第 23 卷　第 2 期
2015 年 2 月

光学 精密工程
Optics and Precision Engineering

Vol. 23　No. 2
Feb. 2015

文章编号　1004-924X(2015)02-0467-10

双质量振动式硅微陀螺理论和实验模态分析

姜劭栋，苏　岩，施　芹，裘安萍*
（南京理工大学 机械工程学院，江苏 南京 210094）

摘要：考虑硅微陀螺的设计和结构优化，研究了陀螺固有频率及模态对其性能的影响。针对本课题组研制的双质量振动式硅微陀螺，利用能量法建立了固有频率的理论公式，对硅微陀螺的低阶模态进行了理论分析，并利用有限元仿真和实验对理论分析结果进行了验证。结果显示：理论分析结果与仿真结果的最大误差为 8.6%，与实验结果的最大误差为 10.6%。利用 Allan 方差分析法对陀螺进行了静态性能实验，结果显示其角度随机游走为 0.0578(°)/hr$^{\frac{1}{2}}$，零偏不稳定性为 0.459(°)/hr。与传统的单纯依靠有限元仿真的模态定阶相比，本文建立的理论模型可以省略繁琐的结构参数调整过程，更高效地完成陀螺模态定阶，而且可用于陀螺的结构优化过程。

关　键　词：双质量振动式硅微陀螺；固有频率；能量法；模态
中图分类号：V666.123；TP273　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.3788/OPE.20152302.0467

Theory and experimental modal analysis of dual-mass vibrating silicon micro-gyroscope

JIANG Shao-dong, SU Yan, SHI Qin, QIU An-ping*

(*School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)
* *Corresponding author, E-mail: apqiu@mail.njust.edu.cn*

Abstract: For designing silicon micro-gyroscopes and optimizing their structures, the effects of intrinsic frequency and modal of a silicon micro-gyroscope on its performance were researched. On the basis of energy theorem, a theoretical formula of the intrinsic frequency was established, and the lowest frequency mode of the dual-mass vibrating silicon micro-gyroscope was analyzed. Then the analytical results were validated by the Finite Element Method (FEM) simulation and the experiment. Analysis results show that the largest analytical errors with respect to simulation and experiment are 8.6% and 10.6%, respectively. Moreover, the Allan Variance analysis was used to conduct a static performance experiment, and the results demonstrate that the Angle Random Walk (ARW) is 0.057 8(°)/hr$^{\frac{1}{2}}$ and the measured bias instability is 0.459(°)/hr. As compared with the traditional modal ordering method depending on the FEM, the proposed theoretical model avoids complex structure parameter adjustment processing, complements modal ordering of the silicon micro-gyroscope and can be used in the structure optimization of the silicon micro-gyroscope.

收稿日期：2014-05-20；**修订日期**：2014-06-27.
基金项目：国家 863 高技术研究发展计划资助项目(No. 2011AA040402)；武器装备预研基金资助项目(No. 9140A09011011BQ02)；江苏省科研创新计划资助项目(No. CXZZ13-0197)

Key words: dual-mass vibrating silicon micro-gyroscope; dynamic eigen frequency; energy theorem; modal

1 引 言

硅微陀螺是用来测量物体角速率的惯性传感器。与传统陀螺相比，该类传感器在价格、尺寸以及可靠性等方面均有巨大优势。而且，硅微陀螺可与其外围测控电路集成在同一芯片上，实现整表的批量生产。因此硅微陀螺在航海、定位、导航等领域具有巨大的应用潜力[1-2]。

硅微陀螺的模态定阶工作非常困难。以双质量振动式硅微陀螺为例，忽略各梁系的质量，且认为质量块为刚性，则每个质量块具有3个线自由度和3个转动自由度，所以双质量振动式硅微陀螺至少具有12个动力学模态[6]。驱动模态和检测模态直接决定了陀螺的灵敏度、带宽和偏置稳定性等[7]，但是干扰模态对陀螺的性能也有重要影响。首先，陀螺的抗振动性能非常重要。通常外界振动激励的频率均小于2 000 Hz[8]。为了降低外界环境对陀螺输出的影响，陀螺第一阶模态的固有频率必须要大于2 000 Hz。其次，音叉陀螺(TFG)利用两质量块的相向振动来抵消振动误差。但Yoon的研究发现，同向振动模态和相向振动模态均是TFG产生振动误差的原因[9]。正交耦合误差是陀螺的另一性能指标。正交耦合误差可分为直接耦合误差和二次耦合误差[3]，直接耦合误差可以通过陀螺结构设计予以消除；但是当存在加工误差时，二次耦合误差是无法避免的。驱动运动通过绕z轴同向和相向模态耦合到检测方向，严重影响陀螺的正常输出。陀螺各模态对其性能有如此重要的影响，所以建立陀螺各模态固有频率的理论公式是非常必要的。

国内外研究人员已经对硅微陀螺的模态提出了一些分析方法。Fedder建立了双端固支梁、蟹脚梁、折叠梁等的刚度公式[10]。Iyer建立了z轴CMOS-MEMS陀螺的刚度矩阵[11]。M'Closkey提出一种利用输入、输出数据对陀螺进行模态参数识别的方法[12]。Weinberg推导了Draper实验室音叉陀螺驱动模态和检测模态固有频率的理论公式[6]，李锦明推导了一种解耦电容式硅微陀螺驱动模态和检测模态固有频率的理论公式[13]。但是这些研究均没有涉及硅微陀螺的干扰模态。本文利用能量法[14]对双质量振动式硅微陀螺的低阶模态展开理论分析，并对理论分析结果进行了仿真验证和实验验证。

2 理论模态分析

双质量振动式硅微陀螺的结构如图1所示[3]。整个活动结构通过支撑梁与锚点相连，并悬浮在基底上。两质量块在静电力的驱动下沿x轴相向振动，称为驱动模态。当有沿z轴的角速率输入时，在科氏力的作用下，两质量块沿y轴相向振动，称为检测模态。检测模态的振幅与输入角速率成正比，所以通过测量检测模态的振幅可以测得输入角速率[4-5]。本课题组研制的双质量振动式硅微陀螺的性能指标为：动态量程大于300 (°)/s，比例因子稳定性小于100×10^{-6}，角度随机游走小于0.06 (°)/$\sqrt{\text{hr}}$，偏置不稳定性小于0.5 (°)/hr。

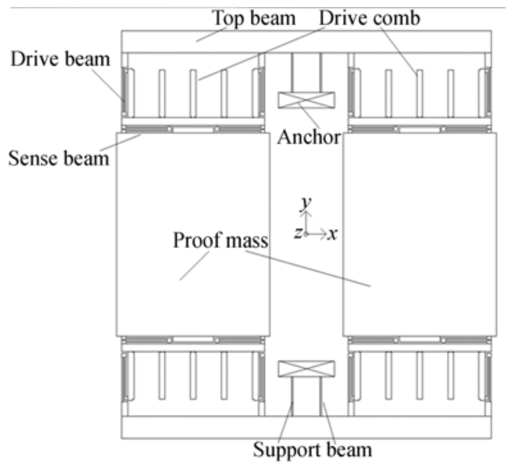


图1 双质量振动式硅微陀螺结构示意图

Fig. 1 Schematic of dual-mass vibrating silicon micro-gyroscope

硅微陀螺的模态可以简化成弹簧-质量块系统，其固有频率可以表示为：

$$f_i=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_i}{M_i}}, \tag{1}$$

其中：K_i为等效刚度，M_i为等效质量。双质量振动式硅微陀螺低阶模态等效刚度和等效质量的求

解过程如下。

2.1　绕 y 轴模态

绕 y 轴模态的位移云图如图 2 所示,两质量块绕 y 轴同方向转动。在此运动中顶梁和支撑梁起主要作用,驱动梁和检测梁的影响可以忽略。绕 y 轴模态的等效刚度和等效质量分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\phi_y} &= 2k_{\phi_y tsu} \\ \mathbf{M}_{\phi_y} &= \mathbf{J}_y \end{aligned}, \tag{2}$$

其中:$k_{\phi_y tsu}$是顶梁和支撑梁组成的组合梁系绕 y 轴的刚度,$\mathbf{J}_y$ 是单个质量块对 y 轴的转动惯量。

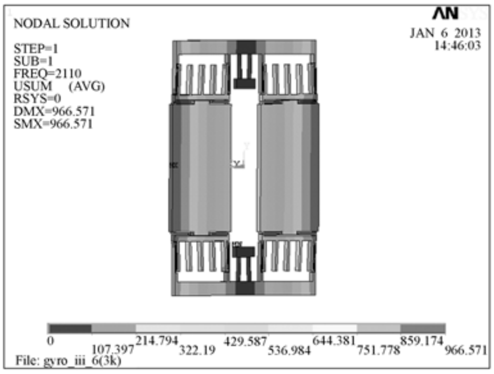


图 2　绕 y 轴模态的位移云图

Fig. 2　Displacement nephogram of y-axis rotational mode

利用能量法求 $k_{\phi_y tsu}$。顶梁和支撑梁的结构参数如图 3 所示,a 和 b 是驱动梁与顶梁的链接处,c 是顶梁的中心。沿 y 轴的弯矩 $\mathbf{M}_y$ 作用在 a 和 b 处,沿 x 轴的扭矩 $\mathbf{T}_{xc}$ 和沿 z 轴的力 $\mathbf{F}_{zc}$ 作用在 c 处。

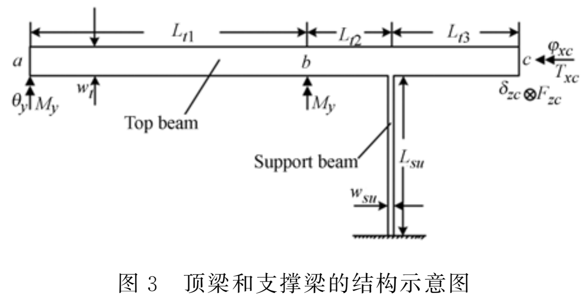


图 3　顶梁和支撑梁的结构示意图

Fig. 3　Schematic of top beam and support beam

顶梁和支撑梁的弯矩和扭矩如表 1 所示,其中 x 沿各段梁的长度方向。根据能量法,a 处截面绕 y 轴的转角 θ_y,c 处截面绕 x 轴的转角 φ_{xc} 和沿 x 轴的位移 δ_{zc} 分别为:

$$\theta_y = \int_0^{L_{t1}} \frac{\mathbf{M}_{t1}}{E I_{yt}} \mathrm{d}x + \int_0^{L_{t2}} \frac{\mathbf{M}_{t2}}{E I_{yt}} \mathrm{d}x + \int_{0}^{L_{su}} \frac{\mathbf{T}_{su}}{G I_{psu}} \mathrm{d}x , \tag{3}$$

$$\varphi_{xc} = \int_0^{L_{t3}} \frac{\mathbf{T}_{t3}}{G I_{pt}} \mathrm{d}x + \int_0^{L_{su}} \frac{\mathbf{M}_{su}}{S \mathbf{I}_{xsu}} \mathrm{d}x , \tag{4}$$

$$\delta_{zc} = \int_0^{L_{t3}} \frac{\mathbf{M}_{t3}}{E\mathbf{I}_{yt}} x \mathrm{d}x + \int_0^{L_{su}} \left(\frac{\mathbf{M}_{su}}{E\mathbf{I}_{xsu}} x + \frac{\mathbf{T}_{su}}{G I_{psu}} L_{t3} \right) \mathrm{d}x, \tag{5}$$

其中:E 为杨氏模量,G 为剪切模量,$\mathbf{I}_{ji} = w_i h^3/12$ ($j = x, y, z; i = t, su, f, g$)为截面关于 j 轴的惯性矩。$\mathbf{I}_{pi} = \alpha_i \mathrm{Min}^3[w_i, h]\mathrm{Max}[w_i, h]$ ($i = t, su, f, g$)是截面的极惯性矩,h 是结构的厚度,α_i 是矩形截面梁的扭转系数[15]。c 是对称中心,所以 $\varphi_{xc} = 0$ 且 $\delta_{zc} = 0$。又有 $k_{\phi_y tsu} = 2M_y/\theta_y$,联立式(2)~(5),得到绕 y 轴模态的固有频率为:

$$f_{\phi_y} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{L_{t1} + 2L_{t2}}{E\mathbf{I}_{yt}} + \frac{2L_{su}^2 (4E\mathbf{I}_{xsu} L_{t3} + G\mathbf{I}_{pt} L_{su})}{G\mathbf{I}_{pt}(G\mathbf{I}_{psu} L_{su}^2 + 12E\mathbf{I}_{xsu} L_{t3}^2)} \right) \mathbf{J}_y}} . \tag{6}$$

表 1　顶梁、支撑梁的弯矩和扭矩

Tab. 1　Bending moments and torsions of top beam and support beam

梁	t_1	t_2	t_3	su
弯矩($\mathbf{M}_i$)	$\mathbf{M}_y$	$2\mathbf{M}_y$	$\mathbf{F}_{zc} x$	$\mathbf{F}_{zc} x + \mathbf{T}_{xc}$
扭矩($\mathbf{T}_i$)	0	0	$\mathbf{T}_{xc}$	$2\mathbf{M}_y + \mathbf{F}_{zc} L_{t3}$

2.2　z 轴模态

z 轴模态可看作是 2 个质量块沿 z 轴同向运动,如图 4 所示。求得此运动的位移,便可求得 z 轴模态的等效刚度:

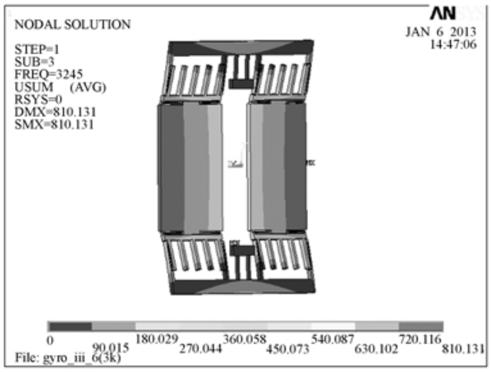


图 4　z 轴模态位移云图

Fig. 4　Displacement nephogram of z-axis mode

$$\mathbf{K}_z=\frac{4\mathbf{F}_z}{\delta_z}\ ,\qquad (7)$$
$$\mathbf{M}_z=m_{\mathrm{d}}$$

其中：$\mathbf{F}_z$ 为沿 z 轴的力，δ_z 为沿 z 轴的位移，m_{d} 为驱动质量块的质量。z 轴模态的位移由 3 部分组成：

$$\delta_z=\delta_{z1}+\delta_{z2}+\delta_{z3}\ ,\qquad (8)$$

其中：δ_{z1} 为由顶梁和支撑梁沿 z 轴方向发生形变所产生的位移，δ_{z2} 为由顶梁和支撑梁沿 x 轴方向发生扭转形变所产生的位移，δ_{z3} 为由驱动梁和检测梁构成的等效蟹脚梁沿 z 轴方向发生形变所产生的位移。分别求解这 3 部分位移。

1）顶梁和支撑梁沿 z 轴形变产生的位移

顶梁和支撑梁沿 z 轴方向发生形变所产生的位移可以看作为 a 和 b 两处沿 z 轴方向位移的平均值：

$$\delta_{z1}=\frac{1}{2}(\delta_{za}+\delta_{zb})\ ,\qquad (9)$$

其中：δ_{za} 和 δ_{zb} 分别是 a 和 b 两处沿 z 轴方向的位移。顶梁和支撑梁受力如图 5 所示，$\mathbf{M}_{yc}$ 和 ψ_{yc} 分别表示 c 处沿 y 轴方向的弯矩和角位移。顶梁和支撑梁的弯矩和扭矩如表 2 所示。

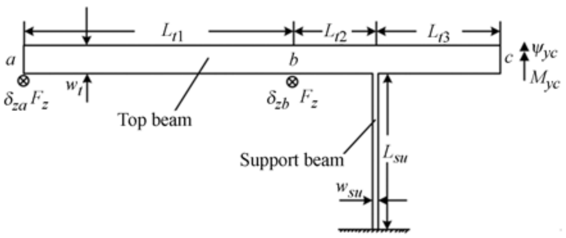


图 5　顶梁和支撑梁受力图

Fig. 5　Force diagram of top beam and support beam

根据单位载荷法可求得 δ_{za}、δ_{zb} 和 ψ_{yc}。

$$\delta_{za}=\int_0^{L_{t1}}\frac{\mathbf{M}_{t1}x}{E\mathbf{I}_{yt}}\mathrm{d}x+\int_0^{L_{t2}}\frac{\mathbf{M}_{t2}(x+L_{t1})}{E\mathbf{I}_{yt}}\mathrm{d}x+\int_0^{L_{su}}\left[\frac{\mathbf{M}_{su}x}{E\mathbf{I}_{xsu}}+\frac{\mathbf{T}_{su}(L_{t1}+L_{t2})}{G\mathbf{I}_{psu}}\right]\mathrm{d}x\ ,\qquad (10)$$

$$\delta_{zb}=\int_0^{L_{t2}}\frac{\mathbf{M}_{t2}x}{E\mathbf{I}_{yt}}\mathrm{d}x+\int_0^{L_{su}}\left[\frac{\mathbf{M}_{su}x}{E\mathbf{I}_{xsu}}+\frac{\mathbf{T}_{su}L_{t2}}{G\mathbf{I}_{psu}}\right]\mathrm{d}x\ ,\qquad (11)$$

$$\psi_{yc}=\int_0^{L_{t3}}\frac{\mathbf{M}_{t3}}{E\mathbf{I}_{yt}}\mathrm{d}x+\int_0^{L_{su}}\frac{-\mathbf{T}_{su}}{G\mathbf{I}_{psu}}\mathrm{d}x\ ,\qquad (12)$$

因为 c 为对称中心，所以有 $\psi_{yc}=0$。联立式（10）～（12）有：

$$\delta_{za}=\frac{1}{6}\mathbf{F}_z\left(\frac{4L_{su}^3}{E\mathbf{I}_{xsu}}+\frac{2L_{t1}^3+6L_{t1}^2L_{t2}+9L_{t1}L_{t2}^2+6L_{t1}^2L_{t3}+18L_{t1}L_{t2}L_{t3}}{E\mathbf{I}_{yt}}\right),\qquad (13)$$

$$\delta_{zb}=F_z\left(\frac{4\mathbf{I}_{yt}L_{su}^3+\mathbf{I}_{xsu}L_{t2}(3L_{t1}(L_{t2}+2L_{t3})+4L_{t2}(L_{t2}+3L_{t3}))}{6E\mathbf{I}_{xsu}\mathbf{I}_{yt}}\right).\qquad (14)$$

表 2　顶梁、支撑梁的弯矩和扭矩

Tab. 2　Bending moments and torsions of top beam and support beam

梁	t_1	t_2	t_3	su
弯矩（M_i）	$\mathbf{F}_z x$	$\mathbf{F}_z(L_{t1}+2x)$	$\mathbf{M}_{yc}$	$2\mathbf{F}_z x$
扭矩（$\mathbf{T}_i$）	0	0	0	$\mathbf{F}_z(L_{t1}+2L_{t2})-\mathbf{M}_{yc}$

2）顶梁和支撑梁沿 x 轴扭转产生的位移

顶梁和支撑梁沿 x 轴方向的扭转形变所产生的位移可表示为：

$$\delta_{z2}=\theta_x L\ ,\qquad (15)$$

其中：θ_x 为顶梁沿 x 轴的角位移，L 为质量块中心到顶梁的距离。根据图 5，利用能量法可得：

$$\theta_x=\int_0^{L_{su}}\frac{\mathbf{M}_{su}}{E\mathbf{I}_{xsu}}\mathrm{d}x=\frac{\mathbf{F}_z L_{su}^2}{E\mathbf{I}_{xsu}}.\qquad (16)$$

3）等效蟹脚梁沿 z 轴形变产生的位移

由驱动梁和检测梁构成的等效蟹脚梁沿 z 轴方向的形变所产生的位移可表示为：

$$\delta_{z3}=\frac{\mathbf{F}_z}{k_{zL}}\ ,\qquad (17)$$

其中：k_{zL} 为等效蟹脚梁沿 z 轴方向的刚度。驱动梁和检测梁的结构参数如图 6 所示。

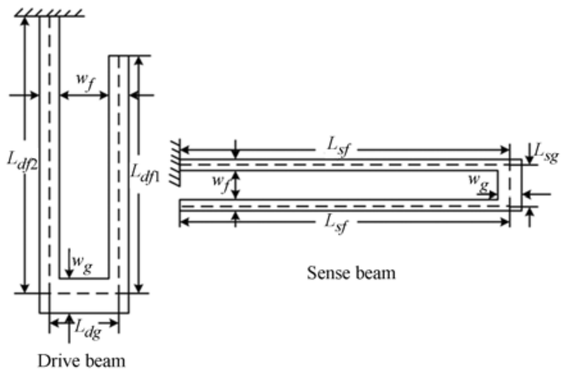


图 6　驱动梁和检测梁结构示意图

Fig. 6　Schematic of drive beam and sense beam

根据 U 型梁的刚度公式[10]，驱动梁和检测梁沿 z 轴方向的刚度为：

$$k_{zd}=\frac{12\boldsymbol{EGI}_{xf}\boldsymbol{I}_{pf}\boldsymbol{I}_{pg}(L_{df1}+L_{df2})}{4\boldsymbol{EI}_{xf}L_{dg}(\boldsymbol{I}_{pf}(L_{df1}^3+L_{df2}^3)+3\boldsymbol{I}_{pg}L_{df1}L_{df2}L_{dg})+\boldsymbol{GI}_{pf}i_{pg}(L_{df1}^4+4L_{df1}^3L_{df2}-6L_{df1}^2L_{df2}^2+4L_{df1}L_{df2}^3+L_{df2}^4)},\tag{18}$$

$$k_{zs}=\frac{6EG\boldsymbol{I}_{xf}\boldsymbol{I}_{pf}(2G\boldsymbol{I}_{pg}L_{sf}+\boldsymbol{EI}_{xf}L_{sg})}{2G^2\boldsymbol{I}_{pf}\boldsymbol{I}_{pg}L_{sf}^4+2EG\boldsymbol{I}_{xf}L_{sg}L_{sf}^2(2\boldsymbol{I}_{pf}L_{sf}+3\boldsymbol{I}_{pg}L_{sg})}.\tag{19}$$

图 7 所示为蟹脚梁的结构。根据刚度等效原则，并结合双端固支梁的刚度公式[11]，驱动梁和检测梁可分别等效为蟹脚梁的 n 梁和 m 梁。则蟹脚梁的梁长可表示为：

$$L_m=\sqrt[3]{\frac{Ew_f b^3}{k_{zs}}},L_n=\sqrt[3]{\frac{Ew_f b^3}{k_{zd}}}.\tag{20}$$

因此可得蟹脚梁沿 z 轴方向的刚度为[10]

$$k_{zL}=\frac{12(GI_{pf}L_m+EI_{xf}L_n)(EI_{xf}L_m+GI_{pf}L_n)}{4EI_{xf}L_mL_n(L_m^3+L_n^3)+GI_{pf}(L_m^5+4L_m^3L_n^2+4L_m^2L_n^3+L_n^5)}.\tag{21}$$

联立式(7)～(21)，解得 z 轴模态的固有频率为：

$$f_z=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\{4EI_{xf}L_mL_n(L_m^3+L_n^3)+GI_{pf}(L_m^5+4L_m^3L_n^2+4L_m^2L_n^3+L_n^5)}{(GI_{pf}L_m+EI_{xf}L_n)(EI_{xf}L_m+GI_{pf}L_n)+\frac{12LL_{su}^2}{EI_{xsu}}+\frac{2}{EI_{xsu}I_{yt}}(4I_{yt}L_{su}^3+I_{xsu}(L_{t1}^3+3L_{t1}^2(L_{t2}+L_{t3})+6L_{t1}L_{t2}(L_{t2}+2L_{t3})+2L_{t2}^2(L_{t2}+3L_{t3})))\}m_d}},\tag{22}$$

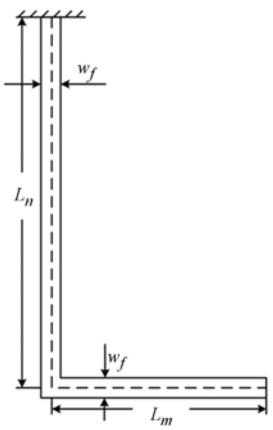


图 7　蟹脚梁结构示意图

Fig. 7　Schematic of crab-leg beam

2.3　驱动模态

驱动模态中，两质量块沿 x 轴相向运动。此运动关于 y 轴对称，故只有驱动梁参与了运动，如图 8 所示。所以驱动模态的等效刚度和等效质量分别为：

$$\begin{aligned}K_d&=4k_{xd}\\M_d&=m_d\end{aligned},\tag{23}$$

其中：k_{xd} 为驱动梁沿 x 轴方向的刚度，根据参考文献[3]，其简化公式为：

$$k_{xd}=\frac{12EI_{zf}}{L_{df1}^3+L_{df2}^3},\tag{24}$$

所以驱动模态的固有频率为：

$$f_d=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3EI_{zf}}{(L_{df1}^3+L_{df2}^3)m_d}}.\tag{25}$$

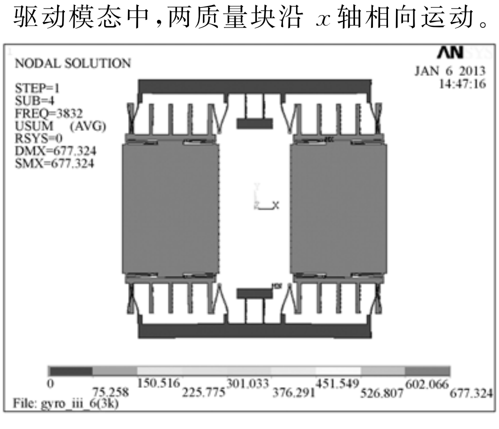


图 8　驱动模态位移云图

Fig. 8　Displacement nephogram of drive mode

2.4　x 轴同向模态

x 轴同向模态中，两质量块沿 x 轴同向运动，如图 9 所示。除驱动梁外，支撑梁也参与了运动，并且支撑梁与驱动梁为串联关系。根据弹簧刚度

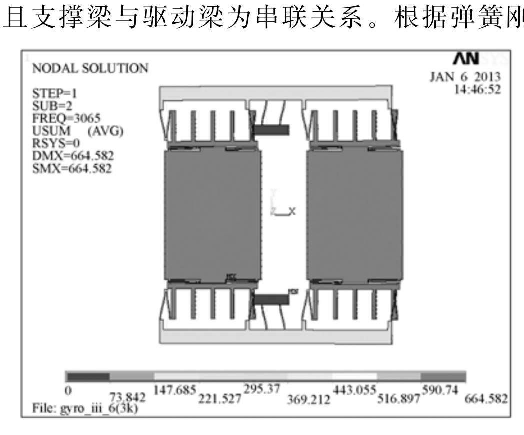


图 9　x 轴同向模态位移云图

Fig. 9　Displacement nephogram of x-axis in phase mode

的串并联理论，可得 x 轴同向模态的等效刚度和等效质量分别为：

$$K_{xi}=\frac{4k_{xd}k_{xsu}}{(2k_{xd}+k_{xsu})},\quad M_{xi}=m_d \tag{26}$$

其中：k_{xsu} 为支撑梁沿 x 轴方向的刚度。根据双端固支梁的刚度公式[11]，$k_{xsu}=12EI_{zsu}/L_{su}{}^3$。故 x 轴同向模态的固有频率为：

$$f_{xi}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3EI_{zf}I_{zsu}}{(2I_{zf}L_{su}^3+I_{zsu}(L_{df1}^3+L_{df2}^3))m_d}}. \tag{27}$$

2.5　y轴同向模态

y 轴同向模态中，两质量块沿 y 轴同向运动，如图10所示。

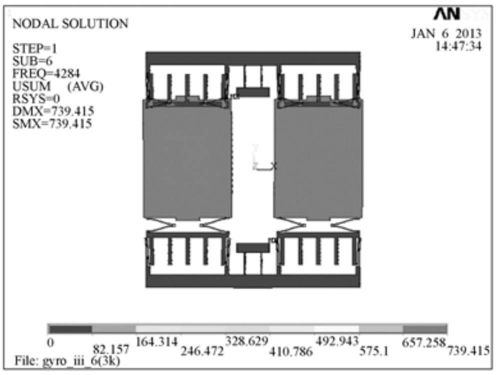


图10　y 轴同向模态位移云图

Fig. 10　Displacement nephogram of y-axis in phase mode

与驱动模态类似，此运动关于 y 轴对称，故只有检测梁参与运动。所以 y 轴同向模态的等效刚度和等效质量可表示为：

$$K_{yi}=4k_{ys},\quad M_{yi}=m_s \tag{28}$$

其中：m_s 为检测质量，k_{ys} 为检测梁沿 y 轴方向的刚度。根据参考文献[3]，有：

$$k_{ys}=\frac{6EI_{zf}}{L_{sf}^3}, \tag{29}$$

y 轴同向模态的固有频率为：

$$F_{yi}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6EI_{zf}}{L_{sf}^3m_s}}. \tag{30}$$

2.6　检测模态

检测模态中，两质量块沿 y 轴相向运动，如图11所示。除检测梁外，顶梁和支撑梁也参与运动。顶梁和支撑梁组成的组合梁系与检测梁为串联关系。检测模态的等效刚度和等效质量为：

$$K_s=\frac{4k_{ys}k_{ytsu}}{(2k_{ys}+k_{ytsu})}.\quad M_s=m_s \tag{31}$$

组合梁系的受力如图12所示。沿 y 轴的力 $\boldsymbol{F}_y$ 分别作用在 a 和 b 处，沿 y 轴的力 $\boldsymbol{F}_{yc}$ 作用在 c 处。组合梁系所受的弯矩如表3所示。由能量法

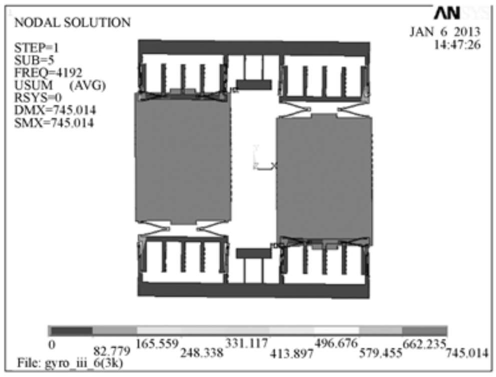


图11　检测模态位移云图

Fig. 11　Displacement nephogram of sense mode

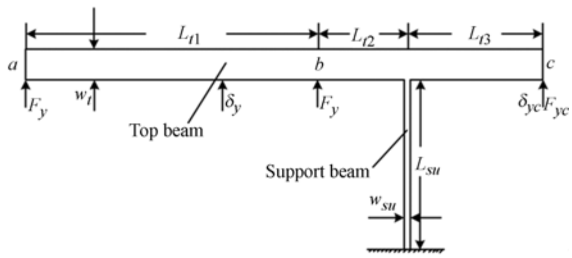


图12　顶梁、支撑梁受力图

Fig. 12　Force diagram of top beam and support beam

可得的 a、b 的中点沿 y 轴方向的位移 δ_y 和 c 处沿 y 轴方向的位移 δ_{yc} 分别为：

$$\delta_{yc}=\int_0^{L_{t3}}\frac{\boldsymbol{M}_{t3}}{E\boldsymbol{I}_{zt}}x\,dt+\int_0^{L_{su}}\frac{\boldsymbol{M}_{su}}{E\boldsymbol{I}_{zsu}}(-L_{t3})\,dt, \tag{32}$$

$$\delta_y=\int_{\frac{L_{t1}}{2}}^{L_{t1}}\frac{\boldsymbol{M}_{t1}}{E\boldsymbol{I}_{zt}}\left(x-\frac{L_{t1}}{2}\right)dt+\int_0^{L_{t2}}\frac{\boldsymbol{M}_{t2}}{E\boldsymbol{I}_{zt}}\left(x+\frac{L_{t1}}{2}\right)dt+\int_0^{L_{su}}\frac{\boldsymbol{M}_{su}}{E\boldsymbol{I}_{zsu}}\left(\frac{L_{t1}}{2}+L_{t2}\right)dt. \tag{33}$$

因为 c 处为对称中心，所以有 $\delta_{yc}=0$。又 $k_{ytsu}=2F_y/\delta_y$，联立式(31)～(33)，得检测模态的固有频率为：

$$f_s=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{6E\boldsymbol{I}_{zf}\boldsymbol{I}_{zt}}{(I_{zf}L_{t1}(5L_{t1}^2+24L_{t1}L_{t2}+48L_{t2}^2)+4I_{zt}L_{sf}^3)m_s}}. \tag{34}$$

表 3　顶梁和支撑梁的弯矩

Tab. 3　Bending moments of top beam and support beam

梁	t_1	t_2	t_3	su
弯矩($\mathbf{M}_i$)	$F_y x$	$F_y(L_{t1}+2x)$	$F_{yc} x$	$F_y(L_{t1}+2L_{t2})-F_{yc}L_{t3}$

2.7　绕 z 轴同向模态

绕 z 轴同向模态中，两质量块沿相同方向绕各自的中心转动，如图 13 所示。

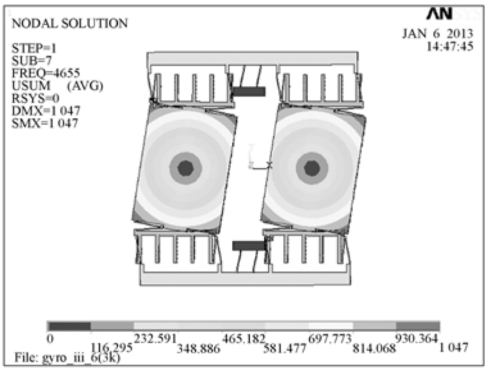


图 13　绕 z 轴同向模态的位移云图

Fig. 13　Displacement nephogram of z-axis rotational in phase mode

与 x 轴同向模态相似，支撑梁与驱动梁为串联关系。同向转动刚度 $k_{\phi_z i}$ 是由此串联刚度和检测梁沿 y 轴刚度组成的，可表示为：

$$k_{\phi_z i}=\frac{k_{xd}k_{xsu}}{2k_{xd}+k_{xsu}}L_y^2+k_{ys}L_x^2,\tag{35}$$

其中：L_x 和 L_y 分别为质量块 x 方向和 y 方向尺寸的一半。绕 z 轴同向模态的等效刚度和等效质量分别为：

$$\begin{aligned}K_{\phi_z i}&=4k_{\phi_z i}\\ \mathbf{M}_{\phi_z i}&=\mathbf{J}_z\end{aligned},\tag{36}$$

其中：$\mathbf{J}_z$ 为质量块绕其中心的转动惯量。可得绕 z 轴同向模态的固有频率为：

$$f_{\phi_z i}=\frac{1}{\pi}\sqrt{6\left(\frac{2E\mathbf{I}_{zf}\mathbf{I}_{zsu}}{(2\mathbf{I}_{zf}l_{su}^3+\mathbf{I}_{zsu}(l_{df1}^3+l_{df2}^3))m_d}L_y^2+\frac{E\mathbf{I}_{zf}}{l_{sf}^3}L_x^2\right)\cdot\frac{1}{\mathbf{J}_z}}.\tag{37}$$

2.8　绕 z 轴相向模态

与绕 z 轴同向模态相反，在此模态中，两质量块沿相反方向绕各自的中心转动，如图 14 所示。相向转动刚度 $k_{\phi_z o}$ 由驱动梁 x 轴方向的刚度和检测梁 y 轴方向的刚度组成，可表示为：

$$k_{\phi_z o}=k_{xd}L_y^2+k_{ys}L_x^2.\tag{38}$$

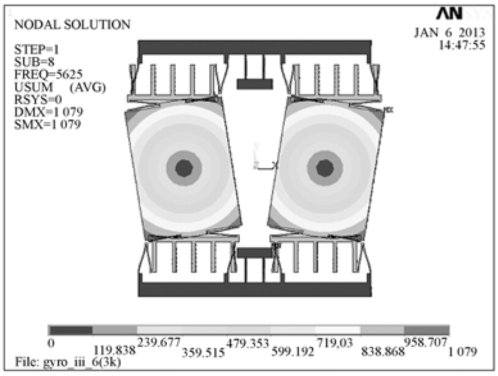


图 14　z 轴相向模态位移云图

Fig. 14　Displacement nephogram of z-axis rotational out of phase mode

绕 z 轴相向模态的等效刚度和等效质量可分别表示为：

$$\begin{aligned}K_{\phi_z o}&=4k_{\phi_z o}\\ \mathbf{M}_{\phi_z o}&=\mathbf{J}_z\end{aligned},\tag{39}$$

可得 z 轴相向模态的固有频率为：

$$f_{\phi_z o}=\frac{1}{\pi}\sqrt{6\left(\frac{E\mathbf{I}_{zf}}{L_{df1}^3+L_{df2}^3}L_y^2+\frac{E\mathbf{I}_{zf}}{L_{sf}^3}L_x^2\right)\cdot\frac{1}{\mathbf{J}_z}}.\tag{40}$$

3　仿真模态分析

双质量振动式硅微陀螺低阶模态的固有频率可以通过已推导出的理论模型得到，并利用有限元仿真软件 ANSYS 的模态分析功能对理论模型进行验证。硅微陀螺的结构参数如表 4 所示，使用六面体单元 Solid45 离散后的仿真模型如图 15 所示。

表 4　硅微陀螺结构参数

Tab. 4　Designed parameters of gyroscope

参数	值	参数	值	参数	值
L_{t1}/μm	1 724	L_{df1}/μm	529	L/μm	2 298
L_{t2}/μm	382	L_{df2}/μm	589	L_x/μm	850
L_{t3}/μm	181	L_{dg}/μm	36	L_y/μm	1286
w_t/μm	280	L_{sf}/μm	550	$J_y/(\mathrm{kg\cdot m^2})$	$3.092\ 5\times10^{-12}$
L_{su}/μm	500	L_{sg}/μm	36	$J_z/(\mathrm{kg\cdot m^2})$	$1.305\ 2\times10^{-12}$
w_{su}/μm	18	w_f/μm	16	m_d/kg	$1.104\ 1\times10^{-6}$
h/μm	80	w_g/μm	50	m_s/kg	$9.360\ 9\times10^{-7}$

约束陀螺锚点处的全部自由度，使用 Block lanczos 方法对陀螺进行模态提取。硅微陀螺低阶模态固有频率的理论结果与仿真结果如表 5 所

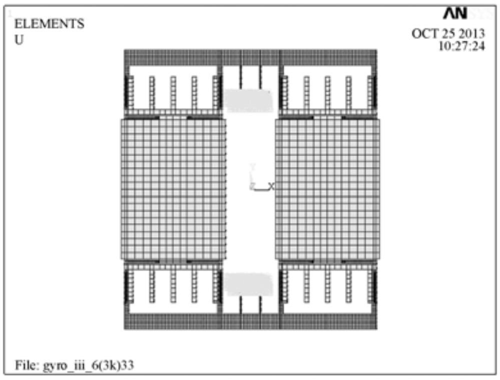


图15　双质量振动式硅微陀螺离散模型

Fig. 15　Meshed model of dual-mass vibrating silicon micro-gyroscope

示。其误差在可接受范围内，证明了利用能量法对硅微陀螺的模态进行建模是可行的。

表5　理论结果与仿真结果的对比

Tab. 5　Comparison of theoretical and simulative values

模态	理论结果/Hz	仿真结果/Hz	误差/(%)
绕 y 轴模态	2 292	2 110	8.6
x 轴同向模态	3 103	3 065	1.2
z 轴模态	3 272	3 245	0.8
驱动模态	3 798	3 832	0.9
检测模态	4 206	4 192	0.3
y 轴同向模态	4 244	4 284	0.9
绕 z 轴同向模态	4 663	4 655	0.2
绕 z 轴相向模态	5 305	5 625	5.7

4　静态性能实验和实验模态分析

双质量振动式硅微陀螺的电子显微镜(KEYENCE VHX-100)照片如图16所示。硅微陀螺是使用SOI(silicon on insulator)工艺加工，并使用圆片级真空封装技术进行封装，如图17所示。在室温下对陀螺整表进行了静态性能实验，Allan方差分析结果如图18所示，陀螺的偏置不稳定性为0.459 (°)/hr，角度随机游走(ARW)为0.057 8 (°)/$hr^{\frac{1}{2}}$。

为了对硅微陀螺进行实验模态分析，将圆片级真空封装的硅微陀螺机械敏感结构安装在LCC(leadless chip carrier)陶瓷管壳内，如图20

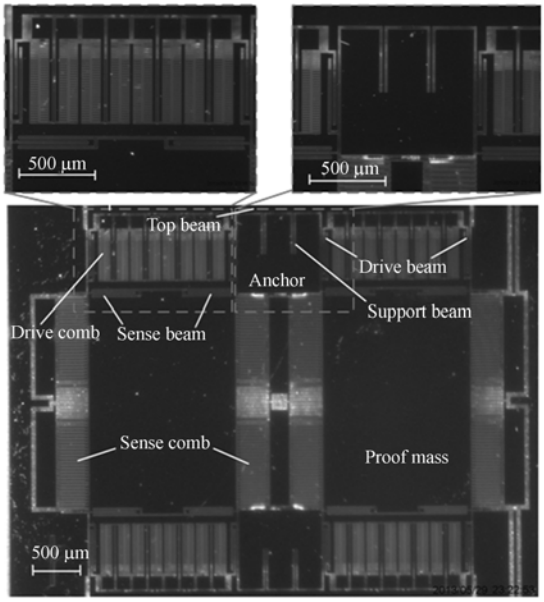


图16　硅微陀螺电子显微镜照片

Fig. 16　Digital microscope photograph of gyroscope

图17　集成ASIC电路的圆片级封装MEMS陀螺，尺寸为11.5 mm×19.5 mm

Fig. 17　Wafer-level packaged MEMS gyroscope with ASIC circuit inside ceramic tube. The dimension of gyroscope is 11.5 mm×19.5 mm.

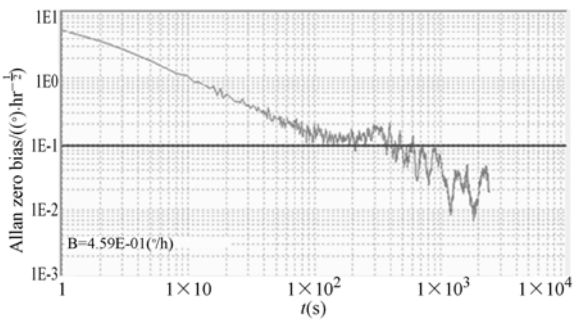


图18　Allan方差分析结果

Fig. 18　Result of Allan variance analysis

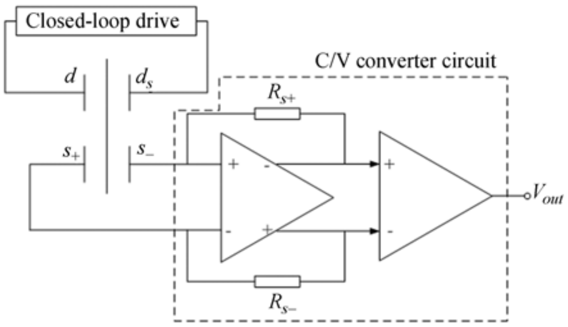


图 19　试验模态分析原理框图

Fig. 19　Experimental circuit diagram

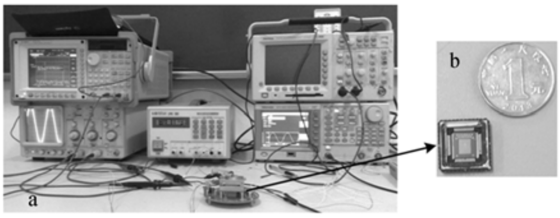


图 20　(a)陀螺实验环境；(b)圆片级真空封装的硅微陀螺机械敏感结构

Fig. 20　(a) Real testing environment of the gyroscope; (b) Wafer-level vacuum packaged mechanical sensitive structure of silicon micro-gyroscope.

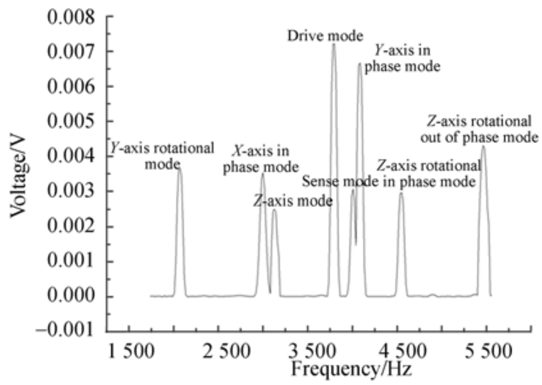


图 21　动态信号分析仪输出结果

Fig. 21　Output results of dynamic signal analyzer

(b)所示。在图 19 中，d 和 d_s 分别为驱动电极和驱动检测电极。s_+ 和 s_- 为差动检测电极，V_{out} 是 C/V 转换电路的输出端。硅微陀螺工作在驱动闭环模式下。使用动态信号分析仪（Agilent 35670A）测量 V_{out} 处的电压信号，实验环节如图 20(a)所示。根据模态叠加原理，如果陀螺受到一个脉冲信号，则其低阶模态均可被激发。所以陀螺受脉冲信号激发时，V_{out} 处的电压信号就包含了陀螺低阶模态的频率信息。通过动态信号分析仪得到 V_{out} 处电压信号的频谱特性，如图 21 所示。

图 21 中，峰值信号所对应的频率即为硅微陀螺的固有频率。固有频率的理论分析结果与实验结果的对比如表 6 所示。误差在可接受范围内，验证了硅微陀螺固有频率理论模型的正确性。

表 6　理论结果与实验结果的对比

Tab. 6　Comparison of theoretical and experimental values

模态	理论结果/Hz	试验结果/Hz	误差
绕 y 轴模态	2 292	2 073	10.6%
x 轴同向模态	3 103	3 000	3.4%
z 轴模态	3 272	3 128	4.6%
驱动模态	3 798	3 800	0.05%
检测模态	4 206	4 008	4.9%
y 轴同向模态	4 244	4 087	3.8%
绕 z 轴同向模态	4 663	4 551	2.5%
绕 z 轴相向模态	5 305	5 462	2.9%

5　结　论

本文利用能量法建立了双质量振动式硅微陀螺低阶模态固有频率的理论模型，然后对硅微陀螺进行了仿真模态分析和实验模态分析。理论分析结果与仿真结果和实验结果间的误差均在可接受范围内，用仿真和实验的方法验证了硅微陀螺固有频率理论模型的正确性。同时，对硅微陀螺进行了静态性能实验，Allan 方差分析结果显示陀螺的偏置不稳定性为 0.459(°)/hr，角度随机游走为 $0.0578(°)/hr^{\frac{1}{2}}$。

利用固有频率理论模型，可以定量地对硅微陀螺进行模态定阶工作，并使陀螺的模态定阶更加准确、可靠。由于省略了繁琐的结构参数调整过程，可更高效地完成陀螺模态定阶。该模型同样适用于陀螺的结构优化过程。例如，可以利用复型调优法来获得更好的模态定阶结果。本文结果可为硅微陀螺的设计和优化提供实际指导和理论依据。

参考文献：

[1] 施芹，苏岩，裘安萍，等．MEMS陀螺仪器件级真空封装技术[J]．光学 精密工程，2009，17(8)：1987-1992.
SHI Q，SU Y，QIU A P，*et al*．．Device level vacuum packaging technologies of MEMS gyroscopes [J]．*Opt. Precision Eng.*，2009，17(8)：1987-1992．(in Chinese)

[2] 李建利，房建成，盛蔚，等．双质量块调谐输出式硅MEMS陀螺仪的理论计算及仿真[J]．光学 精密工程，2008，16(3)：484-491.
LI J L，FANG J CH，SHENG W，*et al*．．Calculation and simulation of silicon MEMS gyroscope with dual-mass resonant output [J]．*Opt. Precision Eng.*，2008，16(3)：484-491．(in Chinese)

[3] 姜劭栋，裘安萍，施芹，等．硅微陀螺仪正交耦合系数的计算及验证[J]．光学 精密工程，2013，21(1)：87-93.
JIANG SH D，QIU A P，SHI Q，*et al*．．Calculation and verification of quadrature coupling coefficient of silicon microgyroscope [J]．*Opt. Precision Eng.*，2013，21(1)：87-93．(in Chinese)

[4] BERNSTEIN J，CHO S，KING A T，*et al*．．A micromachined comb-drive tuning fork rate gyroscope [C]．*Micro Electro Mechanical Systems*，MEMS，1993，93：143-148.

[5] TRUSOV A A，SCHOFIELD A R，SHKEL A M．Micromachined rate gyroscope architecture with ultra-high quality factor and improved mode ordering [J]．*Sensors and Actuators A：Physical*，2011，165(1)：26-34.

[6] WEINBERG M S，KOUREPENIS A．Error sources in in-plane silicon tuning-fork MEMS gyroscopes [J]．*Microelectromechanical Systems*，2006，15(3)：479-491.

[7] APOSTOLYUK V．*Theory and Design of Micromechanical Vibratory Gyroscopes*[M]．VS：Springer，2006：173-195.

[8] WHITE R D．*Effects of impact and vibration on the performance of a micromachined tuning fork gyroscope*[D]．Massachusetts Institute of Technology，Dept．of Mechanical Engineering，1999.

[9] YOON S W，LEE S，NAJAFI K．Vibration-induced errors in MEMS tuning fork gyroscopes[J]．*Sensors and Actuators A：Physical*，2012，180：32-44.

[10] FEDDER G K．*Simulation of microelectromechanical systems*[D]．California：University of California，1994.

[11] IYER S V．*Modeling and Simulation of Non-idealities in a Z-axis CMOS-MEMS Gyroscope*[D]．Carnegie-Mellon University，2003.

[12] M'CLOSKEY R T，GIBSON S，HUI J．Modal parameter identification of a MEMS gyroscope[C]．*American Control Conference*，IEEE，2000，3：1699-1704.

[13] 李锦明．高信噪比电容式微机械陀螺的研究[D]．太原：中北大学，2005.
LI J M．*Research on high signal-noise ratio of capacitive micromechanical gyroscope* [D]．Taiyuan：North University of China，2005．(in Chinese)

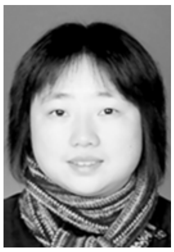
[14] BORESI A P，SCHMIDT R J，SIDEBOTTOM O M．*Advanced Mechanics of Materials*[M]．New York：Wiley，1993.

[15] SOKOLNIKOFF I S，SPECHT R D．*Mathematical theory of elasticity*[M]．New York：McGraw-Hill，1956.

作者简介：

姜劭栋（1986－），男，山东淄博人，博士研究生，2009年于南京理工大学获得学士学位，主要从事MEMS惯性传感技术研究。E-mail：shdjiang_njust@163.com

导师简介：



裘安萍（1971－），女，浙江宁波人，教授，博士生导师，1998年、2001年于东南大学分别获得硕士、博士学位，主要从事MEMS惯性技术研究。E-mail：apqiu@mail.njust.edu.cn