山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等代数与解析几何

注意事项：1. 本试卷共 九 道大题（共计 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一.（16 分）设 a,b 是两个不相等的数. 证明：多项式 $f(x)$ 能被 $(x-a)(x-b)$ 整除的充要条件是 $f(a)=f(b)=0$.

二.（18 分）设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 m，$n\times(n-m)$ 矩阵 B 的秩为 $n-m$，又 $AB=0$，α 是满足 $A\alpha=0$ 的一个 n 维列向量. 证明：存在唯一的一个 $n-m$ 维列向量 β 使 $\alpha=B\beta$.

三.（12 分）设 C 为 n 阶实可逆矩阵，A 为 n 阶实对称矩阵. 证明：A 正定当且仅当 C^TAC 正定.

四.（18 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$. 证明：线性方程组 $AX=b$ 有解当且仅当 $A^TX=0$ 的解都是 $b^TX=0$ 的解.

五.（18 分）设 W_1 和 W_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间且其维数之和等于 n. 求证存在 V 的线性变换 $\boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{A}^{-1}(0)=W_1$，$\boldsymbol{A}V=W_2$.

六.（18 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧氏空间 R^n 的正交变换，令 $V_1=\{x\mid \boldsymbol{A}x=x\}$，$V_2=\{x-\boldsymbol{A}x\mid x\in R^n\}$. 证明：

（1）V_1 是 V_2 正交补；

（2）$R^n=V_1\oplus V_2$.

七.（16 分）已知点 $A(2,-1,3)$ 和直线 $L:\begin{cases}2x+4y+z+1=0\\2x+2y-z+5=0\end{cases}$

（1）求过点 A 且平行于 L 的直线方程；

（2）求过点 A 及 L 的平面方程.

八.（16 分）证明：过原点且与球面 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ 相切的直线所组成的锥面方程是 $d(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.

九.（18 分）证明：双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z \quad (a\neq b)$ 上的两直母线直交时，其交点必在一双曲线上.