

真三轴应力状态下岩石损伤本构模型¹⁾

张慧梅^{*,2)} 谢祥妙^{*} 张蒙军^{*} 杨更社[†]

^{*}(西安科技大学力学系, 西安 710054)

[†](西安科技大学建筑与土木工程学院, 西安 710054)

摘要 从岩石微元破坏服从 Weibull 随机分布的特点出发, 建立了真三轴应力状态下岩石损伤软化统计本构关系; 根据应力应变关系的几何条件, 建立了本构模型参数与岩石变形过程中应力应变曲线特征参量的理论关系, 从而增强了模型的适应性; 最后通过试验实测数据验证了模型的合理性。

关键词 真三轴应力状态, Weibull 随机分布, Drucker-Prager 准则, 本构关系

中图分类号: TU452 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-13-517

DAMAGE CONSTITUTIVE MODEL OF ROCK UNDER THE TRUE TRIAXIAL CONFINEMENT STATE¹⁾

ZHANG Huimei^{*,2)} XIE Xiangmiao^{*} ZHANG Mengjun^{*} YANG Gengshe[†]

^{*}(Department of Mechanics, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

[†](College of Architecture and Civil Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract With the assumption that the rock micro-unit failure obeys the Weibull random distribution, the damage softening statistical constitutive relations are established under the true triaxial confinement state. Then, according to the geometrical conditions of the stress-strain relationship, the theoretical relationship between the constitutive model parameters and the stress-strain curve characteristic parameters during the process of rock softening and deforming is established, which enhances the adaptability of the model. Finally, the rationality of the model is verified by the measured data.

Key words true triaxial stress state, Weibull random distribution, Drucker-Prager criterion, constitutive relation

损伤的概念最早是由苏联的力学家 Kachanov 于 1958 年在研究蠕变断裂时提出的。1963 年, Rabotnov 引入“损伤因子”的概念, 奠定了损伤力学的基础。Dougill 于 1976 年最早提出岩石类材料损伤力学的研究^[1]。岩石是一种多孔隙介质, 如何建立能体现岩石在损伤过程中的应力应变关系是岩石力学研究的热点和难点之一^[2], 近年来取得了一

些令人鼓舞的研究成果。特别是统计方法的引入, 使岩石损伤软化统计本构关系的研究取得了很大进展^[3-5], 对基于 Weibull 分布参数的确定也有一定的研究。文献 [3] 采用实验拟合的方法确定分布参数; 文献 [6] 利用应力应变曲线峰值点信息确定了单向载荷作用下岩石损伤模型中的参数; 文献 [7] 探讨了岩石损伤软化本构统计模型参数的物理意义, 建立

本文于 2013-12-10 收到。

1) 国家自然科学基金 (11172232, 41272340), 陕西省自然科学基金 (2011JM1003), 教育部新世纪人才支持计划 (ACET-12-1044) 和陕西省教育厅专项基金 (11JK0525) 资助项目。

2) 张慧梅, 1968 年生, 女, 教授, 工学博士, 博士生导师, 从事力学与岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: zhanghuimei68@163.com

引用格式: 张慧梅, 谢祥妙, 张蒙军等. 真三轴应力状态下岩石损伤本构模型. 力学与实践, 2015, 37(1): 75-78

Zhang Huimei, Xie Xiangmiao, Zhang Mengjun, et al. Damage constitutive model of rock under the true triaxial confinement state. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(1): 75-78

了常规围压条件下岩石损伤软化本构模型参数的确定方法。

但是上述岩石三轴应力状态下的本构理论模型,主要集中在等围压条件下,没有考虑中间主应力的影响,且多数模型参数均基于试验曲线拟合而来。事实上,大量岩石真三轴压缩试验结果表明^[8-9],岩石的强度和破坏不仅与最大和最小主应力有关,而且受中间主应力的影响。本文在前人研究的基础上,建立了真三轴应力状态下岩石的损伤软化本构模型,并推导了模型参数的理论表达式,最后通过试验验证所建公式的正确性。

1 岩石损伤统计本构模型

利用应变等价性假说^[10],岩石损伤本构模型的基本关系式为

$$\sigma = C\varepsilon(1 - D) \quad (1)$$

式中 σ 为名义应力矢量, C 为材料弹性矩阵, ε 为应变矢量, D 为损伤变量。

基于岩石细观结构的非均质性^[4],材料内部微元体力学性质的分布具有概率性,假定服从韦布尔统计分布规律,其概率密度函数为

$$P\{F\} = \frac{m}{F_0} \left(\frac{F}{F_0}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^m\right] \quad (2)$$

式中 m , F_0 为韦布尔分布参数, F 为韦布尔分布变量。

概率密度是岩石微元体损伤率的一种度量。在载荷的作用下,微元体破坏的积累导致了损伤程度由小到大的连续变化,由式(2)可将损伤变量表述为

$$D = 1 - \exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^m\right] \quad (3)$$

因此,由式(1)和式(3)可以建立岩石损伤统计本构模型

$$\sigma_i = E\varepsilon_i(1 - D) + \mu(\sigma_j + \sigma_k) = E\varepsilon_i \exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^m\right] + \mu(\sigma_j + \sigma_k) \quad (4)$$

式中 i, j, k 可取 1, 2, 3。

基于考虑中间主应力影响的 Drucker-Prager 破坏准则,以岩石微元强度表示的韦布尔随机分布变量

$$F = \alpha_0 I_1 + \sqrt{J_2} \quad (5)$$

式中 I_1 为应力张量的第一不变量; J_2 为应力偏量的第二不变量; α_0 为与岩石材料性质有关的参数。其表达式分别为

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sin \varphi / \sqrt{9 + 3 \sin^2 \varphi} \\ I_1 &= \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* = \frac{E(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3} \\ \sqrt{J_2} &= \sqrt{\frac{1}{6} \left[(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 - (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 - (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2 \right]} = \\ &= \frac{E\varepsilon_1 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sqrt{6}(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3)} \end{aligned}$$

式中 φ 为内摩擦角。

以上依据韦布尔分布函数,从统计的角度描述了岩石的损伤模型,模型中的韦布尔分布参数 m , F_0 尚未确定。

2 模型参数的确定

典型的岩石三轴试验曲线在极值点处满足以下几何条件

$$(1) \varepsilon_1 = \varepsilon_c, \sigma_1 = \sigma_c; (2) \varepsilon_c = \varepsilon_1, \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = 0 \quad (6)$$

将条件(1)代入式(4)得到

$$\exp\left[-\left(\frac{F_c}{F_0}\right)^m\right] = \frac{E\varepsilon_c}{\sigma_c - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3} \quad (7)$$

式中 F_c 为曲线极值点对应的 F , 为一定值。

将 σ_i 视为关于 ε_i ($i = 1, 2, 3$) 的函数, σ_1 的全微分可写成如下形式

$$d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_3} d\varepsilon_3 \quad (8)$$

对式(4)中各式分别取微分可得

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_1 &= A_1 d\varepsilon_1 + A_2 dF + A_3 dm + \\ &A_4 dF_0 + \mu d\sigma_2 + \mu d\sigma_3 \\ d\sigma_2 &= B_1 d\varepsilon_1 + B_2 dF + B_3 dm + \\ &B_4 dF_0 + \mu d\sigma_3 + \mu d\sigma_1 \\ d\sigma_3 &= C_1 d\varepsilon_1 + C_2 dF + C_3 dm + \\ &C_4 dF_0 + \mu d\sigma_1 + \mu d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, $A_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1}$, $A_2 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial F}$, $A_3 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial m}$, $A_4 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial F_0}$, $B_1 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \varepsilon_2}$, $B_2 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial F}$, $B_3 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial m}$, $B_4 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial F_0}$, $C_1 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial \varepsilon_3}$, $C_2 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial F}$, $C_3 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial m}$, $C_4 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial F_0}$ 。

上式中 dF 进一步求全微分, 化为仅含 $d\varepsilon_1$ (或 $d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$), $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ 项的形式

$$\left. \begin{aligned} dF &= F_{11}d\varepsilon_1 + F_{12}d\sigma_1 + F_{13}d\sigma_2 + F_{14}d\sigma_3 \\ dF &= F_{21}d\varepsilon_2 + F_{22}d\sigma_1 + F_{23}d\sigma_2 + F_{24}d\sigma_3 \\ dF &= F_{31}d\varepsilon_3 + F_{32}d\sigma_1 + F_{33}d\sigma_2 + F_{34}d\sigma_3 \end{aligned} \right\} (10)$$

假定 F_0 和 m 仅为应力 σ_3 的函数^[7], 则有

$$\left. \begin{aligned} dF_0 &= F_3d\sigma_3 \\ dm &= m_3d\sigma_3 \end{aligned} \right\} (11)$$

式中, $F_3 = \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_3}$, $m_3 = \frac{\partial m}{\partial \sigma_3}$.

将式 (10) 和式 (11) 代入式 (9), 并化简可得

$$\left. \begin{aligned} U_1d\sigma_1 + U_2d\sigma_2 + U_3d\sigma_3 + U_4d\varepsilon_1 &= 0 \\ V_1d\sigma_1 + V_2d\sigma_2 + V_3d\sigma_3 + V_4d\varepsilon_2 &= 0 \\ W_1d\sigma_1 + W_2d\sigma_2 + W_3d\sigma_3 + W_4d\varepsilon_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

式中, $U_1 = A_2F_{12} - 1$, $U_2 = A_2F_{13} + \mu$, $U_3 = A_2F_{14} + A_3m_3 + A_4F_3 + \mu$, $U_4 = A_1 + A_2F_{11}$, $V_1 = B_2F_{22} + \mu$, $V_2 = B_2F_{23} - 1$, $V_3 = B_2F_{24} + B_3m_3 + B_4F_3 + \mu$, $V_4 = B_1 + B_2F_{21}$, $W_1 = C_2F_{32} + \mu$, $W_2 = C_2F_{33} + \mu$, $W_3 = C_2F_{34} + C_3m_3 + C_4F_3 - 1$, $W_4 = C_1 + C_2F_{31}$.

$$\text{令 } \Delta = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{pmatrix}, \Delta_1 = \begin{pmatrix} V_2 & V_3 \\ W_2 & W_3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} U_2 & U_3 \\ W_2 & W_3 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{pmatrix}, \text{ 利用克莱姆}$$

法则解方程式 (12), 可得

$$d\sigma_1 = -\frac{U_4\Delta_1}{\Delta}d\varepsilon_1 + \frac{V_4\Delta_2}{\Delta}d\varepsilon_2 - \frac{W_4\Delta_3}{\Delta}d\varepsilon_3 \quad (13)$$

将式 (13) 和式 (8) 相比较得到

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{U_4\Delta_1}{\Delta} \quad (14)$$

式中

$$A_1 = E \exp \left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^m \right], \quad U_4 = A_1 + A_2 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}$$

$$A_2 = \frac{-Em\varepsilon_1}{F} \left(\frac{F}{F_0}\right)^m \exp \left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^m \right], \quad \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} = \frac{F}{\varepsilon_1}$$

结合几何条件化简得到

$$(F_c/F_0)^m = 1/m \quad (15)$$

联立式 (7) 和式 (15) 得到

$$m = 1/\ln [E\varepsilon_c/(\sigma_c - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3)] \quad (16)$$

$$F_0 = F_c(m)^{1/m} \quad (17)$$

式 (16) 及式 (17) 即为岩石损伤统计本构模型参数与岩石宏观物理力学参数的关系式, 式中仅包含岩石弹性模量、峰值应力和应变值, 在常规力学特性试验中极易得到。

当 $\sigma_2 = \sigma_3$ 时, 本文模型参数表达式退化为 $m = 1/\ln [E\varepsilon_c/(\sigma_c - 2\mu\sigma_3)]$, $F_0 = F_c(m)^{1/m}$, 与文献 [7] 等围压下表达式一致; 当 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 时, $m = 1/\ln [E\varepsilon_c/\sigma_c]$, $F_0 = F_c(m)^{1/m}$, 与文献 [6] 单轴受力状态下表达式一致。

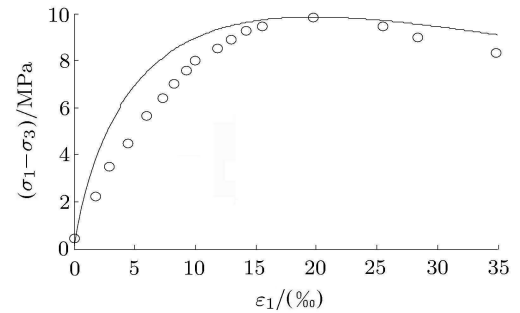
3 模型的验证

为了验证本文提出的岩石损伤本构模型, 利用文献 [9] 所提供的真三轴压缩试验数据, 由式 (4), (5), (16) 及式 (17) 得到不同中间主应力下的最大主应力应变理论曲线, 并与文献 [9] 的试验曲线对比, 如图 1 所示. 岩石弹性模量 $E = 4.866$ GPa, 泊松比 $\mu = 0.25$, 内摩擦角 $\varphi = 44.70^\circ$. 不同中间主应力下的峰值点参数如表 1.

表 1 不同中间主应力下的砂岩参数

σ_2/MPa	σ_c/MPa	$\varepsilon_c/\%$
1.248 3	10.635 9	19.758 2
2.262 2	11.457 8	14.182 1

图 1 (a) 为 $\sigma_3 = 0.78$ MPa, $\sigma_2/\sigma_3 = 1.6$ 时的最大主应力应变曲线; 图 1(b) 为 $\sigma_3 = 0.78$ MPa, $\sigma_2/\sigma_3 = 2.9$ 时的最大主应力应变曲线。



(a) $\sigma_3 = 0.78$ MPa, $\sigma_2/\sigma_3 = 1.6$

图 1 不同围压下真三轴理论模型验证曲线

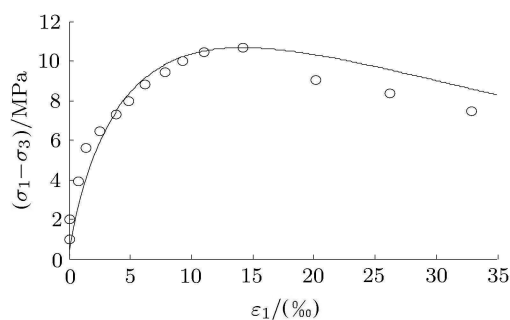
(b) $\sigma_3 = 0.78 \text{ MPa}$, $\sigma_2/\sigma_3 = 2.9$

图1 不同围压下真三轴理论模型验证曲线(续)

由图1可以看出,本文所建立的岩石损伤本构模型理论曲线与试验得到的应力应变关系比较接近,进一步验证了本构模型的合理性。

4 结论

(1) 假定岩石微元破坏服从韦布尔统计分布规律,建立了岩石损伤统计本构模型,从而在理论上考虑了中间主应力对岩石破坏强度的影响;

(2) 建立了真三轴应力状态下本构模型参数与岩石软化变形过程中应力应变曲线特征参量的理论关系,只需利用试验曲线峰值点应力应变的信息及岩石弹性模量即可确定模型参数;

(3) 通过模型验证表明,本文所建立的岩石损伤统计本构模型在真三轴受力状态下,其理论曲线与试验数据的吻合度均较好。

参考文献

- 1 苏醒春,陶连金,曹文贵. 岩石力学. 北京: 高等教育出版社, 2005
- 2 谢和平. 岩石混凝土损伤力学. 北京: 中国矿业大学出版社, 1990
- 3 徐卫亚,韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787-791
- 4 曹文贵,方祖烈,唐学军. 岩石损伤软化本构模型之研究. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 628-633
- 5 曹文贵,赵明华,刘学成. 基于 Weibull 分布的岩石损伤软化模型及其修正方法研究. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3226-3231
- 6 吴政,张承娟. 单向荷载作用下岩石损伤模型及其力学特性研究. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(1): 55-61
- 7 杨明辉,赵明华,曹文贵. 岩石损伤软化统计本构模型参数的确定方法. 水利学报, 2005, 36(3): 345-349
- 8 杨继华,刘汉东. 岩石强度和变形真三轴试验研究. 华北水利水电学院学报, 2007, 28(3): 66-68
- 9 Rajendra P, Tiwari K, Rao S. Post failure behavior of a rock mass under the influence of triaxial and true triaxial confinement. *Engineering Geology*, 2006, 84(3-4): 112-119
- 10 Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Engineering and Design*, 1984, 80(2): 233-245

(责任编辑: 刘希国)

(上接第90页)

非线性的影响越大,越大则反之. 如果壳体剪力大小参数值 B 很小,意味着边界条件对椭圆化变形没有影响. 所以 Brazier 非线性的影响很重要。

参考文献

- 1 Love AEH. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th edn). New York: Dover, 1944
- 2 Brazier LG. On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections. *Proc R Soc Ser*, 1927, 116(773): 104-114
- 3 Lakis AA, Selman A, Toledano A. Non-linear free vibration analysis of laminated orthotropic cylindrical shell. *Elsevier Science Ltd*, 1997, 40(1): 27-49
- 4 王珂晟,刘国强,朱晓莹. 含初始缺陷的加强复合材料圆柱壳的

非线性屈曲分析. 机械设计与制造社, 2004, 25(2): 63-65

- 5 陈浩然,周柏华,白瑞祥. 含多分层损伤的先进复合材料格栅加筋圆柱壳 (AGS) 的热-机耦合非线性屈曲分析. *工程力学*, 2008, 25(8): 58-63
- 6 郭胜鹏,顾红军. 轴向冲击下圆柱壳非轴对称屈曲耗散能分析. *力学与实践*, 2009, 31(3): 44-47
- 7 付朝江. 圆柱壳的非线性有限元分析及其并行求解. *力学与实践*, 2011, 33(4): 8-12
- 8 龙连春,李洋,赵斌. 加筋圆柱壳屈曲与后屈曲分析. *力学与工程应用*, 2012, 31(3): 145-148
- 9 Calladine CR. *Theory of Shell Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983
- 10 Tatting BF, Gurdal Z, Vasiliev VV. The Brazier effect for finite length composite cylinders under bending. *Int J Solids Struct*, 1997, 34(12): 1419-1440

(责任编辑: 刘希国)