

山东师范大学  
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 2 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；  
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；  
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

\*\*\*\*\*

一、简答题（共 7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 写出一个合格的波函数所应具备的条件。
2. 自由粒子的动量和能量是否为守恒量？为什么？
3. 中心力场中粒子能级的简并度至少为  $2l+1, l=0,1,2,\dots$ ，对吗？为什么？
4. 若两个算符不对易，它们是否可能同时有确定值？为什么？
5. 证明对于非简并情况，厄米算符属于不同本征值的本征函数相互正交。
6. 对于  $\delta$  势垒  $V(x)=\gamma\delta(x)$ ，试给出并证明  $\delta$  势中  $\psi'(x)$  的跃变条件。
7. 证明等式  $e^{i\theta\sigma_z} = \cos\theta + i\sigma_z \sin\theta$  ( $\sigma_z$  为泡利矩阵  $z$  分量)。

二、计算题（4 小题，共 80 分）

1. (15 分) 一质量为  $m$  的粒子原本处于如下无限深势阱的基态

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > b \\ 0 & 0 < x < b \end{cases}$$

今把阱壁由  $x=b$  移至  $x=2b$  处，求

- (1) 粒子处于新势阱基态中的几率。
- (2) 粒子保持能量未变的几率以及能量比原有基态中的更大的几率各是多少？

2. (20 分)  $t=0$  时氢原子的波函数为

$$\psi(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}} (2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1})$$

忽略自旋和跃迁。

- (1) 写出系统能量、角动量平方  $L^2$  及角动量  $z$  分量  $L_z$  的可能测值（表示成基本物理量的函数即可）。
- (2) 上述物理量的可能测值出现的几率和期望值。
- (3) 写出  $t$  时刻的波函数。

3. (25分) 设体系的 Hamilton 量为  $H = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 频率  $\omega$  是实常数。

(1) 求体系能量的本征值和本征函数。

(2) 如果  $t=0$  时体系处于  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  状态, 求  $t>0$  时体系所处的状态。

(3) 如果  $t=0$  时体系处于基态, 当一个小的与  $t$  有关的微扰  $H' = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$  在  $t=0$  时加上后, 求  $t \rightarrow \infty$  时体系跃迁到激发态的几率。

4. (20分) 对于一维谐振子, 取基态试探波函数形式  $\exp(-\lambda x^2)$ ,  $\lambda$  为参数, 用变分法求基态能量, 并与严格解比较。

(提示: 如有必要, 可用公式

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \quad \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}, \quad a>0)$$