

山东师范大学
二〇一〇年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学 B

- 注意事项：1. 本试卷共 3 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）。

1、若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1-e^x} (b - \cos x) = 3$ ，则 $b =$ ①。

2、 $\int \frac{x}{1+x^2} dx =$ ②。

3、设 $y = \arcsin e^{-x}$ ，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ ③。

4、设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，则 $A^{2010} =$ ④。

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} =$ ⑤。

6、设 $n > 5$ ，则 $(xe^x)^{(n)} =$ ⑥。

二、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）。

7、设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 矩阵，证明 A 满足方程： $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ 。

8、设 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (0, -2, 1), \alpha_3 = (1, 4, \lambda)$ ，问当 λ 为何值时， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

三、解答题（本题共 9 小题，满分 98 分，解答应写出详细文字说明或演算步骤）。

9、（本题满分 12 分）求下列线性方程组的解

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

10、 (本题满分 12 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, 计算矩阵 $3A^{-1}$.

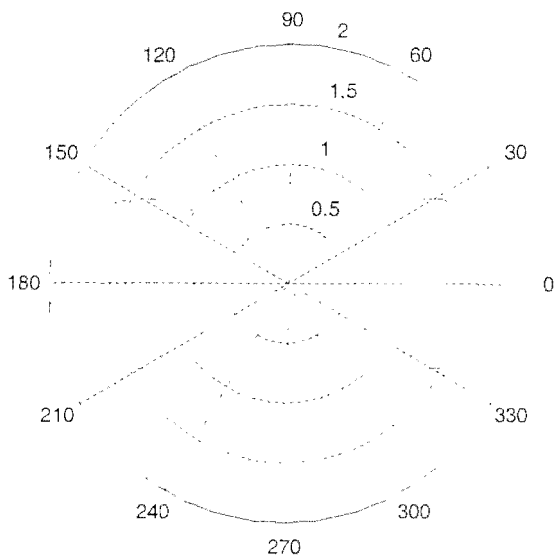
11、 (本题满分 12 分) 讨论下列二次型的正定性:

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

12、 (本题满分 12 分) 计算三重积分 $I = \iiint_D z dx dy dz$, 其中 D 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 与 xOy 平面所围成的区域.

13、 (本题满分 12 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.

14、 (本题满分 12 分) 双纽线的极坐标方程是: $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) (图像如下). 试计算它所围成的图形的面积.



15、 (本题满分 10 分) 设 $z = z(x, y)$ 由下列方程确定: $z = e^{2x-3z} + 2y$. 计算 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

16、 (本题满分 8 分) 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n}$ 的和函数 ($|x| < 1$).

17、 (本题满分 8 分) 求 $f(x) = 1 - 2xe^{-2x}$ 在 $[0, \infty)$ 上的极值, 判断是否是极大、极小, 或者最大最小.