ZL2010-22、ZL2011-07)

作者简介：李国辉(1978—)，男，副教授。E-mail：lghcd@163.com；
李亚安(1961—)，男，教授，博士生导师。E-mail：liyaan@nwpu.com

1 PF 基本算法

PF 是一种基于 Monte Carlo 仿真的递推贝叶斯估计方法[8],可以有效地处理非线性、非高斯噪声环境下的状态估计问题,目前被广泛应用于非线性、非高斯环境的参数估计和状态估计[9-11]。

PF 的基本思想是用一系列带权值的粒子 $\{x_{0:k}^i, w_k^i\}_{i=1}^N$ 来表示后验概率密度 $p(x_{0:k} | y_{1:k})$, w_k^i 是粒子 $x_{0:k}^i$ 对应的归一化权值,即 $\sum_{i=1}^N w_k^i = 1$,则 k 时刻的后验概率密度可近似地表示为

$$p(x_{0:k} | y_{1:k}) \approx \sum_{i=0}^N w_k^i \delta(x_{0:k} - x_{0:k}^i). \tag{1}$$

如果能直接从先验概率密度 $p(x)$ 中产生粒子,则每一个粒子权重为 $\frac{1}{N}$. 当无法从 $p(x)$ 中产生粒子时,可以从重要性函数 $q(x_{0:k} | y_{1:k})$ 中采样产生粒子 $x_{0:k}^i$ 为

$$x_{0:k}^i \sim q(x_k^i | x_{0:k-1}, y_{1:k}^i), i = 1, 2 \cdots, N, \tag{2}$$

且权值更新为

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k)}. \tag{3}$$

可见 PF 是利用重要密度函数获取支撑点集,并随着测量值的依次到来迭代求得相应的权值,最终以加权和表征后验概率密度,得到状态的估计值。其具体的论证和推导可参见文献[12]。

2 混沌系统的状态空间描述和估计

卡尔曼滤波器是时域滤波方法,它描述混沌系统用状态空间,其算法是递归的。混沌方程可表示为

$$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}(k)], \tag{4}$$

当 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}(k)]$ 是 n 维向量函数。

混沌系统可视为 $\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}(k)]$. 当 $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为状态矩阵, $\boldsymbol{f}(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 为一个非线性函数向量。

一般来说,混沌系统可分为两部分:线性部分和非线性部分,所以状态方程和观测方程为

$$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}(k)] + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{W}(k), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Z}(k+1) = \boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{X}(k+1) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{X}(k+1)] + \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k), \tag{6}$$

式中: $\boldsymbol{X}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量; $\boldsymbol{Z}(k) \in \mathbf{R}^m$ 系统观测向量; $\boldsymbol{F}(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{\theta}(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ 分别为非线性向量函数。$\boldsymbol{A}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{B}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{D}(k) \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $\boldsymbol{E}(k) \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{H}(k) \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{G}(k) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为时变矩阵。$\boldsymbol{W}(k)$ 为混沌系统过程噪声向量; $\boldsymbol{V}(k)$ 为混沌系统观测噪声向量, $\boldsymbol{W}(k)$, $\boldsymbol{V}(k)$ 相互独立,为高斯白噪声,其均值为 0,方差分别为 $Q(k)$, $R(k)$; $\boldsymbol{Z}(k)$ 为 k 时刻观测值; $\hat{\boldsymbol{X}}(k)$ 为 $\boldsymbol{X}(k)$ 的最优估计, $\hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k)$ 为 k 时刻 $\hat{\boldsymbol{X}}(k)$ 已知的情况下, $\hat{\boldsymbol{X}}(k+1)$ 的前向估计值。

$$\boldsymbol{X}^f(k+1|k) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}(k)] \approx \boldsymbol{F}[\hat{\boldsymbol{X}}(k)] + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)] = \hat{\boldsymbol{X}}^f(k+1|k) + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)],$$

所以

$$\boldsymbol{X}^f(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{X}}^f(k+1|k) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)], \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k) = \boldsymbol{A}(k+1|k)\hat{\boldsymbol{X}}(k) + \boldsymbol{B}(k+1|k)\hat{\boldsymbol{X}}^f(k+1|k), \tag{8}$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}^f(k+1|k) = \boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{X}(k)] \approx \boldsymbol{\theta}[\hat{\boldsymbol{X}}(k)] + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)] = \hat{\boldsymbol{Z}}^f(k+1|k) + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)],$$

$$\boldsymbol{Z}^f(k+1|k) - \hat{\boldsymbol{Z}}^f(k+1|k) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)}[\boldsymbol{X}(k) - \hat{\boldsymbol{X}}(k)], \tag{9}$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}(k+1|k) = \boldsymbol{E}(k)\hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k) + \boldsymbol{H}(k)\hat{\boldsymbol{Z}}^f(k+1|k). \tag{10}$$

状态估计最优时:

$$\boldsymbol{J} = E\{[\boldsymbol{X}(k+1) - \hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k)][\boldsymbol{X}(k+1) - \hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k)]^{\mathrm{T}}\} = \min. \tag{11}$$

将(7)式、(8)式代入(12)式,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(k+1|k) &= \boldsymbol{X}(k+1) - \hat{\boldsymbol{X}}(k+1|k) = \\ &\boldsymbol{A}(k+1|k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}(k+1|k)\boldsymbol{X}^f(k+1|k) + \\ &\boldsymbol{D}(k+1|k)\boldsymbol{W}(k) - \boldsymbol{A}(k+1|k)\hat{\boldsymbol{X}}(k) - \\ &\boldsymbol{B}(k+1|k)\hat{\boldsymbol{X}}^f(k+1|k) = \\ &[\boldsymbol{A}(k+1|k) + \boldsymbol{B}(k+1|k)\boldsymbol{\Phi}(k+1|k)][\boldsymbol{X}(k) - \\ &\hat{\boldsymbol{X}}(k)] + \boldsymbol{D}(k+1|k)\boldsymbol{W}(k),\end{aligned} \tag{12}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Phi}(k+1|k) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \hat{\boldsymbol{X}}(k)} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial F}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial X^n(k)} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial F^2}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial F^2}{\partial X^n(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial F^n}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial X^n(k)} \end{bmatrix}_{X(k)=\hat{X}(k)};$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\hat{\boldsymbol{X}}(k|k-1)+\boldsymbol{K}(k)[\boldsymbol{Z}(k)-\hat{\boldsymbol{Z}}(k|k-1)]. \tag{13}$$

将(9)式、(10)式、(13)式代入(14)式,

$$\boldsymbol{L}(k)=\boldsymbol{X}(k)-\hat{\boldsymbol{X}}(k)=\boldsymbol{X}(k)-\hat{\boldsymbol{X}}(k|k-1)-\boldsymbol{K}(k)[\boldsymbol{Z}(k)-\hat{\boldsymbol{Z}}(k|k-1)]=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{M}(k|k-1)-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k), \tag{14}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Theta}(k)=\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}(k)}=$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\theta}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial\theta}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial\theta}{\partial X^n(k)} \\ \dfrac{\partial\theta^2}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial\theta^2}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial\theta^2}{\partial X^n(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\theta^n}{\partial X^1(k)} & \dfrac{\partial\theta^n}{\partial X^2(k)} & \cdots & \dfrac{\partial\theta^n}{\partial X^n(k)} \end{bmatrix}_{X(k)=\hat{X}(k|k-1)};$$

$$\boldsymbol{J}'=\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{X}(k)-\hat{\boldsymbol{X}}(k)][\boldsymbol{X}(k)-\hat{\boldsymbol{X}}(k)]^{\mathrm{T}}\}=\min. \tag{15}$$

$$\boldsymbol{L}(k)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(k)=\{[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{M}(k|k-1)-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k)\}\{[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{M}(k|k-1)-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k)\}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{M}(k|k-1)\cdot\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(k|k-1)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(k|k-1)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}(k)]-[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{M}(k|k-1)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{V}(k)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(k).$$

$$E[\boldsymbol{M}(k|k-1)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(k)]=0,$$

$$E[\boldsymbol{V}(k)\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(k|k-1)]=0,$$

$$\boldsymbol{P}(k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{P}(k|k-1)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k). \tag{16}$$

如果让 $\boldsymbol{P}(k)$ 值是最小值,那么

$$\boldsymbol{K}(k)=\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(k)[\boldsymbol{E}(k)\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{R}(k)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(k)]^{-1}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{P}(k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\cdot\boldsymbol{P}(k|k-1), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}(k+1|k)=[\boldsymbol{A}(k+1|k)]+\boldsymbol{B}(k+1|k)\boldsymbol{\Phi}(k+1|k)]\boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{A}(k+1|k)]+\boldsymbol{B}(k+1|k)\boldsymbol{\Phi}(k+1|k)]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}(k+1|k)\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(k+1|k).$$

3 Lorenz 混沌系统的状态估计分析

Lorenz 混沌系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & a & 0\\ c & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -xz\\ xy\end{bmatrix}, \tag{19}$$

采用一阶离散化公式,即

$$\dot{x}=\frac{x(k+1)-x(k)}{\mathrm{d}t},$$

式中:dt 为采样时间,取 0.001 s;k 为采样时刻。

则 Lorenz 混沌系统离散化后叠加噪声为

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\begin{bmatrix}-a\mathrm{d}t+1 & a\mathrm{d}t & 0\\ c\mathrm{d}t & 1-\mathrm{d}t & 0\\ 0 & 0 & 1-b\mathrm{d}t\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(k)+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}(k)]+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{W}(k), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{Z}(k+1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(k)+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{X}(k)]+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{V}(k), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{X}(k)]=\begin{bmatrix}0\\ -X_1(k)X_2(k)\mathrm{d}t\\ X_1(k)X_2(k)\mathrm{d}t\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta}[\boldsymbol{X}(k)]=\begin{bmatrix}X_3(k)\\ -X_1(k)X_2(k)\\ X_2(k)X_3(k)\end{bmatrix},$$

$$W(k)\sim N(0,q),V(k)\sim N(0,r).$$

$X(k),W(k),V(k)$ 是独立的,然后

$$\boldsymbol{\Phi}[k+1|k]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -X_3(k)\mathrm{d}t & 0 & -X_1(k)\mathrm{d}t\\ X_2(k)\mathrm{d}t & X_1(k)\mathrm{d}t & 0\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\Theta}[k]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -X_2(k|k-1) & -X_1(k|k-1) & 0\\ 0 & X_3(k|k-1) & X_2(k|k-1)\end{bmatrix}.$$

3.1　基于 EKF 的混沌系统参数估计和滤波

根据(4)式～(18)式,Lorenz 混沌系统状态估计:

$$\boldsymbol{\hat{X}}(k+1|k)=\boldsymbol{A\hat{X}}(k)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\hat{X}}^{f}(k+1|k)=\boldsymbol{A\hat{X}}(k)+\boldsymbol{F}[\boldsymbol{\hat{X}}(k)]+\boldsymbol{\Phi}(k+1|k)[\boldsymbol{X}(k)-\boldsymbol{\hat{X}}(k)],\tag{22}$$

$$\boldsymbol{\hat{X}}(k)=\boldsymbol{\hat{X}}(k|k-1)+\boldsymbol{K}(k)[\boldsymbol{Z}(k)-\boldsymbol{Z}(k|k-1)]=\boldsymbol{\hat{X}}(k|k-1)+\boldsymbol{K}(k)\{\boldsymbol{Z}(k)-\boldsymbol{EX}(k|k-1)-\boldsymbol{\theta}[(\boldsymbol{\hat{X}}(k|k-1)]-\boldsymbol{\Theta}(k)[\boldsymbol{X}(k)-(\boldsymbol{\hat{X}}(k|k-1)]\},\tag{23}$$

$$\boldsymbol{P}(k+1|k)=[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B\Phi}(k+1|k)]\boldsymbol{P}(k)[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B\Phi}(k+1|k)]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q},\tag{24}$$

$$\boldsymbol{K}(k)=\boldsymbol{P}(k|k-1)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{EP}(k|k-1)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{r}]^{-1},\tag{25}$$

$$\boldsymbol{P}(k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{\Theta}(k)]\boldsymbol{P}(k|k-1).\tag{26}$$

3.2　基于 PF 的混沌系统参数估计和滤波

EKF 的 PF 算法可以总结如下:

1)初始化 $k=0$

$$\hat{x}_k=\sum_{i=1}^{N}w_k^i x_k^i.\tag{27}$$

2)重要性采样

将初始粒子带入 EKF 中产生重要性函数,并采样粒子 $x_k^i\sim q(x_k^i|x_{0:k-1}^i,y_{0:k}),i=1,2,\cdots,N$. 计算每个粒子的加权系数

$$w_k^i\propto w_{k-1}^i\frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{0:k-1}^i,y_{1:k})}.\tag{28}$$

3)归一化权值

$$w_k^i=\frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^{N}w_k^i}.\tag{29}$$

4)重采样

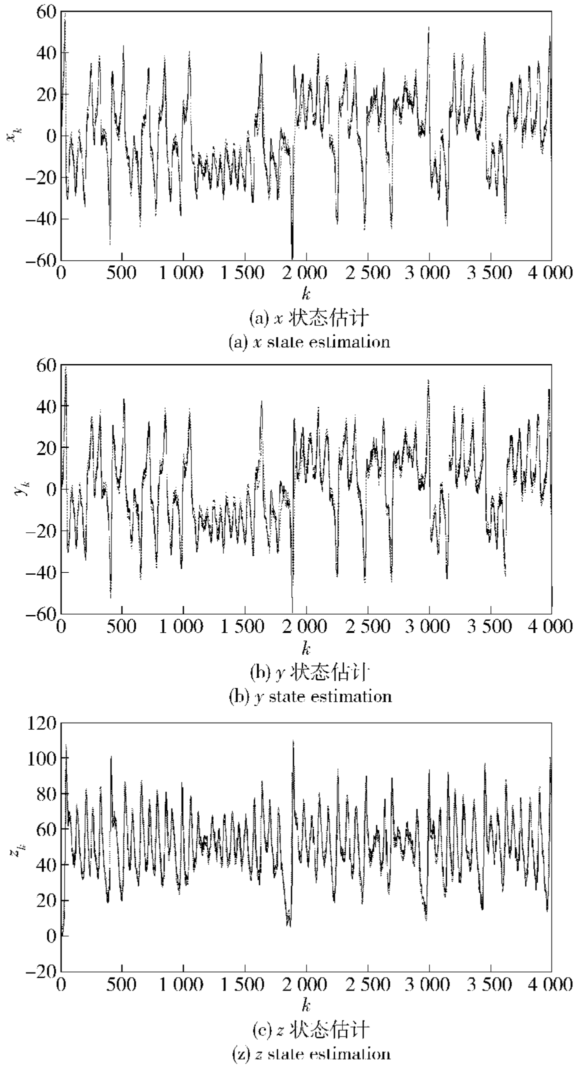
从 x_k^i 中根据重要性权值重新采样得到新的 N 个粒子 x_k^i,并重新分配权值 $w_k^i=1/N$.

5)状态估计均值

$$\hat{x}_k=\sum_{i=1}^{N}w_k^i x_k^i.\tag{30}$$

4　数值仿真

根据(22)式～(30)式,当参数 $a=10,b=3,c=28$,采样时间 $\mathrm{d}t=0.001$ s,选取 $\boldsymbol{X}(0)=[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{P}(0)=0$ 时,基于 EKF 的 Lorenz 混沌系统参数估计结果和误差分别如图 1 和图 2 所示,基于 PF 的 Lorenz 混沌系统参数估计结果和误差分别如图 3 和图 4 所示。图 1 和图 3 中,实线代表真实值,虚线代表估计值。重复进行 100 次实验得到的 Lorenz 混沌系统 EKF、PF 算法对状态估计的误差均值和方差如表 1 所示。



(a) x 状态估计
(a) x state estimation

(b) y 状态估计
(b) y state estimation

(c) z 状态估计
(z) z state estimation

图 1　基于 EKF 的 Lorenz 混沌系统滤波结果

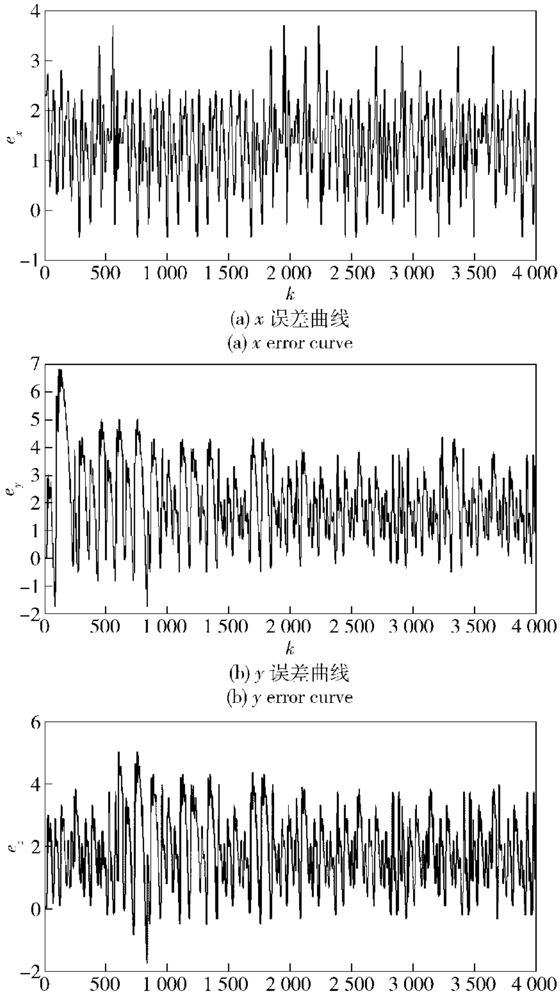
Fig. 1　Filtering results of Lorenz chaotic system based on EKF

表 1　两种滤波算法对状态估计的误差均值和方差

Table 1　Error of mean and variance of the two filtering algorithms for state estimation

算法	均值	方差
EKF	2.375 6	0.713 8
PF	0.004 2	0.246 5

从图 1 可以看出,基于 EKF 的估计数据和真实数据比较接近,但从图 2 可以看出,基于 EKF 的参数估计误差还比较大。从图 3 可以看出,基于 PF 的估计数据和真实数据比较接近,从图 4 可以看出,基于 PF 的参数估计误差比较小。从表 1 可以看出,



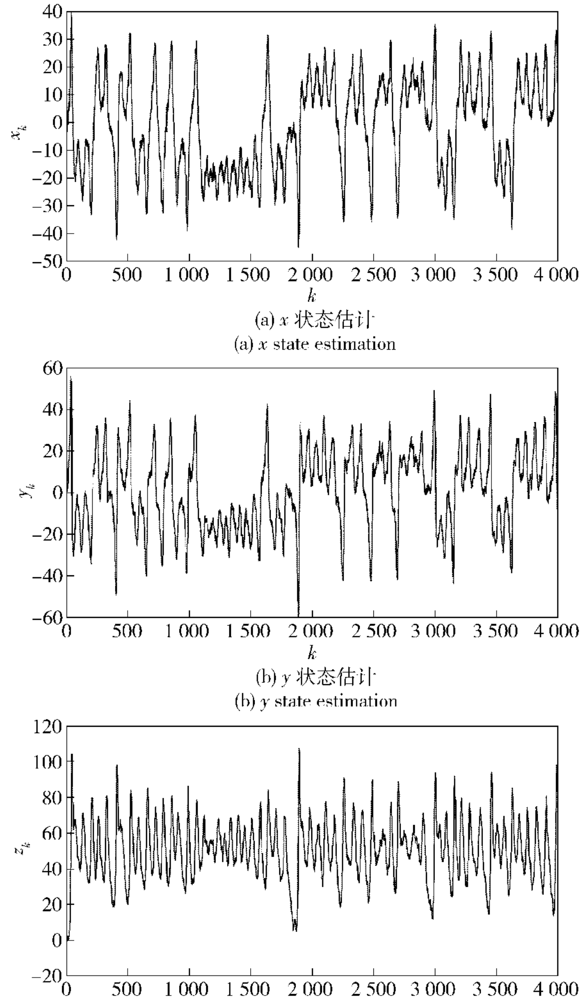
(a) x 误差曲线
(a) x error curve

(b) y 误差曲线
(b) y error curve

(c) z 误差曲线
(c) z error curve

图 2　基于 EKF 的 Lorenz 混沌系统滤波误差

Fig. 2　Filtering error of Lorenz chaotic system based on EKF



(a) x 状态估计
(a) x state estimation

(b) y 状态估计
(b) y state estimation

(c) z 状态估计
(z) z state estimation

图 3　基于 PF 的 Lorenz 混沌系统滤波结果

Fig. 3　Filtering result of Lorenz chaotic system based on PF

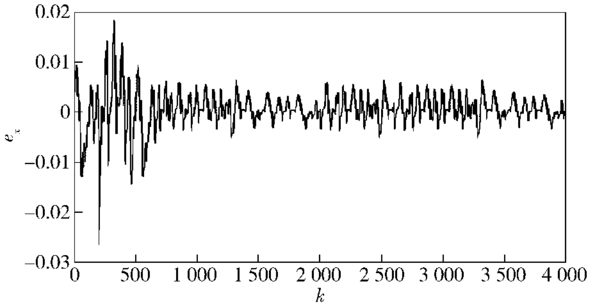
PF 和 EKF：在滤波均值方面，前者是 0.004 2，后者是 2.3756；在滤波方差方面，前者是 0.246 5，后者是 0.713 8. 显然，本文提出的滤波方法在估计偏差方面优于基于 EKF 的混沌系统参数估计和滤波方法。当非线性观测方程的 Talor 展开式中的高次项不能忽略时，EKF 会导致很大的线性化误差，EKF 这一不足造成了参数估计精度不高（如图 2 所示）。混沌系统具有初值敏感性、不能长期预测，这增加了混沌系统参数估计的难度，而粒子滤波是一种基于 Monte Carlo 仿真的递推贝叶斯估计方法，不受非线性非高斯系统的限制，对混沌系统的预测效果比 EKF 要好些。

5　结论

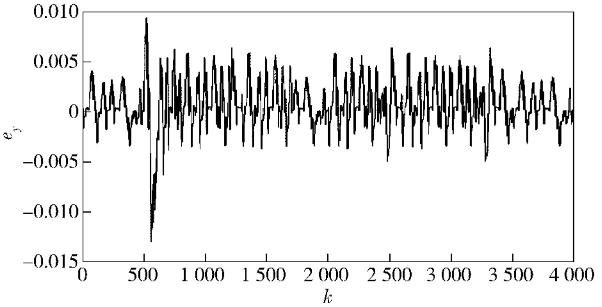
在混沌系统控制和同步中，混沌系统的参数估计是至关重要的。混沌系统具有初值敏感性、不能长期预测等特点，这增加了混沌系统参数估计的难度。针对此特点，提出了一种基于 PF 的混沌系统参数估计和滤波方法，并将其用于 Lorenz 混沌系统的参数估计和滤波，在叠加噪声情况下对系统进行仿真分析。结果表明，本文提出的滤波方法在估计偏差方面优于基于 EKF 的混沌系统参数估计和滤波方法，其中 PF 在滤波估计均值、方差方面比 EKF 分别提高了 2 个数量级和 2 倍多。该方法对混沌系统的参数估计和滤波是一种有效的方法，但存在计算量较大、时间较长的缺点，需要不断优化和改进。

参考文献（References）

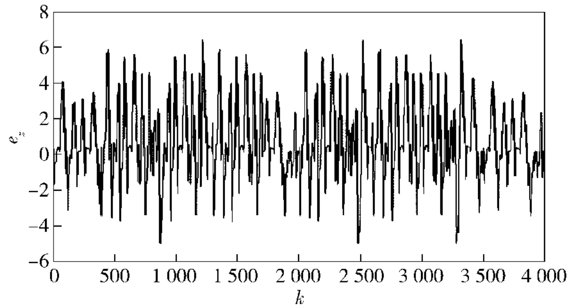
[1]　李丽香，彭海朋，杨义先，等. 基于混沌蚂蚁群算法的 Lorenz



(a) x 误差曲线
(a) x error curve



(b) y 误差曲线
(b) y error curve



(c) z 误差曲线
(c) z error curve

图 4　基于 PF 的 Lorenz 混沌系统滤波误差

Fig. 4　Filtering errors of Lorenz chaotic system based on PF

混沌系统的参数估计[J]. 物理学报, 2007, 56(1): 51 −55.
LI Li-xiang, PENG Hai-peng, YANG Yi-xian, et al. Parameter estimation for Lorenz chaotic systems based on chaotic ant swarm algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(1): 51 −55. (in Chinese)

[2] He Q, Wang L, Liu B. Parameter estimation for chaos systems by particle swarm optimization[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 34(2): 654 −661.

[3] 戴栋, 马西奎, 李富才, 等. 一种基于遗传算法的混沌系统参数估计方法[J]. 物理学报, 2002, 51(11): 2459 −2464.
DAI Dong, MA Xi-kui, LI Fu-cai, et al. An approach of parameter estimation for a chaotic system based on genetic algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2002, 51(11): 2459 −2464. (in Chinese)

[4] 高飞, 童恒庆. 基于改进粒子群优化算法的混沌系统参数估计方法[J]. 物理学报, 2006, 55(2): 577 −581.
GAO Fei, TONG Heng-qing. Parameter estimation for chaotic system based on particle swarm optimization[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2): 577 −581. (in Chinese)

[5] 王钧炎, 黄德先. 基于混合差分进化算法的混沌系统参数估计[J]. 物理学报, 2008, 57(5): 2755 −2799.
WANG Jun-yan, HUANG De-xian. Parameter estimation for chaotic systems based on hybrid differential evolution algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(5): 2755 −2799. (in Chinese)

[6] 张健中, 王庆超. 基于混合遗传粒子群算法的混沌系统参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(9): 2212 −2214.
ZHANG Jian-zhong, WANG Qing-chao. Parameter estimation for chaotic systems based on hybridgenetic particle swarm optimization [J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(9): 2212 −2214. (in Chinese)

[7] 任子武, 熊蓉. 基于混合量子进化计算的混沌系统参数估计[J]. 控制理论及应用, 2010, 27(11): 1448 −1454.
REN Zi-wu, XIONG Rong. Hybrid quantum-inspired evolutionary algorithm-based parameter estimation for chaotic systems[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(11): 1448 − 1454. (in Chinese)

[8] Daum F E. Nonlinear filters: beyond the Kalman filter[J]. IEEE AES Systems Magazine, 2005, 20(8): 57 −69.

[9] Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking approximation techniques for nonlinear filtering[C]//Proceedings of 2004 SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets. San Diego: SPIE, 2004, 5428: 537 −550.

[10] Julier S, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 −422.

[11] Zhu J H, Zheng N N, Yuan Z J, et al. A SLAM algorithm based on the central difference Kalman filter[C]//Intelligent Vehicles Symposium IEEE. Xi'an: IEEE, 2009: 123 −128.

[12] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2002, 50(2): 174 −188.