山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1．本试卷共 七 道大题（共计 16 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一.（12分）求下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}e^{-\frac{1}{x}}$.

二.（16分）求下列导数或微分

1. 设函数 $y=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 求由方程 $f(x-y, y-z, z-x)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的微分 dz.

三.（46分）计算下列各题

1. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$.

2. $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy$，其中 D 是由 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围的区域.

3. $\int_C \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]dy$，其中C是沿圆周$x^2+y^2=R^2$由$A(R,0)$依逆时针方向到$B(-R,0)$的半圆($R>0$为常数).

4. $\iint\limits_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)dS$，其中S是锥面$x^2+y^2=z^2(z\geq 0)$被圆柱面$x^2+y^2=2x$截取的部分.

5. 设$\varphi(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt$，计算$\varphi'(0)$的值.

四.(8分)求$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$在$(0,2\pi)$中的傅里叶展开式.

五(8分)求二元函数$z=x^4+2x^2-2xy+y^2$在$(-2,2)\times(-2,2)$上的极值点.

六.(30分)讨论下列各题

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

试讨论f在(0,0)点的连续性、偏导数存在性、可微性。

2. 试确定函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$的收敛域，并讨论其和函数在定义域内的连续性与可微性。

七.(30分)证明下列各题

1. 设f(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，又f(x)非线性函

数且 $f(a)<f(b)$. 试证明 $\exists\, \xi, \eta \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\eta).$$

2. 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减. 试证明对于任何 $\alpha \in (0,1)$,

有 $$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对 $\forall x \in [a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ 收敛. 试证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。