一、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分， 共 32 分）

（1）设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是欧氏空间$V$的一组基。$\alpha=\varepsilon_1+\varepsilon_2$。这组基的度量矩阵是$\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&1\\2&-1&6\end{pmatrix}$。则$|\alpha|=$______ .

（2） $A=\begin{pmatrix}3&4&1\\1&2&a\\4&6&2\end{pmatrix}$， $R(A)=2$，则a＝_______ .

（3）$\underline{\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}+a_{21}&a_{12}+a_{22}&a_{13}+a_{23}\\2a_{31}&2a_{32}&2a_{33}\end{pmatrix}$.

（4）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&x&-4\\6&3&-4\end{pmatrix}$和$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$相似 ，则$x=$____.

（5）设 3 阶矩阵A的特征值为−1, 5，2，A^*是A的伴随矩阵，则 A^*的行列式$|A^*|=$_______ .

(6)设线性方程组为$x_1+x_2+x_3+x_4=1$，则其通解为

_________________ .

（7）二次型$f(x,y,z)=ax^2+ay^2+az^2+2xy+2xz+2yz$经过正交变换可化为标准型 $f=3\xi^2$，则 $a=$____ .

（8）设 4 阶方阵$A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$____ .

二、选择题（本题共 9 小题，每小题 4 分， 共 36 分）

（1）n 阶矩阵 A 经过初等行变换得到矩阵 B， 那么下列选项中正确的是（　　）.

(A) A 与 B 有相同的特征值　（B） $AX=b$ 与 $BX=b$ 是同解方程组

（C） A 与 B 的列向量是等价向量组　（D） A 与 B 有相同的特征向量

（2）设 A 为 3 阶矩阵、设 λ_1,λ_2 是两个不同的特征值，α_1,α_2 分别是对应的特征向量，则 $\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件为（　）.

（A） $\lambda_1 \neq 0$　（B） $\lambda_2 \neq 0$　（C） $\lambda_1 = 0$　（D） $\lambda_2 = 0$

（3）记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　).

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换后，得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，(　).

（A）则必有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　（B）则必有 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

（C）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则必有 $|\boldsymbol{B}|=0$　（D）若 $|\boldsymbol{A}|>0$，则必有 $|\boldsymbol{B}|>0$

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n（$n\geqslant 2$）阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，

则（A^*）*=______ .

（A） $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　（B） $|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

（C） $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　（D） $|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

（6）设二次型 $f=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a & -5 & -5 \\ -5 & a & -5 \\ -5 & -5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 f 是正定二次型的充要条件是（　）.

（A）$a>0$　（B）$a>5$　C）$a>10$　（D）$a>25$

（7） n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$线性无关的充分条件是（　　）.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$均不是零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$中任意两个向量的分量不成比例

(C) 向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$的个数$s<n$

(D)某向量β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$线性表示，且表示式唯一

（**8**）设 A 是$m\times n$矩阵，则 Ax=0 有非零解的充分必要条件是（　　）.

（A） m<n

(B) A 的任意两个列向量线性相关

(C) r（A）< m

（D） A 中有列向量能用其余向量线性表出

（9）如果(　　　　)，则矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相似.

（A）$|A|=|B|$　(B) $r(A)=r(\mathrm{B})$　(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征多项式

（D）n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征值且 n 个特征值各不相同

三、解答题（本题共 9 小题，满分 82 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

(1)（9 分）n阶实对称矩阵，且满足$A^2-4A+3I=0$，I为n阶单位阵。证明$A-2I$为正交矩阵.

(2)（9 分）已知$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} h \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$是$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & k & 5 \end{pmatrix}$的特征向量，求$h,k$和$\boldsymbol{\alpha}$的特征值，以及$\boldsymbol{A}$的其它特征值.

(3)（9 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A^*}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}$满足方程$\boldsymbol{ABA^{-1}=BA^{-1}+3I}$，$I$是$n$阶单位矩阵。求$\boldsymbol{B}$.

（4）（9 分）设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax=b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$）两个不同解（$A$ 是 $m\times n$ 矩阵），

ξ 是 $\boldsymbol{Ax=0}$ 的一个非零解，证明

①向量组 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$，线性无关.

②若秩 $A=n-1$，则向量组 $\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关.

(5)（9 分）设 $\boldsymbol{V}$ 是一 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 是 $\boldsymbol{V}$ 中一固定向量.

① 证明 $\boldsymbol{V}_1=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}\}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一子空间；

② 证明 $\boldsymbol{V}_1$ 的维数等于 $n-1$.

（6）（9 分） 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2-2x_3=-1\\ -x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=-1\\ -x_1-x_2+x_3=2\end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出通解.

(7)（9 分）在次数不超过 3 的实系数多项式所成的线性空间 $V=\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}]_3$

中定义线性变换为 $\varphi(f(x))=f(x+1)-f(x)$，求线性变换 φ 在基

$$\alpha_1=1,\alpha_2=x,\alpha_3=\frac{1}{2}x(x-1),\alpha_4=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

（8）（9 分）设 f(x)是一个整系数多项式。 试证：如果 f(0) 与 f(1) 都是奇数，那么 f(x)不能有整数根.

(9)（10 分）设 A 是 n 阶正定矩阵，I 是 n 阶单位矩阵。证明 $|A+I|>1$.

【完】