

有限推力多小行星探测轨迹优化

黄岸毅 车征¹⁾ 黄普 李军锋 路毅 李恒年

(宇航动力学国家重点实验室, 西安 710043)

摘要 针对任务时长与燃料存在限制的多颗小行星之间顺序探测轨迹优化问题, 利用极小值原理, 建立了整个探测区间的最优控制问题并使用同伦算法进行求解. 其中将目标飞越、交会等约束作为内点约束, 特别地对交会后停留一定时间的约束进行了转换处理, 使其成为与交会约束类似的形式; 并给出了考虑起始时间可滑动的情形下的最优条件. 结果表明, 该算法可快速得到整体最优的探测轨迹, 可应用于小行星多目标探测的任务设计与轨迹规划中.

关键词 内点约束, 同伦优化算法, 极小值原理, 小行星序列优化, 有限推力

中图分类号: V412.4 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-14-392

LOW-THRUST TRAJECTORY OPTIMIZATION FOR MULTI-ASTEROID EXPLORATION

HUANG Anyi CHE Zheng¹⁾ HUANG Pu LI Junfeng LU Yi LI Hengnian

(State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an 710043, China)

Abstract The low-thrust trajectory optimization for the multi-asteroid exploration with time and fuel limits is studied in this paper. The optimal control problem is established based on the minimum principle and is solved by the homotopic approach. The target flyby, the rendezvous and the stay time after the rendezvous are all treated as the inner constraints. Then the global optimal control problem is solved by the homotopic approach. It is shown that the global optimal trajectory can be obtained quickly. The algorithm proposed in this paper can be employed in the mission design and the trajectory optimization for multi-asteroid explorations.

Key words inner constraints, homotopic approach, minimum principle, optimal of asteroids serial, low-thrust

引 言

小行星探测是深空探测研究及应用的重要目标, 对于太阳系和生命的起源演化研究有特殊作用, 也可促进地球防护空间科学和空间技术的发展, 为更远距离的深空飞行探测关键技术提供验证^[1]. 目前美国、日本等曾成功进行过数次小行星探测, 其他国家也已开展相关技术论证及研究^[2]. 如果选择小行星主带中的星体作为探测目标, 则从地球

发射所需的速度增量与近地小行星探测相比较, 从充分利用燃料与时间的角度, 选择相互较为接近的多颗不同类型目标完成采样、观测等任务, 将会获得更大的科学效益.

深空探测现有的推进方式有脉冲和电推进两种, 电推进具有质量小、比冲高的优点, 因此更适合深空环境中长时间的轨道转移. 现有对小行星探测电推进轨道设计的研究一般集中在到达和返回阶段,

本文于 2014-11-28 收到.

1) E-mail: charge_0@163.com

引用格式: 黄岸毅, 车征, 黄普等. 有限推力多小行星探测轨迹优化. 力学与实践, 2015, 37(1): 49-55

Huang Anyi, Che Zheng, Huang Pu, et al. Low-thrust trajectory optimization for multi-asteroid exploration. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(1): 49-55

对于多个小行星目标之间的轨迹优化关注较少. 尤其是采样或其他有工作时间约束的任务, 需要在交会小行星后停留一定的时间以完成探测工作, 与传统的飞越或交会约束又有所区别, 在优化计算中需要合理的解决方法. 选择多个小行星作为目标来规划访问方式、次序和轨迹是典型的组合优化问题, 需要从大量小行星中按照给定指标约束筛选出可用的访问序列组合, 国际深空轨道优化竞赛曾多次选择该问题作为背景^[3]. 现有的求解一般需要两步, 首先通过双脉冲转移来近似有限推力轨道转移, 使用分支定界等全局搜索方法以大规模的计算遍历寻找近似最优解^[4-5], 其间也可应用类似文献^[6]的思想进行一些预处理以减小计算量; 再对其优化获得最优脉冲转移序列, 并转换为有限推力转移轨迹. 转换时以每两颗目标间的脉冲转移时刻及状态作为边界条件求解最优控制的两点边值问题^[7-8]. 文献^[9]给出了求解该问题的同伦算法的详细流程, 并研究了引力辅助作为内点约束的计算. 文献^[10]讨论了飞越内点约束在有限推力整体轨迹优化中的应用.

针对探测器在多个小行星之间转移的电推进轨迹优化问题, 本文在文献^[9]提出的两端固定轨迹优化同伦算法基础上, 将首先对任务时长固定但出发窗口可滑动的情形进行讨论; 然后利用内点约束建立探测器多目标访问整个区间的最优控制问题, 将各类访问方式的约束统一考虑, 特别地提出交会后有停留时间约束的内点解决方法, 对序列内的小行星访问时刻及控制率进行整体的优化, 以在控制计算量的情况下进一步优化燃料消耗.

1 问题描述与分析

本文不考虑发射和返回轨道设计, 假设探测器已到达某小行星并开始执行探测任务. 通过全局搜索获得了一组可行的小行星探测序列, 其中包括选择的目标小行星, 访问方式(包括飞越、交会和交会会停留一定时间等)以及到达各目标的粗略时刻(这类全局搜索算法不是本文的重点, 相关内容可参见文献^[5-7]等). 这里假设有 N 个目标, 探测器访问每个目标的近似最优时刻分别为 t_i , 则本文的目标即获得 t_1 到 t_N 之间的最优转移轨迹.

为了获得有限推力的最优轨迹, 需要利用上述近似初值进行优化. 最简单的方式为按照全局搜索的近似时刻进行分段优化, 将其拆分为若干个两端状态固定的最优控制问题, 分别求解获得前后每两

个小行星之间的最优轨迹后拼接在一起. 显然这种方法与最优解存在一定的差距, 因为全局搜索为了减少计算量一般需要使用双脉冲转移轨道来近似有限推力转移, 得到的近似最优时刻并不是真正意义上的最优. 所以需要对访问目标小行星的时刻进行优化, 使得每一段有限推力轨道拼接在一起后整体的燃料消耗最少. 根据文献^[9]的论述, 即使是最简单的两端状态固定的有限推力最优控制问题, 使用同伦算法进行求解也需要一定的时间. 如果采用组合优化方式, 将目标访问时刻作为优化量, 再分段求解最优控制, 使拼接后的燃料消耗最优, 则需要对每一个转移弧段进行大量重复计算, 优化速度难以保证. 如果将首尾两颗小行星目标约束作为起始和终端状态, 中间的小行星作为内点约束, 建立整体的最优控制问题, 则只需一次求解即可获得完整的最优解.

2 两端状态固定的有限推力最优控制问题

首先给出两端状态固定的有限推力最优控制问题求解算法. 使用日心二体模型, 将动力学状态归一化, 得到日心引力场无量纲动力学方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}} &= -\frac{\mu}{|\boldsymbol{r}|^3} \boldsymbol{r} + c_1 \frac{u}{m} \boldsymbol{\alpha} \\ \dot{m} &= -c_2 u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{v} 分别为位置、速度矢量, m 为质量, $[\boldsymbol{r} \ \boldsymbol{v} \ m]$ 即方程的 7 个状态量(下文将该矢量记为 \boldsymbol{x}), 已使用基本量纲进行归一化. 基本量纲单位 R_{Unit} 设为 1AU ($1.49597870 \times 10^{11}$ m), T_{Unit} 设为 3.16×10^7 s (365.25×86400 s), m_{Unit} 设为航天器初始质量 m_0 , 则其他常数及单位的归一化可由量纲分析得到; $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_X \ \alpha_Y \ \alpha_Z]^T$ 为推力方向单位矢量, $u \in [0, 1]$ 为推力控制量, $c_1 = \frac{F}{m_0}$ 为推力幅值归一化的最大幅值, $c_2 = \frac{c_1}{I_{\text{sp}} g}$ 为燃料消耗率, μ 为归一化后的引力常数.

对于两端时刻 (t_0, t_f) 和状态固定的轨道转移问题(见式(2)), 文献^[9]已根据极小值原理得出最优控制率的求解方法

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{r}(t_0) &= \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{r}(t_f) &= \boldsymbol{r}_f, \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}_f \\ m(t_0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ 表示初始的位置速度, $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ 表示末端的位置速度.

首先建立同伦归一化性能指标

$$J = \lambda_0 c_2 \int_{t_0}^{t_f} [u - \varepsilon u(1 - u)] dt \quad (3)$$

其中, 参数 ε 连接着燃料最优 ($\varepsilon = 0$) 和能量最优 ($\varepsilon = 1$), 能量最优相当于连续最优控制, 所以它比燃料最优控制更容易求解. 一旦获得能量最优问题的解, 让参数 ε 逐步减少, 最终可以得到燃料最优的解. λ_0 为一个正数乘子.

列写哈密顿函数

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v \left(-\frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} + c_1 \frac{u}{m} \boldsymbol{\alpha} \right) \lambda_m c_2 u + \lambda_0 c_2 [u - \varepsilon u(1 - u)] \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r \ \boldsymbol{\lambda}_v \ \lambda_m]$ 为状态量的协态变量, 根据极小值原理和变分法得

$$\begin{aligned} \delta J_m = \delta \left\{ \int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt \right\} = \\ \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \cdot \delta u \right] dt + \\ (-\boldsymbol{\lambda}(t_f)) \cdot \delta \mathbf{x}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

可见为了使哈密顿函数取极小, 最优推力方向必须满足

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|} \quad (6)$$

相应的推力大小为

$$\left. \begin{aligned} u = 0 & \quad (\rho > \varepsilon) \\ u = 1 & \quad (\rho < -\varepsilon) \\ u = \frac{1}{2} - \frac{\rho}{2\varepsilon} & \quad (|\rho| \leq \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\rho = 1 - \frac{c_1 \|\boldsymbol{\lambda}_v\|}{c_2 \lambda_0 m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_0} \quad (8)$$

称为推力开关函数. 协态变量满足的规范方程和边值条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r &= \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v}{|\mathbf{r}|^5} \mathbf{r} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v &= -\boldsymbol{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_m &= -c_1 \frac{u}{m^2} \|\boldsymbol{\lambda}_v\| \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$\lambda_m(t_f) = 0 \quad (9b)$$

综上, 需要求解 $\mathbf{z} = [\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_r(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \lambda_m(t_0)]$ 8 个未知量, 使得终端状态满足如下打靶函数 (式 (10)), 其中 λ_0 的作用是作为乘子将 $[\boldsymbol{\lambda}_r(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \lambda_m(t_0)]$ 幅值限制在 1 以内, 以减小猜测协态变量初值的难度.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}) = [\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) - \\ \mathbf{v}_f, \lambda_m(t_f), \|\boldsymbol{\lambda}(t_0)\| - 1]^T = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

求解策略为首先通过随机猜测, 计算 $\varepsilon = 1$ 时满足能量最优的初值 (含 λ_0), 然后逐渐减小 ε , 并将上一步获得的解作为当前初值循环求解, 直至得到 $\varepsilon = 0$ 时的燃料最优解和控制率.

3 考虑时间窗口可滑动的情形

多数情况下在保证任务时间满足约束时对出发时刻进行一定的调整, 会使得任务所需燃料发生较明显的变化. 为了寻找最佳出发时刻, 本节在第 2 节的基础上, 对这类时长固定, 但起始时刻自由的两轨道间转移问题进行研究. 由于起始时刻可自由滑动, 故状态量不再是固定的, 而是随时间变化的约束. 其两端条件可描述为

$$\left. \begin{aligned} t_f - t_0 = \Delta t, m(t_0) = 1 \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_1(t_0) \\ \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_2(t_f), \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_2(t_f) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, Δt 为给定常值, $\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1$ 表示初始轨道位置速度, $\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2$ 表示目标轨道的位置速度. 设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t_0) \\ \mathbf{v}_1(t_0) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) \\ \mathbf{v}(t_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_2(t_f) \\ \mathbf{v}_2(t_f) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据变分法, 式 (5) 中需要增加 t_0 的变分 (且 $\delta t_0 = \delta t_f$), 以及 $\mathbf{x}(t_0)$ 和 $\mathbf{x}(t_f)$ 的变分, 然后改写为 ($\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2$ 为约束方程的乘子, 下文中的 $\boldsymbol{\chi}$ 同理)

$$\begin{aligned} \delta J_m = \delta \left[\int_{t_0}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt + \boldsymbol{\mu}_1 \mathbf{g}_1 + \boldsymbol{\mu}_2 \mathbf{g}_2 \right] = \\ \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt + [\boldsymbol{\lambda}(t_0) + \mathbf{u}_1] \cdot \end{aligned}$$

$$\delta \mathbf{x}(t_0) + [-\boldsymbol{\lambda}(t_f) + \boldsymbol{\mu}_2] \cdot \delta \mathbf{x}(t_f) + \left[-H(t_0) + H(t_f) + \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \mathbf{g}_1}{\partial t_0} + \frac{\boldsymbol{\mu}_2 \mathbf{g}_2}{\partial t_f} \right] \delta t_0 = 0 \quad (13)$$

记

$$\zeta = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt + [\boldsymbol{\lambda}(t_0) + \mathbf{u}_1] \cdot \delta \mathbf{x}(t_0) + [-\boldsymbol{\lambda}(t_f) + \boldsymbol{\mu}_2] \cdot \delta \mathbf{x}(t_f) + \left[-H(t_0) + H(t_f) + \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \mathbf{g}_1}{\partial t_0} + \frac{\boldsymbol{\mu}_2 \mathbf{g}_2}{\partial t_f} \right] \delta t_0$$

则协态变量在起始时刻应满足条件

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_0) &= -\boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \boldsymbol{\mu}_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

同时哈密顿函数在起始时刻的取值应满足

$$H(t_0) - H(t_f) = \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{g}_1}{\partial t_0} + \frac{\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{g}_2}{\partial t_f} = \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t_0) \\ \mathbf{a}_1(t_0) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mu}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2(t_0) \\ \mathbf{a}_2(t_0) \end{bmatrix} - \boldsymbol{\lambda}(t_0)^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t_0) \\ \mathbf{a}_1(t_0) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\lambda}(t_f)^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2(t_0) \\ \mathbf{a}_2(t_0) \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ 可由动力学方程计算. 其他条件不变, 则未知量增加 1 个 t_0 .

$$\mathbf{z} = [\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_r(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \lambda_m(t_0), t_0] \quad (16)$$

打靶函数同时增加 1 个 (式 17)

$$\phi(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \\ \lambda_m(t_f) \\ \|\boldsymbol{\lambda}(t_0)\| - 1 \\ H(t_0) - H(t_f) + \boldsymbol{\lambda}(t_0) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t_0) \\ \mathbf{a}_1(t_0) \end{bmatrix} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2(t_0) \\ \mathbf{a}_2(t_0) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (17)$$

4 多小行星访问的内点约束处理

然后考虑探测多颗小行星的整体轨迹优化问题. 将整个序列的起始轨道和终点轨道作为式 (11) 描述的起始和终端约束, 中间目标作为内点约束.

设中间目标个数为 n , 则对应的中间时刻有 n 个

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_n] \quad (18)$$

若第 i 个探测目标形式为飞越, 则约束可表述为

$$\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_i^{\text{target}}(t_i) = \mathbf{0} \quad (19)$$

其中 target 上标表示交会目标的位置、速度. 而交会约束可表述为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_i^{\text{target}}(t_i) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t_i) - \mathbf{v}_i^{\text{target}}(t_i) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上述两种约束处理方法相同, 区别在于飞越仅考虑位置约束而交会同时考虑速度约束, 设式 (19) 或 (20) 的约束为 $\boldsymbol{\psi}$, 则式 (5) 中需增加 $t_i, \mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i)$ 的变分

$$\delta J_m = \delta \left[\int_{t_0}^{t_i^-} (H - \boldsymbol{\lambda} \dot{\mathbf{x}}) dt + \int_{t_i^+}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda} \dot{\mathbf{x}}) dt + \boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right] = \zeta + \left[\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \frac{\boldsymbol{\chi} \cdot \partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}(t_i)} \right] \cdot \delta \mathbf{x}(t_i) + \left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\boldsymbol{\chi} \cdot \partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t_i} \right] \delta t_i = 0 \quad (21)$$

则可以看到在内点 t_i 时刻 (“+” 和 “-” 上标分别表示 t_i 前后瞬时) 协态变量和哈密顿函数应满足

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_i^+) - \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) &= -\frac{\boldsymbol{\chi} \cdot \partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{x}(t_i)} = -\boldsymbol{\chi} \\ H(t_i^-) - H(t_i^+) &= -\frac{\boldsymbol{\chi} \cdot \partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t_i} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i) \\ \mathbf{a}^{\text{target}}(t_i) \end{bmatrix}, & \text{交会} \\ \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i), & \text{飞越} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

即对于每个飞越内点, 需增加 4 个未知量 (t_i 和 $\boldsymbol{\chi}$) 和 4 个打靶方程; 对于每个交会内点, 需增加 7 个未知量 (t_i 和 $\boldsymbol{\chi}$) 和 7 个打靶方程.

对于交会后停留给定时间 (Δd) 的问题, 由于停留期间探测器无控制, 可略去停留间隔将其等效地描述为内点约束的状态跳变: 即在本文的最优控制问题中, t_i^- 与 t_i^+ 为同一时刻, t_i^- 时到达目标, t_i^+ 时飞离目标, 但是探测器对应 t_i^+ 时刻的状态应等于交会目标实际在 $t_i + \Delta d$ 时刻的状态. 每经过一个内点, 求解问题中的时间比实际时间向前跳变 Δd , 以此避免直接对 u 约束 (过程约束) 使得优化计算过于复杂的问题. 而且这种处理方法与其他类型内点约束类似, 可按照实际任务规划的需求混合使用. 其描述如下

$$\psi_1 = \begin{cases} \mathbf{r}(t_i^-) - \mathbf{r}_i^{\text{target}}(t_i) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t_i^-) - \mathbf{v}_i^{\text{target}}(t_i) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (23)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \mathbf{r}(t_i^+) - \mathbf{r}_i^{\text{target}}(t_i + \Delta d) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t_i^+) - \mathbf{v}_i^{\text{target}}(t_i + \Delta d) = \mathbf{0} \end{cases}$$

约束方程有 12 个, 经过重新推导, 式 (5) 应增加的项为

$$\delta J_m = \delta \left[\int_{t_0}^{t_i^-} (H - \boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt + \int_{t_i^+}^{t_f} (H - \boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt + \boldsymbol{\chi}_1 \cdot \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\chi}_2 \cdot \boldsymbol{\psi}_2 \right] =$$

$$\zeta + \left[-\boldsymbol{\lambda}(t_i^-) + \frac{\boldsymbol{\chi}_1 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}(t_i^-)} \right] \cdot \delta \mathbf{x}(t_m^-) +$$

$$\left[\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) + \frac{\boldsymbol{\chi}_2 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}(t_i^+)} \right] \cdot \delta \mathbf{x}(t_m^+) +$$

$$\left[H(t_i^-) - H(t_i^+) + \frac{\boldsymbol{\chi}_1 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial t_i} + \frac{\boldsymbol{\chi}_2 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial t_i} \right] \delta t_i = 0 \quad (24)$$

因此在内点 t_i 时刻协态变量和哈密顿函数应满足

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) &= \frac{\boldsymbol{\chi}_1 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{x}(t_i^-)} = \boldsymbol{\chi}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_i^+) &= -\frac{\boldsymbol{\chi}_2 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial \mathbf{x}(t_i^+)} = -\boldsymbol{\chi}_2 \\ -H(t_i^-) + H(t_i^+) &= \frac{\boldsymbol{\chi}_1 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial t_i} + \frac{\boldsymbol{\chi}_2 \cdot \partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial t_i} = \\ \boldsymbol{\chi}_1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i) \\ \mathbf{a}^{\text{target}}(t_i) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\chi}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i + \Delta d) \\ \mathbf{a}^{\text{target}}(t_i + \Delta d) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

即对于每个交会后停留给定时间的内点, 需增加 13 个未知量 (t_i 和 $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$) 和 13 个打靶方程

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i^-) - \mathbf{r}_i^{\text{target}}(t_i) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(t_i^-) - \mathbf{v}_i^{\text{target}}(t_i) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) - \boldsymbol{\chi}_1 &= \mathbf{0} \\ H(t_i^-) - H(t_i^+) + \boldsymbol{\chi}_1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i) \\ \mathbf{a}^{\text{target}}(t_i) \end{bmatrix} + \\ \boldsymbol{\chi}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{\text{target}}(t_i + \Delta d) \\ \mathbf{a}^{\text{target}}(t_i + \Delta d) \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

需要说明的是, $\boldsymbol{\lambda}(t_i^+) = -\boldsymbol{\chi}_2$ 不列入打靶方程, 因为可由猜测的 $\boldsymbol{\chi}_2$ 直接得到 $\boldsymbol{\lambda}(t_i^+)$ 作为 t_i^+ 时刻向后计算协态变量的初值.

综上, 只要给定探测器访问的小行星顺序以及访问的方式, 即可按照式 (22), 式 (26) 增加对应的内点约束未知量及打靶方程即可, 对小行星数量没有限制. 设某一序列中需要飞越 m 个目标、交会 j 个目标、交会并停留 k 个目标, 则对应的整体最优控制问题需要增加的未知量和打靶方程个数 N 为

$$N = 1 + 4m + 7j + 13k \quad (27)$$

结合第 2, 3 节的算法, 可计算得到燃料最优的起始时刻及各内点访问时刻.

5 计算实例

以 GTOC7(7th Global Trajectory Optimization Competition, 第 7 届国际深空轨道优化竞赛) 题目的一个子问题为例, 其目标为在固定时间内探测不同小行星并执行任务次数最多. 不考虑探测器从地球发射至小行星带所需速度增量, 假设已使用大推力运载器采用脉冲转移方式将探测器运送至与某颗小行星交会作为任务起始时刻. 任务时长不超过 6 年, 探测器在与每颗小行星交会后要至少停留 30 天以完成采样、科学实验等作业. 探测器初始质量为 2000 kg (其中燃料 1200 kg, 干重 800 kg), 电推力发动机比冲 3000 s, 推力 0.3 N.

首先通过双脉冲近似拼接轨道方法搜索得到一组可行序列如表 1 (其中 MJD 为简化儒略日).

由于飞越和交会约束已在其他类似文献中有所讨论, 本文序列中所有的访问方式均取为交会后停留 30 天, 这也是为了最大程度验证算法的性能. 双

脉冲近似分段最优解与本文得到的整体最优解比较如表 2. 近似最优时刻为 lambert 双脉冲转移分段拼接的起始时刻, 由差分进化算法计算. 本文的整体优化计算结果基于第 3、4 节算法, 共有 10 个内点需要打靶 139 个未知量, 内点时刻和初始时刻可以取为脉冲近似最优时刻, 协态变量需要猜测. 求解使用 MinPack 优化工具包, 最终计算时间约为 15 min.

本文算法得到的最优轨迹与控制率如图 1~图 4 所示. 图 2~图 4 中横轴的时间为实际时间, 根据第 4 节的描述, 求得的最优解实际上不包括每一次交会后停留的 30 天 (即图中深色区间,

10 个内点相当于时间减少了 300 天), 需要在每一个最优内点时刻后添加 30 天以对应实际时刻. 从图 2 推力幅值变化可见, 最优推力在每一段经历开机—关机—开机的两次切换, 某些弧段关机时间为零 (极限情形为一直满推), 如果使用人工调整或第一节提到的组合优化算法, 寻找整体最优解将十分困难. 图 3 为最优推力矢量的 3 个分量变化, 同时也反映了协态变量在内点时刻的跳变 (与式 (25) 一致). 图 4 为探测器质量的变化, 最终剩余燃料 50 kg 左右.

表 1 可行的小行星探测序列

序号	小行星名	轨道 (历元时刻 MJD: 56 800)					
		a/AU	e	$i/(\text{°})$	$\Omega/(\text{°})$	$w/(\text{°})$	$M/(\text{°})$
1	Azusa	2.253 1	0.127 1	3.919 1	74.037 5	358.375 3	304.652 3
2	Nikko	2.237 5	0.105 2	5.701 2	71.945 5	2.084 6	287.384 5
3	Magri	2.205 8	0.094 3	5.970 9	97.953 3	343.395 8	247.329 5
4	Tengstrom	2.221 8	0.105 2	4.575 9	101.001 9	295.346 9	320.754 3
5	SIMBAD	2.256 1	0.147 5	3.702 8	65.537 7	322.735 8	11.942 9
6	Tangshan	2.281 4	0.121 0	4.616 1	91.970 6	286.398 3	50.068 6
7	1989 CN	2.223 0	0.135 4	1.308 5	150.316 5	209.832 6	354.048 1
8	Rodnyanskaya	2.223 1	0.156 5	2.876 5	283.132 3	91.725 6	335.605 6
9	Cupido	2.240 6	0.165 5	4.085 2	289.905 2	88.838 8	353.083 5
10	Ventura	2.251 1	0.165 5	3.961 5	306.090 8	65.438 5	17.565 8
11	Jekabsons	2.290 0	0.133 2	4.693 5	336.505 8	22.805 7	79.789 9
12	Uttorp	2.216 1	0.099 5	3.038 0	353.152 6	43.087 9	308.316 5

表 2 脉冲近似最优与整体最优时刻

转移弧段	脉冲近似最优转移时刻		小推力整体最优转移时刻	
	出发 (MJD)	到达 (MJD)	出发 (MJD)	到达 (MJD)
1—2	61 871.6	62 048.5	61 880.6	62 054.4
2—3	62 078.5	62 275.4	62 084.4	62 260.2
3—4	62 305.4	62 585.2	62 290.2	62 538.4
4—5	62 615.2	62 802.3	62 568.4	62 771.7
5—6	62 832.3	63 031.9	62 801.7	63 009.2
6—7	63 061.9	63 134.3	63 039.2	63 140.6
7—8	63 164.3	63 319.2	63 170.6	63 343.8
8—9	63 349.2	63 498.3	63 373.8	63 519.9
9—10	63 528.3	63 642.4	63 549.9	63 651.7
10—11	63 672.4	63 900.7	63 681.7	63 891.5
11—12	63 930.7	64 003.1	63 921.5	64 012.0

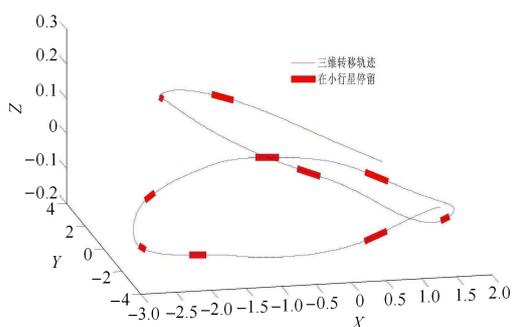


图 1 探测器三维轨迹 (单位: AU)

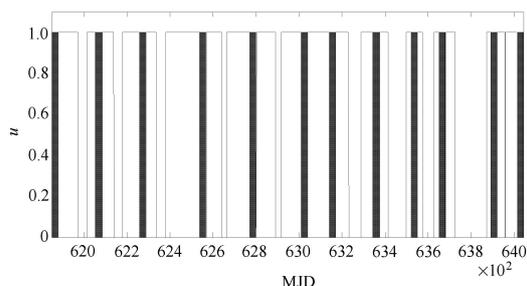
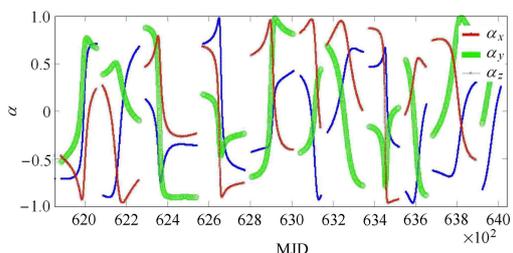
图 2 计入实际停留区间后的推力开关 (黑色为停留时间 $u = 0$)

图 3 最优推力方向矢量

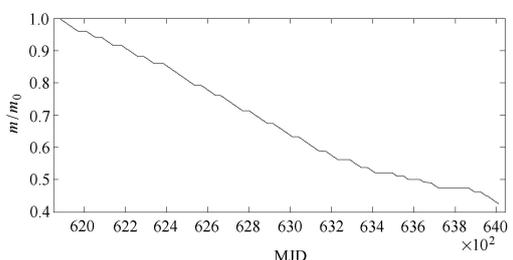


图 4 探测器质量变化

综上, 小推力燃料最优解的交会时刻与脉冲转移相比有较大差别. 如果按照脉冲最优时刻分段各

自转化的燃料消耗则不能获得整体最优解, 且可能出现某些弧段无法转化的情形 (与脉冲近似的参数设置有关, 例如转移时间过短使探测器以有限推力方式无法到达), 需要手动调整前后时刻.

6 结论

本文通过将小行星序列约束条件作为内点约束, 建立了整体的最优控制问题, 给出了在任务总时间一定的情况下对起始时间和访问时刻进行优化的算法. 提出的对交会后有停留时间要求的约束处理方法简单有效, 可与其他类型内点约束联合建立打靶方程. 虽然方程个数较多, 但由于可使用脉冲转移近似得到的交会时刻作为初值, 因此能够很快得到最优解. 与分段小推力转化相比具有较大优势, 而且不需要很精确的脉冲最优解. 算法可用于小行星多目标探测的任务设计以及对精确度要求较高的整体轨迹优化, 也可应用于其他含有类似约束的多目标深空探测任务.

参考文献

- 1 夏炎, 罗永杰, 赵海斌等. 主带小行星深空探测可接近性与多目标探测轨道的实现. 天文学报, 2010, 51(2): 163-172
- 2 陈杨, 宝音贺西, 李俊峰. 我国小行星探测目标分析与电推进轨道设计. 中国科学: 物理学·力学·天文学, 2011, 41(9): 1104-1111
- 3 李俊峰, 祝开建. 2005~2009 年国际深空轨迹优化竞赛综述. 力学与实践, 2010, 32(4): 130-137
- 4 杨忠敏, 戴光明, 彭雷等. 纯脉冲小行星探测序列与轨道优化. 中国宇航学会、深空探测技术专业委员会, 2013
- 5 李九天, 罗亚中, 唐国金. 小行星探测多脉冲交会轨道多目标优化. 国防科技大学学报, 2011, 33(3): 5-9
- 6 路毅, 李济生, 李恒年等. 基于星历匹配法的载人小行星探测轨迹优化问题求解. 力学与实践, 2014, 36(2): 172-179
- 7 黄国强, 陆宇平, 南英等. 多目标连续小推力深空探测器轨道全局优化. 系统工程与电子技术, 2012, 34(8): 1652-1659
- 8 蒋方华, 陈杨, 刘跃聪等. 2010 年国际深空探测轨道优化竞赛的清华大学解法. 力学与实践, 2011, 33(3): 103-105
- 9 Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2012, 35(1): 245-258
- 10 陈杨, 宝音贺西, 李俊峰. 考虑功率约束的太阳电能推进轨道优化设计. 清华大学学报, 2013, 53(10): 1498-1502

(责任编辑: 胡漫)