

文章编号: 1000-4750(2015)12-0077-07

# 结构风振响应极值估计方法比较

武 岳<sup>1,2</sup>, 陈 龙<sup>3</sup>, 吴 迪<sup>4</sup>

(1. 哈尔滨工业大学结构工程灾变与控制教育部重点实验室, 黑龙江, 哈尔滨 150090;

2. 哈尔滨工业大学土木工程学院, 黑龙江, 哈尔滨 150090;

3. 上海天华建筑设计有限公司, 上海 200235; 4. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘 要:** 为考察基于高斯分布假定的工程极值估计方法对结构风振响应极值估计的准确性, 以单层球面网壳结构为例, 首先通过重复采样风洞实验和重复风振响应分析, 获得了超过 1000 个以上的结构风振响应时程样本; 其次利用经典极值理论根据大量样本确定结构风振响应的极值准确值, 作为评价标准; 然后分别采用几种常用的工程极值估计方法, 包括峰值因子法、改进 Hermite 模型法和 Sadek-Simiu 法, 仅根据单个样本确定极值; 最后通过对众多极值估计值进行统计分析, 系统考察了不同方法极值估计结果的稳定性和准确性。结果表明, 峰值因子法估计结果的离散性较小, 但数值多数偏低; 改进 Hermite 模型法估计结果的离散性较大, 且数值多数偏高; Sadek-Simiu 法的离散性介于二者之间, 且估计结果与准确值较为接近, 因而建议在进行工程极值估计时采用。

**关键词:** 极值估计; 峰值因子法; 改进 Hermite 模型法; Sadek-Simiu 法; 非高斯过程

中图分类号: TU312.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.08.0764

## A COMPARATIVE STUDY ON METHODS FOR ESTIMATING EXTREME WIND-INDUCED RESPONSE OF STRUCTURES

WU Yue<sup>1,2</sup>, CHEN Long<sup>3</sup>, WU Di<sup>4</sup>

(1. Key Lab of Structural Engineering and Control, Ministry of Education, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150090, China;

2. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150090, China;

3. Tianhua Architecture Planning &amp; Engineering Co. Ltd, Shanghai 200235, China;

4. School of Civil and Architecture Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** To evaluate the accuracy of some engineering methods for estimating the extreme values of wind induced response, which are usually based on the Gaussian distribution assumption, repeated wind tunnel tests and wind-induced response analysis with over 1000 samples were carried out on a single-layer spherical lattice shell structure, and more than 1000 samples of the structural response time-history were obtained. Secondly, the extreme value of the structural response was analyzed by the method of classical extreme value theory based on the large number of samples, and can be regarded as the reference value. Then, the Peak Factor method, the Modified Hermite Model method, and the Sadek-Simiu method are used separately to estimate the extreme values of structural response based on only one sample. Finally, statistical analysis is carried out on these estimated values, and the stability and accuracy of these three methods are investigated. The results indicate that the estimation results from the Peak Factor method have small deviation, but most are underestimated; the estimation results of the Modified Hermite Model method vary greatly, and most are overestimated; the estimation results of the Sadek-Simiu method are close to the reference value. Thus in practice it is recommended to estimate extreme

收稿日期: 2013-08-20; 修改日期: 2015-09-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(91215302, 51178144)

通讯作者: 武 岳(1972—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 工学博士, 从事结构抗风、大跨空间结构研究(E-mail: wuyue\_2000@163.com).

作者简介: 陈 龙(1988—), 男, 河南光山人, 工程师, 工学硕士, 从事结构抗风研究(E-mail: havingtoday2007@126.com);

吴 迪(1982—), 男, 山东济南人, 讲师, 工学博士, 从事结构抗风研究(E-mail: forseti2001@163.com).

values by the Sadek-Simiu method.

**Key words:** extreme value estimation; peak factor method; modified Hermite model method; Sadek-Simiu method; non-Gaussian process

结构风振极值响应是风工程研究的主要问题之一,而极值估计方法则是此类问题研究的基础。现有极值估计方法主要分为两类:一类是基于经典极值理论的方法,另一类是峰值因子法及其改进方法。

基于经典极值理论的方法是直接从多个相互独立的随机样本中提取极值序列,再通过概率选型和参数估计建立极值概率分布模型,获得具有确定保证率的极值。Kasperski<sup>[1]</sup>通过 3000 多次重复采样风洞实验,研究了一低矮建筑模型上 4 个不同位置处的风压极值概率分布,结果表明极值 I 型能够较好地拟合风压极值分布。Holmes 等<sup>[2]</sup>也通过风洞实验获得数千个风振响应时程样本,并采用极值 I 型分布和广义极值分布进行了极值拟合。

直接利用数千个样本进行极值估计的方法虽然精确,但非常费时且不经济,因此难以在实际工程中应用。在实际工程中,人们往往希望通过少量样本来获得极值估计。峰值因子法<sup>[3]</sup>即是一种在工程中被广泛采用的极值估计方法,其假定结构风荷载或风振响应的样本母体服从高斯分布,然后结合零值穿越理论建立结构响应极值与标准差之间的联系,进而对极值响应做出推断。可以看出,样本母体服从高斯分布假定是该方法的基础,但实际情况并不总能满足该假定。Holmes<sup>[3]</sup>及孙瑛等<sup>[5]</sup>对风荷载的高斯特性研究结果均表明,来流分离区的脉动风压具有明显的非高斯特征,非高斯风压要比高斯风压高 15%~30%。为解决此问题,Kareem 等<sup>[6-7]</sup>提出了 Hermite 模型法及其改进方法,Sadek 和 Simiu<sup>[8]</sup>也提出了基于伽马分布的改进方法。但这些方法在本质上仍是根据随机过程母体的概率分布,而不是极值的概率分布,来推断极值的,因此其准确性需要得到实验数据的验证<sup>[9]</sup>。

本文以单层球面网壳为研究对象,基于对同一工况进行多次重复采样风洞实验获得的大量风荷载样本,对结构进行风振响应重复分析,得到多个风振响应样本作为分析基础;再利用经典极值理论建立风振响应极值的概率模型,作为评估标准;之后对峰值因子法、改进 Hermite 模型法和 Sadek-Simiu 法的极值估计结果进行比较分析,考察了这

三种方法的稳定性和准确性。

## 1 风洞实验与风振响应分析

### 1.1 重复采样风洞测压实验

实验在哈尔滨工业大学风洞与浪槽联合实验室中进行。模型几何缩尺比 1:100,风速缩尺比 1:2。球面屋盖模型跨度 600 mm,矢跨比 1:5,下部支座高度 120 mm,采用有机玻璃和 ABS 板制成(如图 1 所示)。在模型表面均匀布置了 217 个测点(如图 2 所示,其中数字为沿来流方向模型中线上的测点编号)。实验风速为 15 m/s,模拟 B 类地貌,来流风速剖面及湍流度见图 3。测压信号采样频率 625 Hz,单个样本采样时间 12 s,根据相似比换算到原型结构上的时间分辨率为 0.08 s,时长为 10 min。实验中,通过编制接口软件实现多次自动采样功能,在保证所有条件均不变的情况下,共进行了 1411 次独立采样。所有采样信号均利用管路频响函数进行了修正,以消除信号畸变的影响。

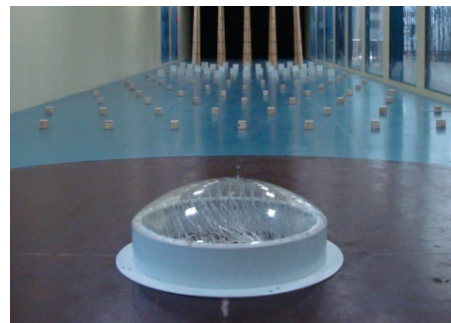


图 1 球面屋盖风洞实验照片

Fig.1 Photo of a wind tunnel test on a spherical shell

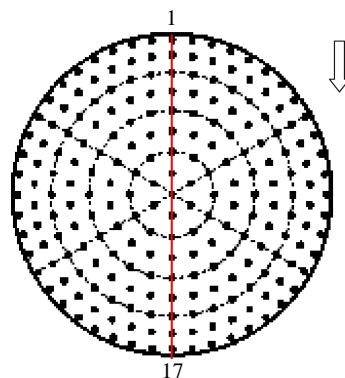


图 2 测点及风向示意图

Fig.2 Measurement points and wind direction

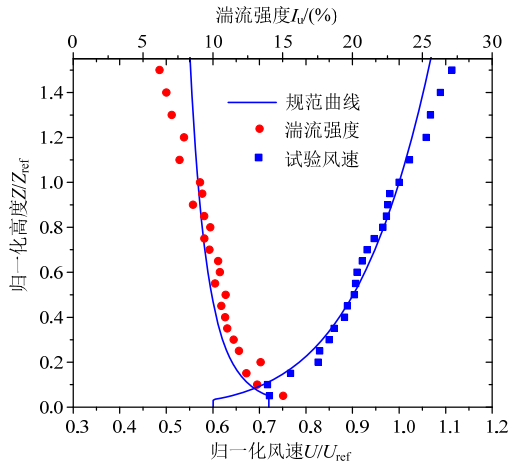
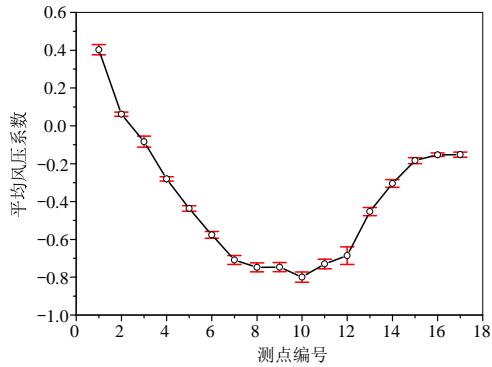
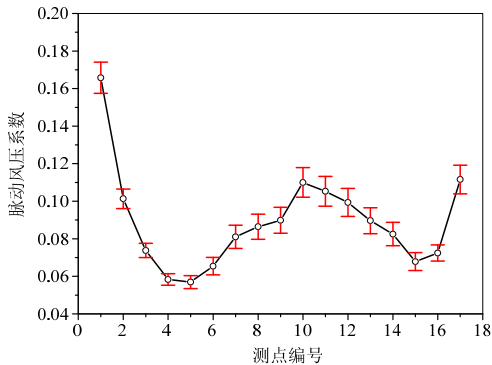


图3 风洞模拟 B 类地貌大气边界层  
Fig.3 Wind tunnel simulation for terrain B

以球壳顶点高度为参考高度，分别对 1411 个风压时程样本进行统计分析，得到各样本的平均风压系数和脉动风压系数。图 4(a)和图 4(b)分别给出了沿来流方向屋面中线上的测点平均风压系数和脉动风压系数波动情况。可以看出，平均风压系数的相对波动较小，而脉动风压系数则相对波动较大。这反映了屋盖表面气动力的不确定性。



(a) 平均风压系数波动情况



(b) 脉动风压系数波动情况

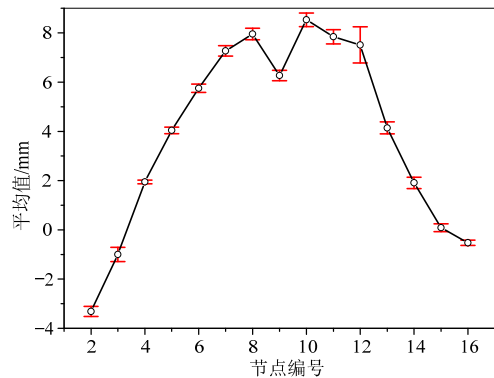
图 4 沿屋盖中线上平均风压和脉动风压实验结果

Fig.4 Test results of the mean wind pressure and fluctuating wind pressure along the roof center line

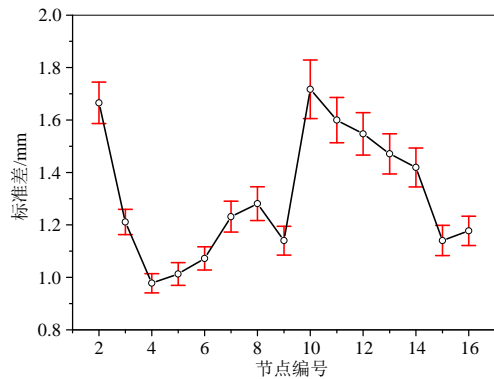
## 1.2 重复样本风振响应分析

利用风洞实验获得的 1411 个风荷载样本，采用 ANSYS 软件对单层球面网壳进行风振响应分析，得到相应的 1411 个风振响应时程样本。计算模型为 Kiewitt 6 型单层球面网壳结构，边界条件为周边铰支。计算中取来流基本风速为 30 m/s，屋面质量为 60 kg/m<sup>2</sup>，结构阻尼采用 Rayleigh 阻尼。所有杆件均按照 2 倍安全度原则根据稳定分析结果确定，未考虑材料、杆件尺寸、边界条件的不确定性。

图 5 给出沿来流方向屋盖中线上节点(编号 2~编号 16)的位移响应前四阶中心距随不同样本的变化情况。可以看出：1) 随着统计阶数的增加，响应波动情况加剧，说明不同样本间的差异在高阶中心矩上体现的更加明显；2) 比较图 4(b)与图 5(b)，两者的分布规律存在明显差异，说明结构响应结果的波动性不仅与风荷载有关，还会受到结构自身动力特性的影响，即结构可能会将某些点的荷载波动效应放大或减小；3) 根据文献[5]给出的高斯、非高斯划分标准，即将偏度绝对值大于 0.2、峰度值大于 3.7 视为非高斯过程，由图 5(c)和图 5(d)可以看出，2 号、3 号、4 号、7 号、8 号点的风振响应具有非高斯特征，特别是在迎风前缘的 2 号、3 号、4 号点负偏斜效应明显。



(a) 均值



(b) 标准差

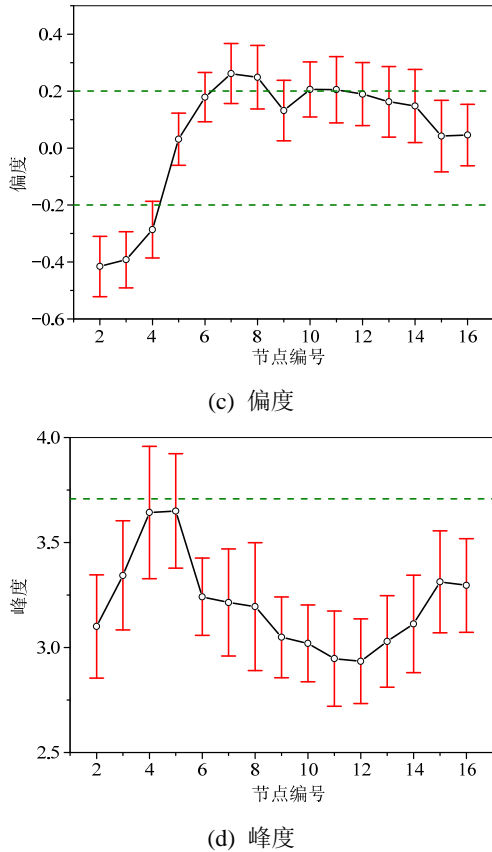


图5 沿屋盖中线上各节点位移响应前4阶中心矩  
Fig.5 First four statistical moments of structural displacements along the roof center line

## 2 基于经典极值理论的响应极值估计

基于经典极值理论的响应极值估计步骤为: 1) 从每个样本中提出最大值, 构成极值序列; 2) 采用某种极值分布拟合该极值序列, 建立相应的概率分布模型; 3) 根据极值概率分布模型确定具有一定保证率的极值。在上述过程中要解决两个关键问题: 一是选用何种极值分布模型, 二是确定模型参数。

根据极值分布理论(Fisher-Tippet 定理), 当极值的渐近分布存在且为非退化时, 其分布趋向收敛于三种极值分布: 极值 I 型、极值 II 型和极值 III 型分布。由于极值 I 型分布拟合需要的样本数目较少, 且较为符合工程极值分布规律, 因此在结构风工程领域应用较多。本文亦采用极值 I 型分布。其概率分布函数为:

$$H(X) = \exp(-\exp(-(X-u)/\beta)) \quad (1)$$

其中:  $\beta$  为尺度参数;  $u$  为位置参数。

对于模型参数(即尺度参数和位置参数)的确定, 利用矩法、极大似然估计、概率矩法和最小二乘法均能给出满意的参数估计结果<sup>[10]</sup>。由于矩法

能够利用前 2 阶中心矩给出参数的显式表达式, 本文选用矩法来确定模型参数。

图 6 给出屋盖顶点位移响应最大值的经验概率密度和相应的极值 I 型曲线, 可以看出两者拟合效果较好, 说明极值 I 型分布可以作为风振响应极值的概率模型。图 7 给出了屋盖中线上节点(编号同测点编号)位移响应具有 57% 保证率的极值估计值(相当于极值期望值), 下文将以其作为评价各个基于样本母体分布假定的极值估计方法准确性的标准。

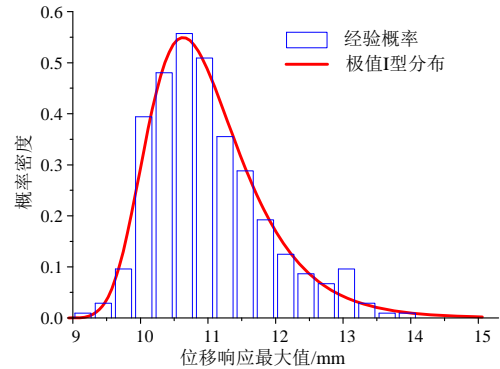


图6 极值 I 型分布拟合

Fig.6 Fitting by the type I extreme value distribution

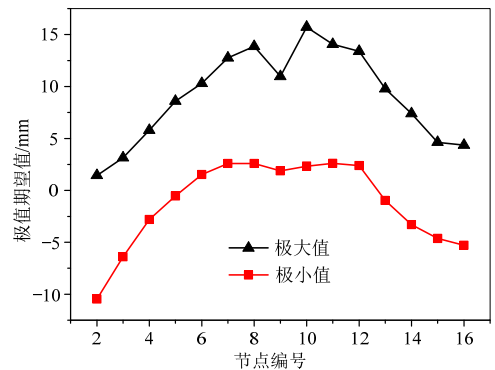


图7 沿屋盖中线上各节点位移响应极值

Fig.7 Extreme displacements of points along the roof center line

## 3 基于母体分布假定的响应极值估计

### 3.1 峰值因子法(PFM)

由 Davenport 于 1967 年提出<sup>[3]</sup>, 该方法假定每个样本均符合正态(高斯)分布, 每个样本最大值构成的随机变量又符合极值分布, 这样就可以根据极值穿越理论, 推导出极值期望值与样本均值和标准差之间的关系:

$$X_{\max} = m_X \pm g\sigma_X \quad (2)$$

其中:  $m_X$  和  $\sigma_X$  为风振响应的均值和标准差;  $X_{\max}$

为风振响应极值； $g$  为峰值因子，其表达式为：

$$g = (2 \ln vT)^{1/2} + \frac{0.5772}{(2 \ln vT)^{1/2}} \quad (3)$$

其中： $T$  为观察时距； $v$  为零值穿越率。

### 3.2 改进 Hermite 模型法(MHM)

为解决 PFM 方法不适用于非高斯过程的问题，Kareem 和 Zhao<sup>[6]</sup>基于转换过程(Translation process)和基于矩的 Hermite 模型(Moment-based Hermite Model)，提出针对单一变量非高斯过程的峰值因子法(HM 法)。之后，Kareem 和 Kwon<sup>[7]</sup>又对 HM 法的计算式做进一步修正，提出更为精确的改进 Hermite 模型法(MHM)，其具体表达式为：

$$X_{\max} = m_X \pm g_{NG} \sigma_X \quad (4)$$

式中， $g_{NG} = \kappa[g + h_3(g^2 - 1) + h_4(g^3 - 3g)]$ ，为考虑非高斯特性的峰值因子。其中的 $\kappa$ 、 $h_3$ 和 $h_4$ 参数可通过下述非线性方程组求得：

$$\begin{cases} 1 = \kappa \sqrt{1 + 2h_3^2 + 6h_4^2} \\ S = \kappa^3 (8h_3^3 + 108h_3h_4^2 + 36h_3h_4 + 6h_3) \\ K = \kappa^4 (60h_3^4 + 3348h_4^4 + 2232h_3^2h_4^2 + 60h_3^2 + 252h_4^2 + 1296h_3^3h_4 + 576h_3^2h_4 + 24h_4 + 3) \end{cases} \quad (5)$$

式中：当求极大值时， $S$  和  $K$  分别为标准化的非高斯过程，即  $y = [x - E(x)] / \sigma_x$  的偏度和峰度；求极小值时， $S$  为  $y$  的偏度的负值。当风振响应过程为高斯过程时， $S=0$ 、 $K=3$ ，导致  $h_3$  和  $h_4$  为零， $\kappa$  为 1，非高斯过程的峰值因子退化为高斯过程的峰值因子，说明 Davenport 方法可以看做是 MHM 方法的一个特例。

### 3.3 Sadek-Simiu 法

Sadek 和 Simiu<sup>[8]</sup>建议采用三参数伽马分布和正态分布分别拟合时程序列的长尾部和短尾部，当所关心的极值位于短尾部时，可以根据母体高斯分布假定确定极值，该过程与峰值因子法相同；当所关心的极值位于长尾部时，则需要通过等效概率原则<sup>[11]</sup>将母体为伽马分布的非高斯时程  $x(t)$  转换为标准高斯时程  $y(t)$ 。具体过程为：采用双指数型概率分布作为标准高斯时程的极值概率模型  $F(y_{pk})$ ，令  $F(y_{pk})=p$  求得保证率  $p$  下的极值  $y_{pk,p}$ ；再通过等效概率原则，即令  $\Phi(y_{pk,p})=F_x(x_{pk,p})$ ，根据三参数的伽马分布曲线可得到非高斯时程对应的具有相同保证率的极值  $x_{pk,p}$ 。

其中三参数伽马分布为：

$$f(z) = ((z - \mu) / \beta)^{\gamma-1} \times \exp(-(z - \mu) / \beta) / (\beta \Gamma(\gamma)), \quad z > \mu \quad (6)$$

式中： $\gamma$ 、 $\beta$ 、 $\mu$  分别为形状参数、尺度参数和位置参数； $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数。伽马分布的参数可以由前三阶中心矩表示：

$$\gamma = (2 / S)^2, \beta = \sigma_X S / 2, \mu = m_X - 2\sigma_X / S \quad (7)$$

当  $S$  趋近于零，尺度参数  $\gamma$  无穷大，伽马分布函数退化为正态分布函数。

双指数型极值概率分布模型为：

$$F_{y_{pk}}(y_{pk}) = \exp(-v_{0,y} T \exp(-y_{pk}^2 / 2)) \quad (8)$$

则对应保证率  $p$  的极值为：

$$y_{pk,p} = \sqrt{2 \ln(-v_{0,y} T \ln(p))} \quad (9)$$

### 3.4 三种极值估算方法比较分析

用上述三种基于样本母体分布假定的极值估计方法计算出各样本节点位移和杆件内力响应极大值期望值和极小值期望值，取两者中绝对值较大的极值期望值作为极值估计结果，并与经典极值理论方法的计算结果进行比较。为了便于比较，这里定义估计相对值为基于样本母体分布假定的极值估计结果与标准值之比。限于篇幅，本文只给出球面中线上节点和工程中最为关心的最大位移节点位移估计结果。图 8 给出屋盖中线上各节点位移响应极值期望值的估计相对值。可以看出：

- 1) 在估计结果的离散性方面，PFM 法的波动幅值最小，仅为 15% 左右；Sadek-Simiu 法次之，约为 20%；而 MHM 法的波动幅值最大，可达 50%。
- 2) 在估计结果的大小方面，PFM 法的平均值略小于标准值 5% 左右；MHM 法的平均值比标准值大 10%；而 Sadek-Simiu 法的平均值基本与标准值吻合。

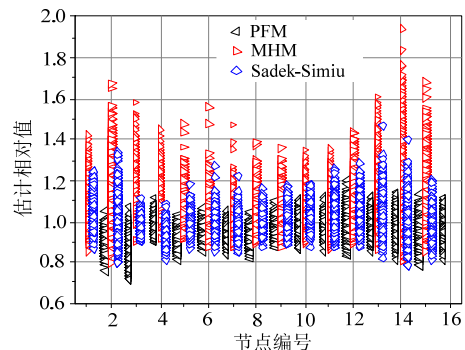
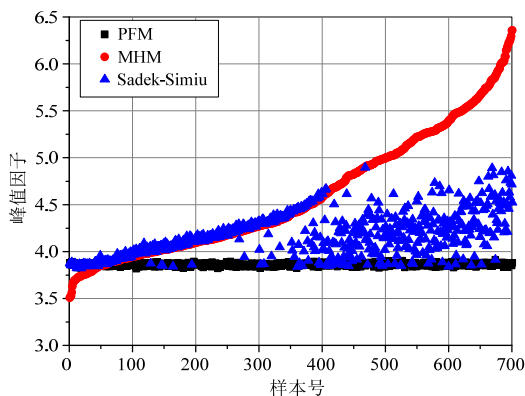


图 8 不同方法的极值估计值比较

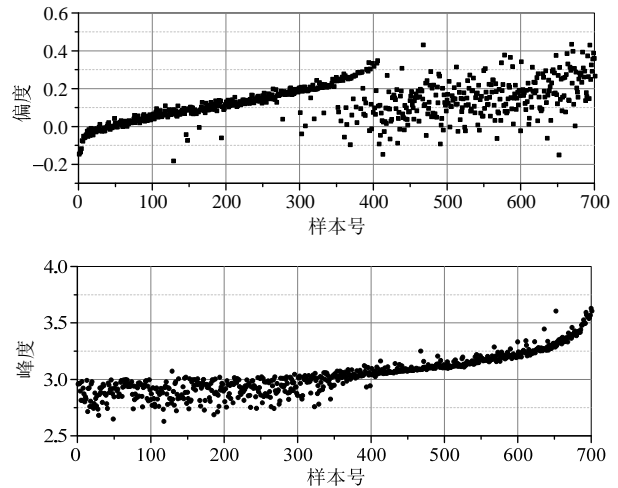
Fig.8 Comparison of the results from different extreme value estimation methods

为什么会出现以上现象呢?这就要从极值问题的本质以及这三种方法的基本原理加以分析。首先,基于母体分布假定的极值估计方法都是由单个样本推断极值,因而必然会受到样本不确定性的影响;由于样本不确定性会随其统计阶数的增加而增大(如图5所示),因而考虑统计阶数越多的估计方法的结果离散性也会越大。PFM法采用高斯分布,仅需要考虑前两阶中心矩;MHM法需要考虑前4阶中心矩;而Sadek-Simiu法采用三参数伽马分布需要考虑前三阶中心矩;因此PFM法的结果离散性最小,MHM法的结果离散性最大。

其次,由于样本极值分布仅与样本母体分布的尾部形状有关,而与中央的形状无关,因而极值估计结果的准确性依赖于对样本母体分布尾部形状的准确拟合。由于高斯分布不能对非高斯过程概率分布的尾部进行很好拟合,导致对长尾部的极值估计偏小,对短尾部的极值估计偏大,因而PFM法不宜用于非高斯风振响应极值的估计;Sadek-Simiu法做了改进,采用三参数伽马分布对长尾部进行拟合,获得了较好的极值估计结果;MHM法在对尾部进行拟合的同时还考虑了概率分布中央部分的峰度影响,这样看似更加精确,但实际上反而会使尾部拟合效果受到中央部分峰度变异的影响。为进一步说明该问题,本文分别采用这三种方法计算了结构最大位移点处700个样本的峰值因子,以及相应时程样本的偏度和峰度,如图9所示。可以看出:对于编号50~400的样本,由于其峰度接近3(高斯分布的峰度系数),相当于可不考虑非高斯性的影响,此时MHM法的估计结果与Sadek-Simiu法相同;而对于编号400~编号700的样本,由于其峰度偏大,导致MHM法的估计结果明显大于Sadek-Simiu法。



(a) 极值估计结果



(b) 偏度与峰度

图9 偏度和峰度对极值估计结果的影响

Fig.9 Influence of skewness and kurtosis on the estimated results

## 4 结论

本文以球面网壳结构为例,基于多次重复采样风洞实验和经典极值理论,对峰值因子法、改进Hermite模型法和Sadek-Simiu法对结构风振响应极值的估计结果进行比较分析,考察了这三种方法估计结果的离散性和准确性。得到以下主要结论:

(1) 风振响应样本的不确定性导致根据基于样本母体分布假定的极值估计方法所得结果也存在一定的不确定性,因而在利用该类方法进行结构风振响应极值估计时,应尽可能多采用几组样本,以降低不确定性的影响。

(2) 从估计结果的离散性来看,MHM法的离散性最大,Sadek-Simiu法次之,峰值因子法最小;而从估计结果的准确性来看,峰值因子法的估计值多数偏低,MHM法的估计结果多数偏高,Sadek-Simiu法最为接近标准值。

(3) 综合本文分析结果,可认为Sadek-Simiu法优于峰值因子法和MHM法。

### 参考文献:

- [1] Kasperski M. Specification of the design wind load based on wind tunnel experiments [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2003, 91(4): 527-541.
- [2] Holmes J D, Cochran L S. Probability distributions of extreme pressure coefficients [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2003, 91(1/2): 893-901.

- [3] Davenport A G. Gust loading factors [J]. *Journal of Structural Division*, 1967, 93(3): 11—34.
- [4] Holmes J D. Wind action on glass and Brown's intergral [J]. *Engineering Structure*, 1985, 7(4): 226—230.
- [5] 孙瑛, 武岳, 林志兴, 沈世钊. 大跨度平屋盖结构风压脉动的非高斯特性[J]. *土木工程学报*, 2007, 40(4): 85—90.  
Sun Ying, Wu Yue, Lin Zhixing, Shen Shizhao. Non-Gaussian features of fluctuating wind pressures on long span roofs [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2007, 40(4): 85—90. (in Chinese)
- [6] Kareem A, Zhao J. Analysis of non-Gaussian surge response of tension leg platforms under wind loads [J]. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering ASME*, 1994, 116(3): 137—144.
- [7] Kwon D K, Kareem A. Peak factors for non-Gaussian load effects revisited [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2011, 137(12): 1611—1619.
- [8] Sadek F, Simiu E. Peak non-Gaussian wind effects for database-assisted low-rise building design [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(5): 530—539.
- [9] 王飞, 全涌, 顾明. 基于广义极值理论的非高斯风压极值计算方法 [J]. *工程力学*, 2013, 30(2): 44—49.  
Wang Fei, Quan Yong, Gu Ming. An extreme-value estimation method of non-gaussian wind pressure based on generalized extreme value theory [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(2): 44—49. (in Chinese)
- [10] 段忠东, 周道成. 极值概率分布参数估计方法的比较研究[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2004, 36(12): 1605—1609.  
Duan Zhongdong, Zhou Daocheng. A comparative study on parameter estimate method for extremalvalue distribution [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2004, 36(12): 1605—1609. (in Chinese)
- [11] Gioffre M, Gusella V, Grigoriu M. Simulation of non-Gaussian field applied to wind pressure fluctuations [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, 15(4): 339—345.

---

(上接第 67 页)

- [17] 李大鸣, 陈海舟, 张建伟, 等. 基于 SPH 法的二维矩形液舱晃荡研究[J]. *计算力学学报*, 2010, 27(2): 369—374.  
Li Daming, Cheng Haizhou, Zhang Jianwei, et al. A study of 2D liquid sloshing in rectangle tanks based on SPH method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27(2): 369—374. (in Chinese)
- [18] 贾善坡, 许成祥, 谭继可. 矩形容器内液体三维晃动特性研究[J]. *水电能源科学*, 2012, 30(1): 142—144.  
Jia Shanpo, Xu Chengxiang, Tan Jike. Characteristic analysis of 3D liquid sloshing in rectangular container [J]. *Water Resources and Power*, 2012, 30(1): 142—144. (in Chinese)
- [19] 祁江涛, 顾民, 吴乘胜. 液舱晃荡的数值模拟[J]. *船舶力学*, 2008, 12(4): 574—581.  
Qi Jiangtao, Gu Min, Wu Chengsheng. Numerical simulation of sloshing in liquid tank [J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2008, 12(4): 574—581. (in Chinese)
- [20] Yang C, Löhner R. Computation of 3D flows with violent free surface motion [C]. Seoul: Proceeding of the 15th International Offshore and Polar Engineering Conference, Elsevier, 2005: 187—196.