

文章编号 1004-924X(2015)增-0000-06

## 摄影测量中大量标志点的光束平差求解

千勃兴\*, 梁晋, 郭楠, 龚春园, 冯超  
(西安交通大学机械工程学院, 陕西西安710049)

**摘要:**讨论了工业摄影测量中需要计算大量标志点时的处理方法。针对待求点数目较多的情况,研究了光束平差法的优化步骤。首先,分析了逐点法化消元在平差计算中的应用,将引起镜头畸变的10个内参数均参与平差优化,从而提高了平差优化的精度;其次,采用随机函数在空间选取较多数目的标志点进行平差,通过局部多次平差优化,使求解结果接近全局平差的水平。提出的平差思路避免了传统计算将所有点参与平差造成内存不足使计算中止的问题,且计算速度较快。最后,对这种方法进行了实验验证,两组实验标志点的数目分别为1360和896,三维重建后的重投影误差为0.076和0.1071。结果显示提出的方法精度较高,能够满足实际测量需求。

**关键词:**摄影测量;逐点法;消元;光束平差;前方交会

中图分类号:P234.1 文献标识码:A doi:10.3788/OPE.20152313.0000

## Solution of plenty of marks in photogrammetry by bundle adjustment

QIAN Bo-xing\*, LIANG Jin, GUO Nan, GONG Chun-yuan, FENG Chao

(College of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

\* Corresponding author, E-mail:qianboxing1023@126.com

**Abstract:** How to calculate a plenty of marks in close range industrial photogrammetry was discussed. The optimization method of bundle adjustment was proposed when the number of marks was large. Firstly, the application of the elimination point by point in adjustment calculation was analyzed. The accuracy of adjustment optimization was improved by introducing 10 camera intrinsic parameters of lens distortion. Then, the random function was used to select many marks in the space for bundle adjustment. After several times of partial adjustment optimization, the result could be very close to the level of global adjustment optimization. This way of adjustment not only overcomes the difficulty on out of memory and calculation interrupt in traditional calculation, but also has a high computation speed. Finally, two experiments with 1360 and 896 marks were performed and the results show that reprojection errors are 0.076 and 0.1071 after reconstruction respectively. It indicates that the method has a great accuracy and can be used in the actual measurement.

**Key words:** photogrammetry; point to point method; elimination; bundle adjustment; forward intersection

### 1 序言

近景工业摄影测量的任务是计算若干个标记

点的三维坐标,其关键是确定相机在空间中的相对位置和镜头的畸变校正,即相机的内外参数<sup>[1]</sup>。将每张照片的摄站模型建立起来之后,再提取出每张图像中待测点的亚像素像元坐标,通

收稿日期:2015-06-22;修订日期:2015-07-15.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51275378, No. 51275389, No. 51421004);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

过极线约束找出同名标记点所有对应的像元坐标,再进行最小二乘平差计算即可得到待求点的空间坐标。为保证求解精度,上述过程中有必要进行一次全局迭代调整。

立体影像对光束法的严密解法先求出两幅影像的外方位元素然后做前方交会,再将相机内外参数与物方空间点坐标在一个整体内进行调整,理论较为严密,计算精度高。在近景摄影测量领域中通常使用这种光束平差优化方法来求取相机的内外参数以及物方点的空间坐标<sup>[2-3]</sup>。

然而,当摄影测量用于表面特征较多、曲面变化较为复杂的被测轮廓或者静态变形实验中关心的位置较多时,为了更细致和完整地反映轮廓或变形,往往需要张贴更多的标志点,照片的数目也会增多。这样需要计算的三维点的数目较大,有时数量在  $10^3$  以上。当待求点的数量很多时,摄影测量所使用的光束平差优化算法难以满足要求。在对如此大量的三维点进行整体光束平差优化时,会由于计算处理的矩阵规模较大而造成内存爆满,导致计算时间过长甚至计算崩溃。

本文讨论了摄影测量中需要计算大量标志点的处理思路,研究了大量待测点的光束平差优化步骤。首先就光束平差优化算法的关键问题进行探讨,基于逐点法化消元,考虑包含相机镜头畸变等在内的 10 个内参数,统一进行平差优化。在对全局进行参数调整时,多次随机选取多个标志点再捆绑调整以解决内存问题。最后通过实验验证了该优化算法的有效性。

## 2 包含内参数的法化平差模型

在摄影测量里,未知数包括摄像机的内外参数和标志点的三维坐标。若标志点数目达到上千个,将所有图像法方程式组成整体,对其进行求解、消元计算,所组成的法方程式的阶数将会非常大<sup>[4-5]</sup>。因此通常使用逐点法化消元的方法<sup>[6]</sup>来避免大矩阵的求逆,从而有效减少计算量。

冯其强<sup>[7]</sup>等人提出了基于点松弛法的自检校光束法平差快速解算法,避免了组建整体法方程和大型矩阵的求逆运算,但损失了部分精度。冯鹏飞<sup>[8]</sup>实现了基于稀疏矩阵的自检校光束法平差相机检校方法。黄桂平<sup>[4]</sup>从理论上推导了考虑外方位元素与控制点坐标的平差模型,证实整体法化消元和逐点法化消元后求和的结果是等效的。并且后者将矩阵求逆的规模缩小到 3 阶,

与前者相比,极大地提高了计算效率。本文将相机的 10 个内参数加入了平差模型。对摄影测量中的共线条件方程进行线性化<sup>[1]</sup>,并考虑相机的 10 个内参数<sup>[7,9]</sup>,对一个标志点或多幅图像上可列出误差方程:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \times X_1 + \mathbf{B} \times X_2 + \mathbf{C} \times X_3 - \mathbf{L}, \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{V} = [V_x, V_y]^T$ , 为观测值即图像点坐标的改正数矩阵;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  为图像点对摄像机内外参数和标志点三维坐标的偏导数矩阵;  $X_1, X_2, X_3$  为摄像机内外参数和标志点三维坐标的改正数;  $\mathbf{L} = [l_x, l_y]^T$  为观测值向量。

根据最小二乘原理可列出法方程式:

$$[\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}]^T \mathbf{P} [\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}]^T \mathbf{P} \mathbf{L}, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{P}$  为图像像点观测值的权矩阵。

在摄影测量中通常认为所有像点都是等精度测量,于是  $\mathbf{P}$  为单位矩阵。这样得到法方程式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{B} & \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{L} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

简化为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{N}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{B} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{N}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{C} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{N}_{22} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ 。法方程式消去坐标未知数改正数  $X_3$ , 得到消元后的方程式为:

$$(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{N}_{12}^T) t = \mathbf{U}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{U}_2.$$

上式中消去了描述标志点三维坐标的 3 个参数,得到的是一个关于相机内外参数的非齐次线性方程组,求解可得摄像机的内外参数,然后通过前方交会求出标志点的三维坐标。由于这里同时对 3 种参数进行了光束平差优化,有利于收敛的快速进行,当得到的改正数小于规定限时,上述的计算迭代过程结束。

采用逐点法化消元的平差计算,其主要过程如下:

(1) 对每个标志点的相关图像求偏导数系数矩阵,列出误差方程。然后法化获得相应的法方程式,消去三维点坐标的改正数,得到约化方程式。

(2)重复步骤(1)对所有标志点进行法化消元得到约化方程式;

(3)将步骤(2)得到的所有约化方程式相加得到约化方程组;

(4)求解约化方程组得到摄像机的内外参数改正数;

(5)利用多片前方交会的方法逐点求解出三维点坐标的改正数;

(6)重复以上步骤,直至求解出的所有参数的改正数小于规定限差。

通过逐点法化消元的方法可以有效减小计算量,但是当待求点数目较多时,未知参数较多,平差优化可能仍然无法进行。

由于所有照片都由同一个相机拍摄,而相机的畸变和主点偏差在整个测量过程中保持不变,即每张照片的摄站对应的内参数相同;并且同一张照片上面的可见物方点是用同一个摄站,其对应的外参数也应该相同。通过添加这两个约束条件可在很大程度上减少未知数的求解个数。

### 3 大量待测点的光束平差优化策略

通过对法化消元的方法添加约束条件后,虽然减少了未知数的个数;但是由于法化消元的步骤中需要对所有标志点求取偏导数系数矩阵,每个标志点对应一个系数矩阵,当标志点数目较多时,系数矩阵的求取次数很多,这样会降低计算速度。而逐点法化的主要目的是优化每个摄站的内外参数,因此考虑减少参与整个平差计算的点的个数,在待求标志点空间中随机选取部分点进行内外参数的求解,并进行多次平差,以保证求解精度。

算法流程如图1所示,首先通过相对定向、绝对定向和三维重建求出所有标志点及相机的内外参数的初值<sup>[5]</sup>,设定平差次数 $n$ 。使用随机函数在所有的标志点中选取500个非编码点,再加上所有编码点,对这些点进行逐点法化求出内外参数。外参数求出后通过前方交会求出所选标志点的三维坐标。当这些点的坐标的某个分量前后相差大于0.001 mm时,利用计算得到的三维点和相机参数再次进行逐点法化和前方交会,直到坐标差值小于0.001 mm为止,如此完成一次平差计算。再次在全局中随机选择500个非编码点执行以上过程,直到完成 $n$ 次平差计算。平差优化的次数可自由控制,一般随机足够均匀的话,两次

平差就可以满足计算要求。随机选取的待求点的数目较多是为了保证在平差过程中不会发散。

从流程图中可以看到,每次光束平差都对编码点和随机选取的部分非编码点进行了优化计算,目的是对摄像机的内参数和所有图像的外参数进行一次优化。由于随机选取的标志点数目相对较少,并且内外参数与三维坐标共同参与光束平差优化,因此能够得到较快的收敛效果。

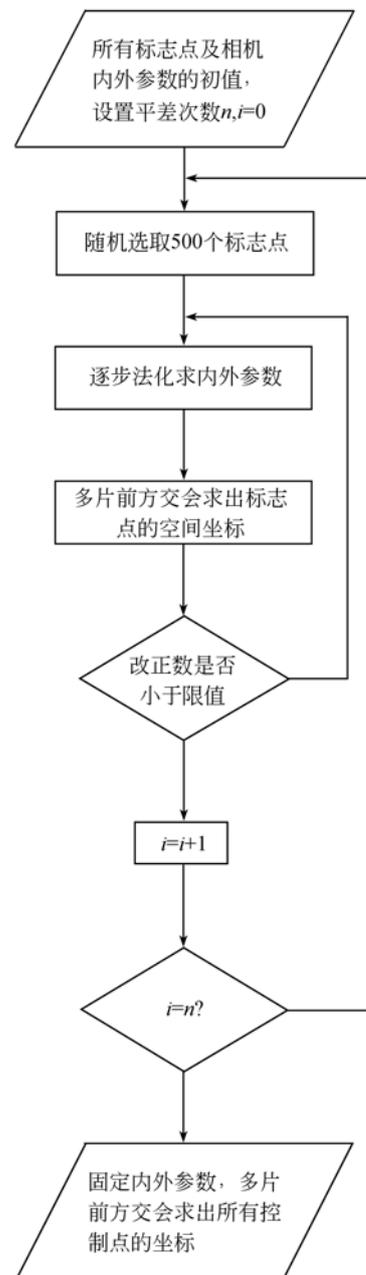


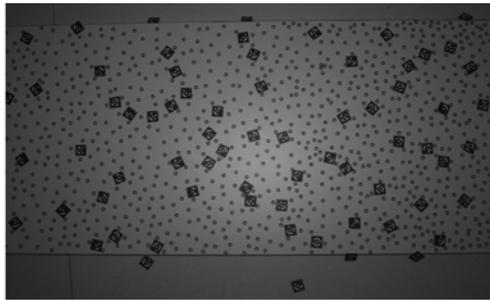
图1 基于大量标志点的光束平差优化流程

Fig. 1 Flowchart of bundle adjustment optimization with plenty of marks

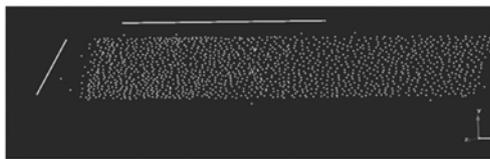
选取部分点进行捆绑调整并多次平差优化的合理性体现在:首先假设所有标志点的全集为  $S$ , 其对应的理想内外参数模型为  $M$ , 其随机子集为  $S_i$ 。当  $S_i$  均匀分布在全局中且数目不算太小时, 其平差优化的理想结果必然是  $M$ , 于是第一次平差优化的结果接近  $M$ , 以此为初值随机选取子集再进行平差优化会越来越接近  $M$ 。

#### 4 光束平差优化实验及结果分析

为了验证平差优化步骤的正确性, 这里进行了平板密集标志点的测量实验。在一张规格为  $1\ 200\ \text{mm} \times 390\ \text{mm} \times 10\ \text{mm}$  的厚玻璃板上粘贴一层平整的白色贴布, 由于标志点的密度很大, 这层白色贴布的作用是利于图像识别, 避免空间中的噪点被提取而影响核线匹配和三维重建。在这层贴布上一共张贴了  $1\ 360$  个非编码点, 布置了  $100$  个编码点。如图 2(a) 所示, 对平板从不同角度一共拍摄了  $16$  张照片, 解算结果如图 2(b) 所示。



(a) 张贴有标志点的玻璃平板  
(a) Glass plate with numbers of landmarks



(b) 摄影测量计算的空间结果  
(b) Calculation result by photogrammetry

图 2 玻璃平板表面标志点的求解

Fig. 2 Solution of landmarks on glass plate surface

利用标定好的相机内参数和每张照片对应的相机的外参数, 将所有求解出的空间点在图像上进行投影, 比较原始像点坐标和计算后的像点坐标之间的误差。设有  $N$  个标志点,  $M$  张图像, 定义两种平均重投影误差  $\varepsilon$  的计算方式:

(1) 设第  $i$  张图像上有  $N_i$  个物方点,  $N_i \leq N$ , 则第  $i$  张图像上的误差为这张图像上所有可

见点的偏差均值。

$$\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}}$$

其中:  $\overline{Q_{ij}q_{ij}}$  为第  $i$  张图像上第  $j$  个可见点的原像点  $Q_{ij}$  与通过相机模型计算出的重投影像点  $q_{ij}$  在像平面上的直线距离。则  $M$  张图像的总偏差为:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}} \right) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}}$$

(2) 设第  $i$  个物方点在  $M_i$  张图像上可见,  $M_i \leq M$ , 则第  $i$  个控制点的误差为所有对该点可见的图像上的投影偏差均值。

$$\frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}}$$

其中:  $\overline{Q_{ij}q_{ij}}$  为第  $i$  个空间点在第  $j$  张可见图像上的原像点  $Q_{ij}$  与重投影计算像点  $q_{ij}$  在像平面上的直线距离。则  $N$  个空间点的总偏差为:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}} \right) = \frac{1}{M_i N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \overline{Q_{ij}q_{ij}}$$

采用第一种误差定义方式对每张照片的重投影误差进行统计, 结果如表 1 所示。

表 1 图像的重投影误差

Tab. 1 Reprojection errors of images

图像序列	编码点数	非编码点数	重投影误差
1	58	766	0.101 8
2	59	762	0.064 5
3	69	927	0.080 5
4	72	970	0.068 4
5	64	918	0.052 6
6	67	933	0.074 9
7	69	952	0.072 0
8	69	890	0.064 8
9	78	1 014	0.071 8
10	84	1 156	0.072 1
11	77	1 031	0.077 8
12	91	1 290	0.074 6
13	77	1 003	0.067 9
14	80	1 044	0.104 3
15	83	1 161	0.092 2
16	86	1 197	0.073 4

由表 1 可知, 整体的平均投影误差为  $0.076$ , 标准差为  $0.013 5$ 。

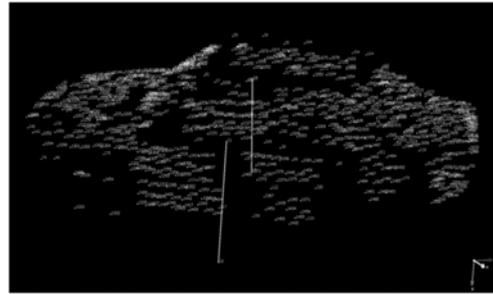
为了进一步说明问题, 由于平板表面平整, 则张贴在平板表面的非编码点应当在一定程度上共面。于是, 对这  $1\ 360$  个非编码点进行了空间平面拟合<sup>[10]</sup>。拟合结果如下: 最大偏差为  $0.589 6$ , 最小偏差为  $0.000 6$ , 标准差为  $0.190 5$ 。可见重

建结果是正确的,与拟合平面的最大距离为0.589 6,没有计算失败的飞点出现。

利用本文提出的方法测量了汽车外表面的轮廓特征。首先在汽车表面覆盖一层保鲜薄膜,然后在整个表面粘贴了769个非编码点,布置了127个编码点和两个标尺,如图3(a)所示。一共对场景拍摄了113张照片,采用文中的平差思路对这896个标志点进行了求解。求解后简单去除环境点干扰的结果如图3(b)所示,重投影误差为0.107 1。



(a)张贴有标志点的汽车表面  
(a)Surface with numbers of landmarks



(b)摄影测量计算的空间结果  
(b)Calculation result by photogrammetry

图3 汽车表面标志点的求解

Fig.3 Solution of car surface landmarks

## 5 结 论

本文对大量待求点的光束平差优化进行了研究。在加入相机内参数和约束未知数条件进行逐点法化后,提出了多次平差优化的思路:每次随机选取空间中部分点进行光束平差优化,这样的过程重复数次后即可确定摄像机内参数和图像外参数,然后通过多片前方交会求出所有标志点的空间坐标。实验结果表明,重投影误差可控制在0.11,该方法能够用于标志点求取数目较大的摄影测量场合。

## 参考文献:

- [1] 罗武. 基于非量测相机的近景摄影测量系统[D]. 上海:同济大学,2003.  
LUO W. *The Close-range Photogrammetry System Building with Non-metric Camera* [D]. Shanghai: Tongjing University, 2003. (in Chinese)
- [2] 龚涛. 摄影测量学[M]. 成都:西南交通大学出版社,2014:76-79.  
GONG T. *Photogrammetry* [M]. Chengdu: South-west Jiaotong University Press, 2014:76-79. (in Chinese)
- [3] 王佩军,徐亚明. 摄影测量学[M]. 武汉:武汉大学出版社,2010:103-105.  
WANG P J, XU Y M. *Photo grammetry* [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2010: 103-105. (in Chinese)
- [4] 黄桂平. 数字近景工业摄影测量关键技术研究与应用[D]. 天津:天津大学,2005.  
HUANG G P. *Study on the Key Technologies of Digital Close Range Industrial Photogrammetry and Applications* [D]. Tianjing: Tianjin University, 2005. (in Chinese)
- [5] 郭磊. 现场条件下大空间3D精密定位原理与方法研究[D]. 天津:天津大学,2008.  
GUO L. *Study on Principle and Implementation Method of 3D Precision Positioning in Large Field Working Space* [D]. Tianjin: Tianjin University, 2008. (in Chinese)
- [6] 汤想明. 基于序列图像的标记点三维坐标计算方法研究[D]. 西安:西安科技大学,2009.  
TANG X M. *Research on the Calculation Methods of 3D Coordinates of Marked Points Based on Image Se-*

- quences [D]. Xi'an: Xi'an University of Science and Technology, 2009. (in Chinese)
- [7] 冯其强. 数字工业摄影测量技术研究与实践 [D]. 郑州:解放军信息工程大学, 2010.  
FENG Q Q. *Research and Practice of Digital Industrial Photogrammetry* [D]. Zhenzhou: The PLA Information Engineering University, 2010. (in Chinese)
- [8] 冯鹏飞. 基于稀疏矩阵的自检校光束法平差相机检校研究 [D]. 西安:西安科技大学, 2014.  
FENG P F. *Research on Camera Calibration of Self-calibration Bundle Adjustment Based on Sparse Matrix* [D]. Xi'an: Xi'an University of Science and Technology, 2014. (in Chinese)
- [9] 郑建冬. 基于单数码相机的三维摄影测量理论与关键技术研究 [D]. 南京:南京航空航天大学, 2013.  
ZHENG J D. *Research on the Theory and Key Techniques of 3D Photogrammetry with One Single Hand-held CCD Camera* [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013. (in Chinese)
- [10] 陈基伟. 工业测量数据拟合研究 [D]. 上海:同济大学, 2005.  
CHEN W V. *Research on data fitting in industrial measurement* [D]. Shanghai: Tongji University, 2005. (in Chinese)

## 作者简介:



千勃兴 (1987 -), 男, 博士研究生, 2010年、2013年于西北农林大学分别获得学士、硕士学位, 主要研究方向为光学测量。Email: qianboxing1023@126.com

## 导师简介:



梁 晋 (1968 -), 男, 河南郑州人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事机电控制、机器视觉等方面的研究。E-mail: liangjin@mail.xjtu.edu.cn