

山东师范大学  
硕士研究生入学考试试题

考试科目：            高等数学 B

- 注意事项：1. 本试卷共 9 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；  
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；  
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。  
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。

\* \* \* \* \*

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，要求直接写出结果）

1. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ，则  $\det(A) =$  ①。
2. 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  的乘积为 ②。
3. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} =$  ③。
4. 当  $x \rightarrow 0$  时， $\sqrt[4]{a^2+x}$  的一阶近似公式为 ( $a > 0$ ) ④。
5. 向量  $(a, b)$  在平面上绕原点逆时针旋转角度  $\alpha$  后坐标为 ⑤。
6. 初等函数的定义是 ⑥。

二、微分学计算题（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

1. 设  $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x} + x^x$ 。计算导数  $f'(x)$ 。
2. 设  $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。计算： $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

三、积分学计算题（本题共 2 小题，第 1 小题 12 分，第 2 小题 13 分，满分 25 分）

1. 设曲线方程为： $y = \sqrt{x \arctan x}$  ( $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ )。试计算它围绕 X 轴旋转成立体的体积。

2. 计算下列重积分： $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ 。其中  $\Omega$  为曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  围成的区域。

四、（本题满分 10 分）求下列线性方程组的解： $AX = b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

五、（本题满分 12 分）计算积分  $\iiint_V xyz dx dy dz$ ，其中  $V$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x=0, y=0, z=0$  所围成。

六、级数理论（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 设函数  $f(x) = e^{\sin x}$ 。求  $f(x)$  在  $x=0$  的 Taylor 展开，要求展开到  $x^4$ 。

2. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$  的收敛域并计算其和。

七、（本题满分 15 分）分析下列两个二次型的正定性：

$$f = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3, \quad g = x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$$

八、（本题满分 14 分）计算下列矩阵的逆矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

九、（本题满分 8 分）设  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上二阶可微，且  $f'(0) = f'(1) = 0$ 。证明存在  $c \in (0,1)$  满足  $f''(c) \geq 4|f(1) - f(0)|$ 。