

文章编号 1004-924X(2015)04-1070-11

5-U PS/PRPU 冗余驱动并联机床 完整刚度模型及其刚度特性

周 鑫, 许允斗, 姚建涛, 郑魁敬, 赵永生*

(1. 燕山大学 河北省并联机器人与机电系统实验室, 河北 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学 先进锻压成型技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 基于全雅可比矩阵和虚功原理建立了 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床的完整刚度模型。首先基于螺旋理论推导出约束分支中的约束雅可比矩阵; 然后锁定分支中的主动副并利用互易积原理求得驱动雅可比矩阵, 最后提出了冗余驱动雅可比矩阵。利用约束力、驱动力和冗余驱动力与外力的映射关系, 结合虚功原理, 得到系统整体刚度矩阵。考虑虎克铰、轴承等传动部件的轴向变形对分支轴向刚度的影响, 构造了各个分支的轴向刚度模型。借助激光跟踪仪对所建立的刚度模型进行了实验测试。结果表明: 该刚度模型的误差为 2%~5%, 验证了理论分析的可靠性。在此基础上, 以机床的线刚度和角刚度的最小值为刚度性能指标, 分析了其在工作空间内的分布情况。分析显示: 机床线刚度的最小值主要分布在 Y 轴两侧, 角刚度的最小值则主要分布在 $-0.05 \leq z \leq 0.05$ m 和 $-0.11 \leq y \leq -0.05$ m, 因此, 在进行并联机床工具规划时应该尽量避免该区域。文中内容可为并联机床刀具运动轨迹的优化提供参考依据。

关键词: 并联机床; 冗余驱动; 完整刚度模型; 最小刚度分布

中图分类号: TG659 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20152304.1070

Complete stiffness model and stiffness performance of 5-U PS/PRPU redundantly actuated parallel machine tool

ZHOU Xin, XU Yun-dou, YAO Jian-tao, ZHENG Kui-jing, Zhao Yong-sheng*

(1. *Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province,
Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;*

2. *Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and
Science of the Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)*

* *Corresponding author, E-mail: yszhao@ysu.edu.cn*

Abstract: A complete stiffness model of the 5-UPS/PRPU redundantly actuated parallel machine tool was constructed based on the overall Jacobian matrix and the principle of virtual working. Firstly, the Jacobian matrix of a constraint limb was derived by using screw theory; then, the Jacobian matrix of actuations was derived by using the theory of reciprocal screw and by locking actuated joint in each limb; finally, a redundant Jacobian matrix was designed. By using the mapping relationship between constraint forces, actuated forces, redundantly actuated forces and external forces, the complete

收稿日期: 2014-08-09; **修订日期:** 2014-09-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51275439); 国家 973 重点基础研究发展计划资助项目 (No. 2013CB733000); 河北省自然科学基金资助项目 (No. E2012203130, No. E2014203255)

stiffness model of the overall system was obtained combining with the principle of virtual work. Furthermore, by taking the effect of the axial deformation of a universal joint, a spherical joint and some other transmission parts on the linear stiffness of each limb into consideration, the axial line stiffness model of each single limb was constructed. The stiffness model was further validated by a laser tracker. The experiment results show that the error of stiffness model is 2%–5%, which means that the theoretical analysis is acceptable. On this basis, the stiffness performance of the machine tool was evaluated by utilizing the minimum linear/angle stiffness values, the minimum stiffness distribution in the workspace was investigated, and the minimum stiffness area was generalized. It shows that the minimum linear stiffness distributes on both sides of Y-axis, the minimum angle stiffness distributes on the $-0.05 \leq z \leq 0.05$ m and $-0.11 \leq y \leq -0.05$ m, which suggests that the programmer should avoid this area when the trajectory of the Parallel Machine Tool (PMT) is planned. The research provides a theoretical reference for the track programming of the 5-UPS/PRPU redundantly actuated PMT.

Key words: parallel machine tool; actuation redundancy; complete stiffness model; minimum stiffness distribution

1 引言

随着我国能源、国防、运载等行业的发展,基础装备对于关键零部件如水轮机叶轮、核电用封头等提出了更高的要求。不过,传统的三轴数控加工机床很难使这些零部件达到理想的加工精度,许多加工场合都需采用五轴数控机床。然而,由于运动轴个数增多和各轴传动部件及其主被动关节的弱刚性,导致了整个机械系统的刚性降低。因此,有必要建立机床完整的刚度模型,通过分析其刚度性能在工作空间内的分布,帮助数控系统编程人员进行正确的运动规划,以使机床以最佳刚度特性运动,从而一定程度地提高加工精度^[1-2]。

RIZK 等^[3]通过有限元法计算出整体机床刚性,先对每个关键部件建立有限元模型,然后采用子结构法计算整体机床的综合刚性,但是由于某些部件结构复杂,需要模型简化,因此带来了一些不必要的误差。WANG 等^[4]利用雅克比矩阵建立了 6-PSS 机构的静刚度模型,并以特征值为性能指标分析了其静刚度在工作空间下的分布特性。WANG 等^[5-6]根据虚功原理,建立了机床部件子系统的刚度模型,用线性叠加的原理组集得到整体机床的刚度模型,但是建模过程并没有考虑机床的传动部件的刚度。白志富等^[7]分析了球铰刚度并将其抽象成一个特征参数作为支链刚度

的一部分引入到机构的刚度模型里,利用有限元软件验证了该方法的可行性。Wu^[9]等人在利用子结构综合并考虑铰链刚度的基础上,建立了带冗余驱动混联机床总体刚度矩阵,并通过实验进行了验证,但在该模型中,支链同样被简化为空间梁单元。王友渔等^[10-11]构建了 Tricept 和 Trivariant 机器人 UPS 支链和铰链的刚度模型,较为细致地解决了单分支支链的轴向受力问题,但没有对机器人在空间的刚度性能进一步分析。Majon^[12]借助雅克比矩阵,通过引入铰链刚度建立了三平动并联机构 Orthoglide 的刚度模型。综上,对于 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床建立完整的刚度模型并分析该系统在其工作空间的刚度特性分布具有重要意义。

本文利用螺旋理论中的互易积原理^[15],推导出 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机构的全雅可比矩阵,首次提出了冗余驱动雅可比的概念。另外,借助机构全雅可比矩阵以及虚功原理建立了 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床的完整刚度模型。通过考虑主被动关节及其传动部件对分支轴向刚度的影响,构造了完整的单分支轴向刚度模型,并且通过实验验证了该建模方法的准确性。在此基础上,通过研究机床线/角刚度的最小值分布区域,分析了其在工作空间中随位姿的变化规律,并且找到了机床相对“薄弱”的工作区域,为编程人员进行刀具轨迹规划提供了参考。

2 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床简介

5-UPS/PRPU 五自由度冗余驱动并联机床结构如图 1 所示,它由定平台,动平台以及连接定平台与动平台的分支等组成。机床定平台通过 5 个结构完全相同的 UPS 分支以及 1 个 PRPU 分支与动平台相连接,通过控制 5 个 UPS 分支中移动副的伸缩和 1 个 PRPU 分支中第一个移动副在导轨上的移动来实现动平台的位置和姿态,即驱动数目为 6。中间的 PRPU 分支为约束分支(也称为冗余分支),其作用为限制动平台绕其自身法线的转动自由度,使机构的自由度为 5。其中 U、P、S、R 分别表示虎克铰、移动副、球副以及转动副;P 表示主动移动副,主要通过滚珠丝杠/螺母实现。这样就构成了具有冗余驱动特征的 5-UPS/PRPU 五自由度冗余驱动并联机床。

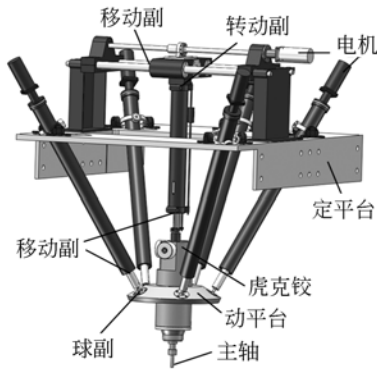


图 1 5-U PS/PRPU 机床模型结构图

Fig. 1 Virtual prototype of 5-U PS/PRPU PMT

为了分析研究方便,在定平台、动平台上分别建立笛卡尔坐标系 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 。设固定坐标系 $\{A\}$ 为参考坐标系。 $A_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 为定平台上虎克铰的中心点, A_2, A_3, A_4, A_5 均布于以 O_A 为圆心,半径为 720 mm 的圆周上, A_1 位于坐标轴 Y_A 上,距原点 O_A 780 mm。 $B_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 为动平台球铰中心点,均布于以原点 O_B 为圆心、半径为 202 mm 的圆周上, B_1 位于坐标轴 Z_B 上。规定绕 X、Y、Z 轴的旋转轴分别为 A、B、C 轴,其方向为右旋螺旋方向。

虎克铰 A_i 在定坐标系下的坐标表示为:

$${}^A P_{A_i} = [{}^A X_{A_i} \quad {}^A Y_{A_i} \quad {}^A Z_{A_i}]^T = [H_i \quad R_i c\theta_i \quad R_i s\theta_i]^T,$$

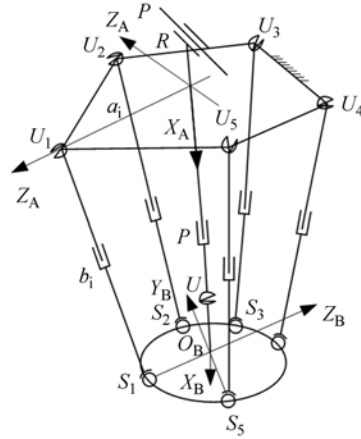


图 2 5-U PS/PRPU 机床结构简图

Fig. 2 Schematic diagram of 5-U PS/PRPU PMT

其中 R_i 为 A_i 到 O_A 的半径, θ_i 为 R_i 与 Y_A 的夹角, H_i 表示 A_i 在定坐标系中的 X 坐标。

动平台球铰 B_i 在动坐标系 $\{B\}$ 中的坐标可表示为:

$${}^B P_{B_i} = [{}^B X_{B_i} \quad {}^B Y_{B_i} \quad {}^B Z_{B_i}]^T = [h_i \quad r_i c\phi_i \quad r_i s\phi_i]^T,$$

其中 r_i 为 B_i 到 O_B 的半径, ϕ_i 为 r_i 与 Y_B 轴的夹角, h_i 为 B_i 在动坐标系中的 X 坐标。

5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床的主要结构参数如表 1 所示。

表 1 机床主要结构参数

Tab. 1 Primary structural parameters of PMT

i	R_i	r_i	h_i/mm	H_i/mm	$\theta_i/(\circ)$	$\phi_i/(\circ)$
1	780	202	0	0	0	-90
2	720	202	0	0	45	-18
3	720	202	0	0	135	54
4	720	202	0	0	225	126
5	720	202	0	0	315	198

若用 ${}^A_B T$ 表示从坐标系 $\{B\}$ 到定坐标系 $\{A\}$ 的变换矩阵,则该机构的运动学反解公式为:

$$l_i = |{}^A P_{B_i} - {}^A P_{A_i}| = |{}^A_B T {}^B P_{B_i} - {}^A P_{A_i}|, i=1, 2, \dots, 5, \quad (1)$$

其中: l_i 表示各个驱动杆的杆长。

3 雅可比矩阵

3.1 约束雅可比

动平台的瞬时速度可以表示 $S_P = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}^T$

下,其中 \boldsymbol{w} 表示动平台的角速度, \boldsymbol{v} 表示动平台上与定坐标系原点重合点的线速度矢量。则动平台的瞬时速度即可表示为:

$$\boldsymbol{S}_P = d_{01} \dot{S}_{01} + \theta_{02} \dot{S}_{02} + d_{03} \dot{S}_{03} + \theta_{04} \dot{S}_{04} + \theta_{05} \dot{S}_{05}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{S}_P = \theta_{i1} \dot{S}_{i1} + \theta_{i2} \dot{S}_{i2} + d_{i3} \dot{S}_{i3} + \theta_{i4} \dot{S}_{i4} + \theta_{i5} \dot{S}_{i5} + \theta_{i6} \dot{S}_{i6}, \quad (3)$$

式中: \dot{S}_{ij} 表示第 i 个分支第 j 个关节的单位运动螺旋,其中当 $i=0$ 时,表示冗余分支,即 PRPU 分支(见图 3);当 $i=1,2 \dots 5$ 时,表示其余的 5 个驱动分支,即 UPS 分支; d_{ij} 表示第 i 个分支第 j 个关节的移动速率; θ_{ij} 表示第 i 个分支第 j 个关节的移动速率。

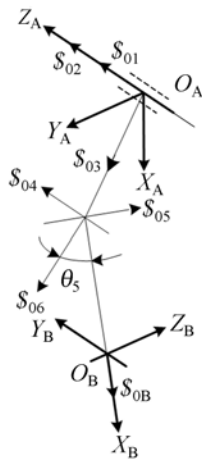


图 3 PRPU 分支坐标系示意图

Fig. 3 Coordinate system of PRPU limb

在动平台运动过程中冗余分支(PRPU 分支)的各个运动螺旋系就可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{S}_{01} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \\ \dot{S}_{02} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \dot{S}_{03} = (0 \ 0 \ 0; l_2 \ m_2 \ 0) \\ \dot{S}_{04} = (0 \ 0 \ 1; p_4 \ q_4 \ 0) \\ \dot{S}_{05} = (l_s \ m_s \ 0; p_5 \ q_5 \ r_5) \end{cases} \quad (4)$$

由螺旋理论互易积原理可以求得与该分支各个运动螺旋均互易的反螺旋,即 PRPU 分支的结构约束力螺旋:

$$\dot{S}_r = (0 \ 0 \ 0; -m_s \ l_s \ 0), \quad (5)$$

式(5)表示沿 U 副中 2 个转动副轴线构成的平面法线(图 3 中的 S_{06} 轴)方向的约束力偶,其中 S_{06} 表示绕动平台法线 X_B 转动的运动螺旋。

式(2)两侧同时用公式(5)做互易积,则:

$$\dot{S}_r \boldsymbol{S}_P = 0, \quad (6)$$

将上式写成矩阵的形式,则有:

$$\boldsymbol{J}_c \boldsymbol{S}_P = 0, \quad (7)$$

其中: \boldsymbol{J}_c 为其约束雅可比矩阵。 \boldsymbol{J}_c 为由冗余分支施加给动平台的约束力偶。由于 UPS 分支并不对动平台提供任何约束作用,因此 \boldsymbol{J}_c 中并不包含各个 UPS 支链中运动副的信息。

3.2 驱动雅可比

首先锁住各个主动关节(移动副),则每个 UPS 分支将会产生一个与所有运动副均互易的约束力,该约束力沿杆长方向,可表示为:

$$\dot{S}_{ai} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_i \\ (\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{l}_i) \times \boldsymbol{S}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_i \\ (\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i) \times \boldsymbol{S}_i \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{S}_i = (\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i) / |\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{B}_i|$, $\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}_i$ 分别表示第 i 个虎克铰与球铰在固定坐标系的方向向量; \boldsymbol{l}_i 表示驱动分支的坐标向量($i=1,2 \dots 5$)。

将式(3)两侧同时用式(8)做互易积,则:

$$\dot{S}_{ai}^T \boldsymbol{S}_P = d_{i3} \quad i=1,2, \dots, 5, \quad (9)$$

则:

$$\boldsymbol{J}_m \boldsymbol{S}_P = \boldsymbol{q}_{i3} \quad i=1,2, \dots, 5, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{J}_m = \begin{bmatrix} [(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1) \times \boldsymbol{S}_1]^T & \boldsymbol{S}_1^T \\ [(\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_2) \times \boldsymbol{S}_2]^T & \boldsymbol{S}_2^T \\ [(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{B}_3) \times \boldsymbol{S}_3]^T & \boldsymbol{S}_3^T \\ [(\boldsymbol{A}_4 + \boldsymbol{B}_4) \times \boldsymbol{S}_4]^T & \boldsymbol{S}_4^T \\ [(\boldsymbol{A}_5 + \boldsymbol{B}_5) \times \boldsymbol{S}_5]^T & \boldsymbol{S}_5^T \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}_{i3} = [d_{12} \ d_{23} \ d_{33} \ d_{43} \ d_{53}]^T$$

式(10)中 \boldsymbol{J}_m 表示非冗余驱动雅可比矩阵,其行向量的物理意义为各个 UPS 分支作用到动平台上的驱动力。

同样地,假定锁定 PRPU 分支的主动 P 副,则该冗余分支也将产生一个约束力,该约束力通过该分支虎克铰中心且平行于主动 P 副轴线,可表示为:

$$\dot{S}_{a6} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_6 \\ \boldsymbol{r}_6 \times \boldsymbol{S}_6 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中: \boldsymbol{r}_6 表示冗余分支虎克铰的坐标向量。将式(2)两侧同时用式(11)做互易积,可得:

$$\dot{S}_{a6}^T \boldsymbol{S}_P = d_{01}, \quad (12)$$

即:

$$\boldsymbol{J}_m \boldsymbol{S}_P = \boldsymbol{q}_{01}, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{J}_m = [\dot{S}_{a6}^T]$$

$$\boldsymbol{q}_{01} = [d_{01}]$$

式(13)中 \mathbf{J}_{ra} 表示冗余驱动雅可比矩阵,其行向量的物理意义为 $\underline{\text{PRPU}}$ 分支作用到动平台上的冗余驱动力。

联合式(7)、(10)和(13),可以得到:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_c \\ \mathbf{J}_{ra} \\ \mathbf{J}_{ra} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中: \mathbf{J} 即为 5- $\underline{\text{UPS}}$ / $\underline{\text{PRPU}}$ 冗余驱动并联机床的全雅可比矩阵。

4 机床完整刚度模型

4.1 冗余驱动并联机构的总体刚度矩阵推导

首先如果机床动平台受到 6 维外力 \mathbf{w} 的作用,该外力螺旋包括动平台的重力及其惯性力和力矩,那么根据动平台的受力平衡条件,可以得到:

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}_{ra}^T \boldsymbol{\tau}_{ra} + \mathbf{J}_{ra}^T \boldsymbol{\tau}_{ra} + \mathbf{J}_c^T \boldsymbol{\tau}_c, \quad (15)$$

其中: $\boldsymbol{\tau}_{ra}$ 、 $\boldsymbol{\tau}_{ra}$ 、 $\boldsymbol{\tau}_c$ 表示非冗余驱动力、冗余驱动力以及约束力的幅值,其大小可以根据下式进行计算:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{ra} = \mathbf{k}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra} \\ \boldsymbol{\tau}_{ra} = \mathbf{k}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra}, \\ \boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{k}_c \Delta \mathbf{q}_c \end{cases}, \quad (16)$$

式中: \mathbf{k}_{ra} 为 5×5 对角阵,其对角线上的元素表示各个 $\underline{\text{UPS}}$ 分支所对应的驱动刚度值,即 $\mathbf{k}_{ra} = \text{diag}^{-1}(k_{a1} k_{a2} K k_{a5})$;

\mathbf{k}_{ra} 为 1×1 对角阵,其对角线上的元素表示各个 $\underline{\text{PRPU}}$ 分支所对应的驱动刚度大小,即 $\mathbf{k}_{ra} = [k_{a5}]$;

\mathbf{k}_c 为 1×1 对角阵,其对角线上的元素表示各个 $\underline{\text{PRPU}}$ 分支所对应的约束刚度大小,即 $\mathbf{k}_c = [k_c]$;

$\Delta \mathbf{q}_{ra}$ 、 $\Delta \mathbf{q}_{ra}$ 、 $\Delta \mathbf{q}_c$ 分别表示由对应非冗余驱动力、冗余驱动力以及约束力所引起的变形组成的列向量。其中 $\Delta \mathbf{q}_{ra} = [\Delta q_{a1} \Delta q_{a2} \Delta q_{a3} \Delta q_{a4} \Delta q_{a5}]$, $\Delta \mathbf{q}_{ra} = [\Delta q_{a5}]$, $\Delta \mathbf{q}_c = [\Delta q_c]$ 。

由虚功原理可以得到动平台的静力平衡方程:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra} + \boldsymbol{\tau}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra} + \boldsymbol{\tau}_c \Delta \mathbf{q}_c, \quad (17)$$

其中: $\mathbf{V} \mathbf{X} = [\mathbf{V} x \mathbf{V} y \mathbf{V} z \mathbf{V} \theta_x \mathbf{V} \theta_y \mathbf{V} \theta_z]^T$, 表示动平台在外力作用下产生的微位移。

根据雅可比矩阵的定义,可以得到动平台的微位移与各个分支的变形满足以下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \mathbf{X} &= \mathbf{J}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra} \\ \mathbf{V} \mathbf{X} &= \mathbf{J}_{ra} \Delta \mathbf{q}_{ra}. \\ \mathbf{V} \mathbf{X} &= \mathbf{J}_c \Delta \mathbf{q}_c \end{aligned} \quad (18)$$

将式(16)、(18)代入式(15)可以得到:

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}_{ra}^T \mathbf{k}_{ra} \mathbf{J}_{ra} \mathbf{V} \mathbf{X} + \mathbf{J}_{ra}^T \mathbf{k}_{ra} \mathbf{J}_{ra} \mathbf{V} \mathbf{X} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{k}_c \mathbf{J}_c \mathbf{V} \mathbf{X}, \quad (19)$$

整理得:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{J}_{ra}^T \mathbf{J}_{ra}^T \mathbf{J}_c^T] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ra} \\ \mathbf{k}_{ra} \\ \mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ra} \\ \mathbf{J}_{ra} \\ \mathbf{J}_c \end{bmatrix} \mathbf{V} \mathbf{X}, \quad (20)$$

即:

$$\mathbf{w} = \mathbf{J}_0^T \mathbf{K}^* \mathbf{J}_0 \mathbf{V} \mathbf{X} = \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{X}, \quad (21)$$

其中: $\mathbf{K} = \mathbf{J}_0^T \mathbf{K}^* \mathbf{J}_0$ (\mathbf{J}_0 即为修改的全雅可比矩阵)。

\mathbf{K} 即为 5- $\underline{\text{UPS}}$ / $\underline{\text{PRPU}}$ 冗余驱动并联机床的整体刚度矩阵。

4.2 各个分支轴向线刚度模型

由于 $\underline{\text{UPS}}$ 分支以及 $\underline{\text{PRPU}}$ 分支主要承受沿杆长方向的力,因此在忽略分支其他作用力的影响下,可将各个分支杆等效为二力杆。经分析,根据 $\underline{\text{UPS}}$ 分支及 $\underline{\text{PRPU}}$ 分支移动驱动部分的具体机械结构,可构造出相应各组件之间等效串联弹

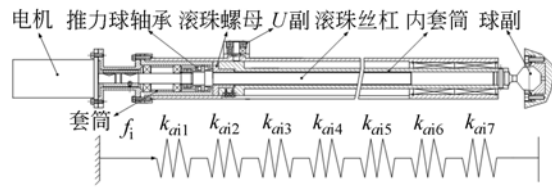


图 4 $\underline{\text{UPS}}$ 分支机械结构简图及其传件线刚度模型图
Fig. 4 Structure and linear stiffness model of transmission components of $\underline{\text{UPS}}$ limb

簧的轴向线刚度模型,如图 4 所示。 $\underline{\text{UPS}}$ 分支轴向线刚度即为:

$$k_{ai} = \sum_{l=1}^7 \frac{1}{k_{ail}} \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad (22)$$

式中: k_{ail} ($l=1, 2 \dots 6$) 分别表示分支的轴套、滚珠丝杠副、轴承、虎克铰、内套以及球铰。

$\underline{\text{PRPU}}$ 分支第一个移动副方向的线刚度为:

$$k_{a5} = \sum_{l=1}^6 \frac{1}{k_{a5l}}, \quad (23)$$

式中: k_{a5l} ($l=1, 2 \dots 5$) 分别表示分支的丝杠套 1、轴承端盖、滚珠丝杠/螺母、丝杠套 2、轴承。

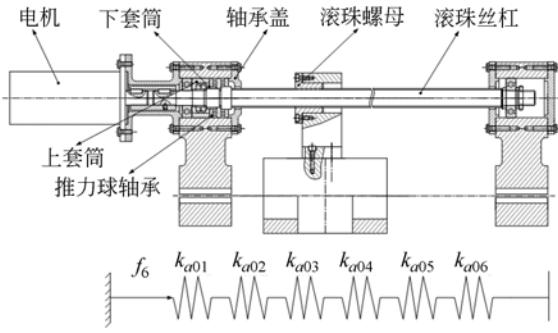


图 5 PRPU 分支机械结构简图及其传动件线刚度模型图
Fig. 5 Structure and linear stiffness model of transmission components of PRPU limb

4.2.1 虎克铰轴向刚度模型

由于将 UPS 分支考虑为二力杆,因此只须分析虎克铰沿分支轴线方向上的线刚度即可。虎克铰结构及其转动副坐标系如图 6 所示。

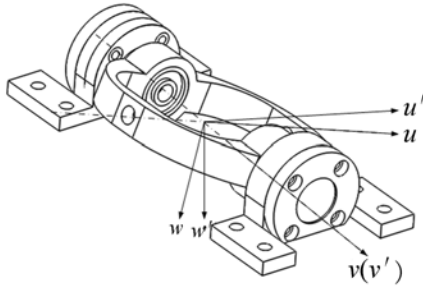


图 6 虎克铰结构及其坐标系示意图
Fig. 6 Structure and coordinate system of U joint

图 6 中, $Ouvw$ 为长轴坐标系, $Ou'v'w'$ 为短轴坐标系。 u 轴与长轴转动副轴线重合, v 轴与短轴转动副轴线重合; v' 轴与 v 轴重合, w' 轴沿分支轴向方向, 并且 w 轴与 u' 轴满足右手定则。 分别定义虎克铰长轴(短轴)沿 u, v, w 轴(u', v', w' 轴)的线刚度为 k_u, k_v 和 k_w ($k_{u'}, k_{v'}$ 和 $k_{w'}$), 表示成为对角阵的形式为:

$$\mathbf{k}_L = \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_w \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_S = \begin{bmatrix} k_{u'} & 0 & 0 \\ 0 & k_{v'} & 0 \\ 0 & 0 & k_{w'} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中: $\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_S$ 分别表示长轴和短轴的线刚度。 如果将长轴坐标系 $Ouvw$ 与短轴坐标系 $Ou'v'w'$ 相对于定坐标系的姿态坐标矩阵分别表示为 $\mathbf{R} = (uvw)$ 和 $\mathbf{R}' = (u'v'w')$, 则根据虎克铰内、外圈刚度的串联关系, 利用弹性势能等效原理, 可以得到:

$$\begin{bmatrix} k_{qu}^{-1} \\ k_{qv}^{-1} \\ k_{qw}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u^{-1} + (u^T R' k_L R'^T u)^{-1} \\ k_v^{-1} + (v^T R' k_L R'^T v)^{-1} \\ k_w^{-1} + (w^T R' k_L R'^T w)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中: k_{quw} 为分支虎克铰沿分支轴向的线刚度大小。

4.2.2 轴承轴向刚度

根据赫兹基础理论, 两个相互接触的接触载荷和弹性趋近量之间的关系可以表示为:

$$\delta = F \left[\frac{9 \sum \rho}{2\pi^2 e^2 E^2 L} \right]^{1/3} Q^{2/3}, \quad (26)$$

其中: $\frac{2}{E} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$; δ 为两接触物体的弹性趋近量, F, L 为第一类、第二类椭圆积分, $\sum \rho$ 为两个相互接触的物体在接触点所在主平面内的曲率和, e 为接触椭圆长短半轴之比, Q 为两接触物体的接触载荷, E 为两接触物体等效弹性模量, E_1, E_2, μ_1, μ_2 分别表示为两个相互接触的物体的弹性模量和泊松比。 通过对 Q 求导, 可以得到赫兹接触刚度:

$$K = 1.5 \left[\frac{\pi e E}{3 F} \right]^{2/3} \left[\frac{2 L}{F \sum \rho} \right]^{1/3} Q^{1/3}. \quad (27)$$

根据相关资料^[13], 在此令球与沟道的接触角为 15° , 接触载荷取 60 N , 利用式(27)可以求得每个球与内、外圈沟道的接触刚度:

$$\left. \begin{aligned} K_{mn} &= 1.5 \left[\frac{\pi e_{mn} E}{3 F_{mn}} \right]^{2/3} \left[\frac{2 L_{mn}}{F_{mn} \sum \rho} \right]^{1/3} Q_i^{1/3} \\ K_{en} &= 1.5 \left[\frac{\pi e_{en} E}{3 F_{en}} \right]^{2/3} \left[\frac{2 L_{en}}{F_{en} \sum \rho} \right]^{1/3} Q_e^{1/3} \end{aligned} \right\}, \quad (28)$$

其中: 下标 m, e, n 分别表示内圈、外圈和第 n 个钢球。

由图(7)可知, 第 n 个钢球与内、外圈沟道接

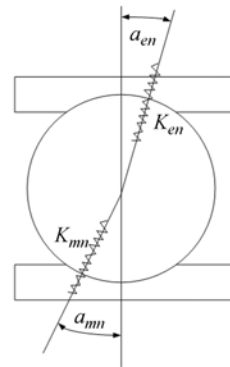


图 7 钢球与内、外圈接触刚度示意图

Fig. 7 Contact stiffness between balls and inner/outer raceway

触刚度的径向分量和轴向分量为:

$$K_{mm} = K_{mi} \cos^2 a_{mi} \quad K_{am} = K_{mi} \sin^2 a_{mi} \quad (29)$$

$$K_{rn} = K_{ni} \cos^2 a_{ni} \quad K_{an} = K_{ni} \sin^2 a_{ni}$$

其中: K_{mm} 、 K_{rn} 表示第 n 个钢球与内、外圈的接触刚度的径向分量; K_{an} 和 K_{am} 则分别表示第 n 个钢球与内、外圈的接触刚度的轴向分量; a_{mi} 和 a_{ni} 分别为第 j 个钢球与内圈、外圈的接触角。

利用轴承中所有 Z 个钢球的接触刚度串联关系,可以得到轴承的轴向刚度 K_a :

$$K_a = \sum_{j=1}^Z \frac{K_{amj} K_{anj}}{K_{amj} + K_{anj}} \quad (30)$$

UPS 分支与 PRPU 分支其他传动部件线刚度值可根据 Workbench 有限元软分析件得到,结果如表 2~4 所示:

表 2 U_{PS} 分支各传动部件等效线刚度

Tab. 2 Linear stiffness of transmission components of U_{PS} ($N \cdot \mu m^{-1}$)

套筒	推力球轴承	丝杠/螺母	球铰	内套筒
5020	100	107.3	590	165

表 3 U_{PS} 分支各传动部件等效线刚度

Tab. 3 Linear stiffness of transmission components of UPS ($N \cdot \mu m^{-1}$)

U 副 k_u	U 副 k_v	U 副 k_w	U 副 $k_{u'}$	U 副 $k_{v'}$	U 副 $k_{w'}$
82	135	64	11 800	59 600	655 000

表 4 PRPU 分支各传动部件等效线刚度

Tab. 4 Linear stiffness of transmission components of PRPU ($N \cdot \mu m^{-1}$)

滚珠/丝杠	上套筒	下套筒	推力球轴承	轴承盖
114	6 190	6 810	100	33 500

4.3 实验验证

机床的初始位姿如图 8 所示。此时,机床动平台中心点坐标为 $(1.019, 0, 0)^T$ m, 姿态为 $(0, 0, 0)^T$, 那么所对应的刚度矩阵可以根据式(20)表示为:

$$K = 10^7 \times \begin{bmatrix} 6.31 & -0.91 & 0.83 & 0.14 & 0.14 & -0.90 \\ -0.91 & 1.17 & -0.14 & -0.23 & 0.001 & 1.54 \\ 0.83 & -0.14 & 5.97 & -0.049 & 0.89 & -0.15 \\ 0.14 & -0.23 & -0.049 & 8.24 & 0.11 & -0.30 \\ 0.14 & 0.001 & -0.89 & 0.11 & 1.32 & 0.014 \\ -0.90 & 1.54 & -0.15 & -0.30 & 0.014 & 2.05 \end{bmatrix}, \quad (31)$$



图 8 机床刚度测量实验

Fig. 8 Experiment of stiffness measurement of PMT

为了验证机床刚度模型的准确性,利用千斤顶作为外载荷输出,通过 6 维力传感器对动平台所受作用力进行检测,使外载大小为已知。利用

AT901-MR 型激光跟踪仪对机床动平台的微位移进行检测。本文以动平台弹性位移为求解目标,通过比较其理论值与实际值的误差大小来衡量刚度模型的准确性。

为了消除重力作用引起的变形,在机床不受千斤顶作用力时首先测量动平台相对于激光干涉仪的初始坐标,当机床受到千斤顶施加的载荷时,通过所测机床动平台坐标与初始坐标做差即可得到动平台由于外力所产生的相对位移;另外,由于激光跟踪仪非常敏感,比较容易受到外界因素(如噪声、振动等)的干扰,因此对每次由外力产生的变形测量 10 次,取平均值,即可得到对应的变形。实验结果如表 5 所示:

表 5 机床在 X 方向的变形

Tab. 5 Deformation in X-axis of PMT (μm)

Δx	F_x (N)			
	71.57	118.84	230.68	273.41
理论值	1.13	1.88	3.65	4.32
实际值	1.24	2.01	3.76	4.41
误差	9.7%	6.9%	3.01%	2.1%

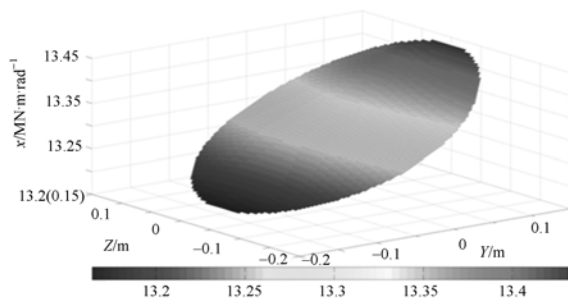
Δx	F_x (N)			
	337.29	351.26	380.60	430.73
理论值	5.35	5.57	6.03	6.83
实际值	5.48	5.79	6.21	7.11
误差	2.4%	3.9%	2.99%	4.1%

由表 5 可知,当外载较小时,理论值与实际值差别较大,该误差可能是由外载作用不明显、人为测量误差以及外界环境等因素造成的;当载荷提高到 200 N 以上时,所测得机床动平台在沿 X 轴方向的位移与真实值差别较小,误差在 2%~5% 左右。机床其他方向上的位移也可根据该方法得到。

综上,由于机床的装配误差以及测量时人为因素的影响,理论计算结果与实际测量结果存在一定误差,但是从整体上看,该误差处于合理范围内,因此,建立的机床整体刚度矩阵合理。

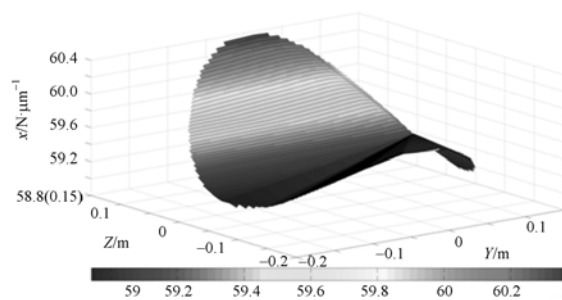
5 机床刚度性能分析

对 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床进行刚度分析,观察其工作空间内线/角刚度的最小值分布情况。根据刚度表达式(20)可知,该冗余驱动并联机床整体刚度不仅与自身固有结构属性有关,其位姿的变化也对其刚度矩阵有着重要影响。对于该 5 自由度并联机床,通过研究其工作空间



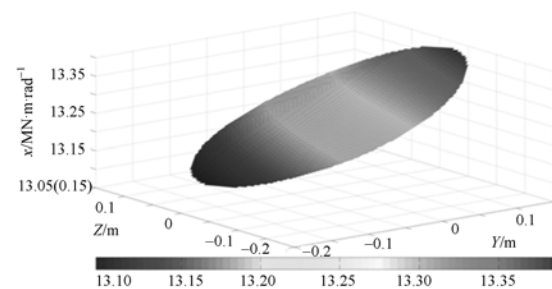
(a-2) $\alpha=0^\circ$ 时, $\beta=0^\circ$ 时最小角刚度分布云图

(a-2) Distribution of minimum angle stiffness when $\alpha=0^\circ, \beta=0^\circ$



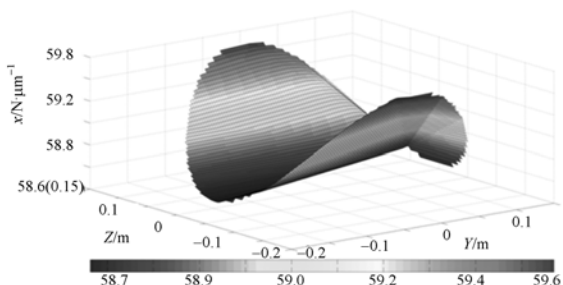
(b-1) $\alpha=0^\circ, \beta=15^\circ$ 时最小线刚度分布云图

(b-1) Distribution of minimum linear stiffness when $\alpha=0^\circ, \beta=15^\circ$



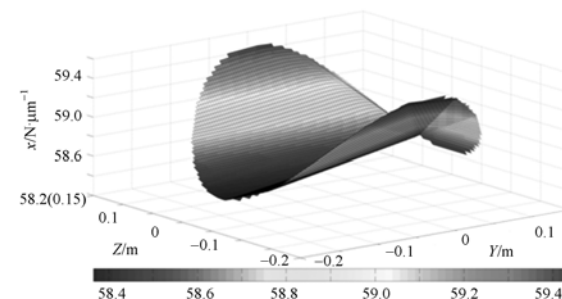
(b-2) $\alpha=0^\circ$ 时, $\beta=15^\circ$ 时最小角刚度分布云图

(b-2) Distribution of minimum angle stiffness when $\alpha=0^\circ, \beta=15^\circ$



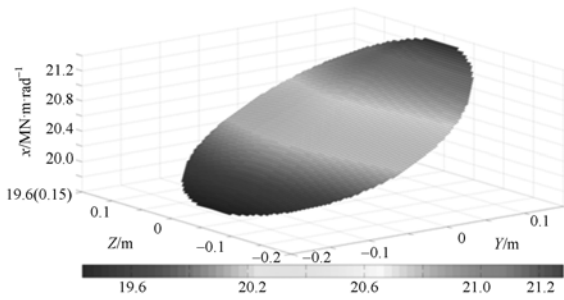
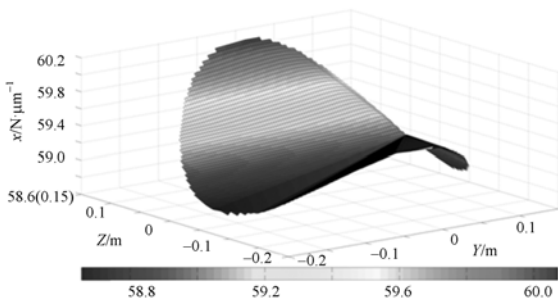
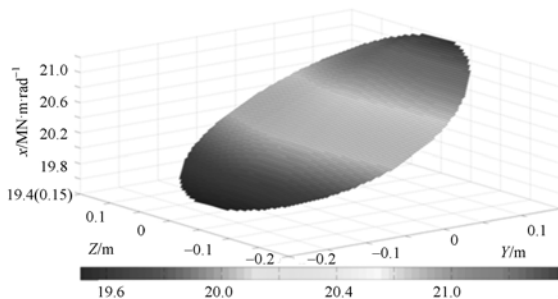
(a-1) $\alpha=0^\circ, \beta=0^\circ$ 时最小线刚度分布云图

(a-1) Distribution of minimum linear stiffness when $\alpha=0^\circ, \beta=0^\circ$



(c-1) $\alpha=15^\circ, \beta=0^\circ$ 时最小线刚度分布云图

(c-1) Distribution of minimum linear stiffness when $\alpha=15^\circ, \beta=0^\circ$

(c-2) $\alpha=15^\circ, \beta=0^\circ$ 时最小角刚度分布云图(c-2) Distribution of minimum angle stiffness when $\alpha=15^\circ, \beta=0^\circ$ (d-1) $\alpha=15^\circ, \beta=15^\circ$ 时最小线刚度分布云图(d-1) Distribution of minimum linear stiffness when $\alpha=15^\circ, \beta=15^\circ$ (d-2) $\alpha=15^\circ, \beta=15^\circ$ 时最小角刚度分布云图(d-2) Distribution of minimum angle stiffness when $\alpha=15^\circ, \beta=15^\circ$ 图 9 机床不同摆角对应的最小线/角刚度分布云图
Fig. 9 Distribution of linear/angle stiffness corresponding to different swing angle

内不同姿态下的最小刚度分布了解其刚度性能有着重要意义,因此通过对摆角 α, β 赋值的变化来说明机床动平台的摆动对其整体刚度性能的影响以及其最小线/角刚度值分布情况。仅以 α 和 β 分别等于 $0^\circ/15^\circ$ 时进行分析说明。图 9(a)~(d) 分别表示 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床在不

同摆角 α 和 β 时所对应的最小线/角刚度在其工作空间内分布情况。

通过对比可知,无论是线刚度还是角刚度的最小值,其分布均关于 Y 轴对称,这与机床结构关于 Y 轴对称相符合;并且,线刚度/角刚度的最小值均出现在工作空间的边缘地带,产生这种现象的原因为工作空间的边缘往往会出现奇异现象。此外,动平台摆角 α 的变化对机床刚度几乎没有影响,而摆角 β 的变化则能够改变机床刚度在其工作空间的分布。不难发现,在 $z=0$ m, $y=-0.13$ m 附近区域,机床的线刚度及角刚度均存在最小值;机床线刚度的最小值主要分布在 $z=0$ m(即沿 Y 轴)的两侧;机床角刚度最小值主要分布在 $-0.05 \leq z \leq 0.05$ m, $-0.11 \leq y \leq -0.05$ m 区域。在这些区域内,机床抵抗外载的能力最弱,容易产生比较大的线/角变形,因此在编程人员进行轨迹规划时,应该尽量规避这一区域。

6 结 论

本文利用螺旋理论互易积原理推导了 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床的约束雅可比矩阵和驱动雅可比矩阵,并且首次提出了冗余驱动雅可比矩阵。利用雅可比矩阵结合虚功原理,通过考虑各个分支中的主/被动运动副及其主要传动部件(套筒、轴承等)的轴向线刚度,建立了机床的完整刚度模型,并且通过实验对该方法的有效性进行了验证。实验结果表明,当载荷在一定范围内变化时,变形的测量误差不超过 5%,因此可以得出使用该方法建立的刚度模型是合理的结论。以最小刚度值为刚度性能评价指标,分析了 5-UPS/PRPU 冗余驱动并联机床最小线/角刚度在其工作空间内的分布情况。通过分析机床最小线/角刚度的分布情况,可以看出机床刚度不受动平台摆角 α 的影响,而摆角 β 的变化则能改变机床刚度在其工作空间的分布。此外机床的线刚度及角刚度均在 $z=0$ m, $y=-0.13$ m 附近的区域存在最小值;机床线刚度的最小值主要分布在 Y 轴两侧,角刚度的最小值则主要分布在 $-0.05 \leq z \leq 0.05$ m, $-0.11 \leq y \leq -0.05$ m 区域。本文的研究可为并联机床刀具运动轨迹的优化提供参考。

参考文献:

- [1] 马立,谢炜,刘波,等. 柔性铰链微定位平台的设计[J]. 光学精密工程, 2014,22(2):338-345.
MA L, XIE W, LIU B, *et al.*. Design of micro-position stage with flexure hinge [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2014, 22(2):338-345.
- [2] 吕帮俊,朱石坚,彭利坤,等. Stewart机构刚度映射建模与仿真[J]. 振动与冲击, 2011,30(4):178-181.
LV B J, ZHU SH J, PENG L K, *et al.*. Stiffness mapping modeling and simulation for Stewart mechanism[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011,30(4):178-181. (in Chinese)
- [3] RIZK R, MUNTEANU M, FAUROUX J C, *et al.*. A comparative stiffness analysis of a reconfigurable parallel machine with three or four degrees of mobility [J]. *Journal of Machine Engineering*, 2006,6(2):45-55.
- [4] WANG D, FAN R, CHEN W Y. Stiffness analysis of a hexaglide parallel loading mechanism [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 70: 454-473.
- [5] WANG J S, WANG L P, LI T M, *et al.*. Study on the stiffness of a 5-DOF hybrid machine tool with actuation redundancy [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009,44(2):289-305.
- [6] LI Y G, LIU H T, ZHAO X M, *et al.*. Design of a 3-DOF PKM module for large structural component machining [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(6): 941-954.
- [7] 白志富,陈五一. 球铰刚度计算模型及靠冗余支链实现并联机床刚度的改善[J]. 机械工程学报, 2006,42(10):142-145.
BAI ZH F, CHEN W Y. Stiffness computation model of spherical joints and PKM's stiffness improvement by redundant leg [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006,42(10):142-145. (in Chinese)
- [8] LAW M, IHLENFELDT S, WABNER M, *et al.*. Position-dependent dynamics and stability of serial-parallel kinematic machines [J]. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2013, 62(1): 375-378.
- [9] WU J, WANG J S, WANG L P, *et al.*. Study on the stiffness of a 5-DOF hybrid machine tool with actuation redundancy [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(2): 289-305.
- [10] 王友渔,黄田,CHETWYND D G,等. Tricept机械手静刚度解析建模方法[J]. 机械工程学报, 2008,44(8):13-19.
WANG Y Y, HUANG T, CHETWYND D G, *et al.*. Analytical method for stiffness modeling of the Tricept robot [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008,44(8):13-19. (in Chinese)
- [11] 王友渔,黄田,梅江平,等. 考虑复杂机架柔性的并联构型装备刚度半解析建模方法[J]. 科学通报, 2008,53(3):364-372.
WANG Y Y, HUANG T, MEI J P, *et al.*. Semi-analytical modeling method for parallel kinematic machines considering the complex frame flexible [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(3): 364-372. (in Chinese)
- [12] MAJOU F, GOSSELIN C, WENGER P, *et al.*. Parametric stiffness analysis of the Orthoglide[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(3): 296-311.
- [13] JONES A. *The Mathematical Theory of Rolling Elements Bearings* [M]. Mechanical Design and Systems Handbook. New York: McGraw-Hill, 1966, 13: 1-76.
- [14] 姚建涛,李立建,窦玉超,等. 大型射电望远镜天线副面调整机构完整刚度模型及微位移分析[J]. 机械工程学报, 2013,49(21):44-53.
YAO J T, LI L J, DOU Y CH, *et al.*. Complete stiffness model and micro-displacement analysis for large radiotelescope antenna subreflector adjusting mechanism [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2013,49(21):44-53. (in Chinese)
- [15] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
HUANG ZH, ZHAO Y SH, ZHAO T SH. *Advanced Spatial Mechanism* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese)

[16] KIM J J, CHOI Y M, AHN D, *et al.*. A millimeter range flexure based nano position stage using a self-guided displacement

amplification mechanism [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 50(4):109-120.

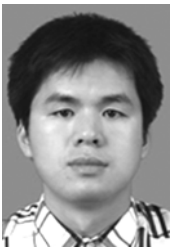
作者简介:



周 鑫(1988—),男,河北石家庄人,博士研究生,2010年于燕山大学获得学士学位,主要从事机器人技术及应用等方面的研究。E-mail: zhouxin@ysu.edu.cn



赵永生(1962—),男,吉林龙井人,教授,博士生导师,1987年于东北重型机械学院获硕士学位,1999年于燕山大学获博士学位,主要从事机器人技术,传感器技术,先进制造技术等方面的研究。E-mail: yszhao@ysu.edu.cn



许允斗(1985—),男,浙江温州人,讲师,研究生导师,2007年、2012年于燕山大学分别获得学士、博士学位。主要从事锻造操作机技术、并联机器人技术及应用等方面的研究。E-mail: ydxu@ysu.edu.cn

(版权所有 未经许可 不得转载)