山 东 师 范 大 学

二OO七 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学B

注意事项：1．本试卷共 3 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）。

1、$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$ ________。

2、若 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ ________。

3、设 $y = \arctan\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} =$ ________。

4、$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$ ________。

5、设 $z = e^{2x-3y} + 2y$，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ________。

6、已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 $f(1) = 0$，则 $f(x) =$ ________。

二、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）。

7、方阵 A 称为对合矩阵，如果 $A^2 = I$ 为单位矩阵；称为幂等矩阵，如果 $A^2 = A$。证明：如果 A 为幂等矩阵，则 $2A - I$ 为对合矩阵；如果 A 为对合矩阵，则 $\dfrac{1}{2}(I + A)$ 为幂等矩阵。

8、证明当 $x > 0$ 时，$(x^2 - 1)\ln x \ge (x-1)^2$

三、解答题（本题共 9 小题，满分 98 分，解答应写出详细文字说明或演算步骤）。

9、（本题满分 12 分）求下列线性方程组的解 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$。

10、 （本题满分 12 分）设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，计算矩阵 $11A^{-1}$。

11、 （本题满分 12 分）讨论下列二次型的正定性：

$$f=x_1^2+4x_2^2+7x_3^2+4x_1x_3+6x_2x_3$$

12、 （本题满分 12 分）计算三重积分 $I=\iiint\limits_D (x^2+y^2+z)dxdydz$，其中 D 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与 xOy 平面所围成的区域。

13、 （本题满分 12 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$。

14、 （本题满分 12 分）计算曲线线积分 $I=\oint\limits_L \dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 为椭圆 $4x^2+y^2=4$，取逆时针方向。

15、 （本题满分 10 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$。计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

16、 （本题满分 8 分）判断下列级数的收敛范围并求其和。

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n$$

17、 （本题满分 8 分）求 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ 的极值。