

一、论述简答题（每小题 5 分，共 20 分）

- 1、论述一元函数的连续与一致连续之间的关系。
- 2、论述一元函数在点 x_0 的极限、左极限、右极限之间的关系。
- 3、论述一元定积分的几何意义。
- 4、论述二元函数的连续、可偏导、可微之间的关系。

二、填空题（每小题 5 分，共 40 分）

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$,

$b = \underline{\hspace{2cm}}$

2、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

3、若 $\frac{\ln x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4、极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

5、定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

6、改变累次积分的次序： $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

7、设 $f'_x(a,b)$ 存在，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+a,b) - f(a-x,b)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

8、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、计算题（每小题 9 分，共 72 分）

1、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$

- 2、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$
- 3、计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n})$.
- 4、设有参数函数 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$
- 5、设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$.
- 6、求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形, 其底边平行于椭圆的长轴, 而使面积最大.
- 7、计算曲线积分 $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 $L: x^2 + y^2 = 1$ (逆时针方向).
- 8、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和.

四、证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

- 1、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.
- 2、设 $f(x)$ 二阶可导, 且在 $(0, a)$ 内某点取到最大值, 对一切 $x \in [0, a]$ 都有 $|f''(x)| \leq m$, m 是常数, 证明: $|f'(0)| + |f'(a)| \leq am$ 。

【完】