山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：　　　　　高等数学 A

注意事项：1. 本试卷共 十 道大题（共计 25 个小题），满分 150 分；

2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一．填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$，则 $f(x)=$ ______①______.

2. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的有界函数，$g(x)=f(x)\sin x^2$，则 $g'(0)=$ ______②______.

3. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{1}^{+\infty}e^{-x}dx$，则 $a=$ ______③______.

4. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______④______.

5. 函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 的极大值点是______⑤______.

6. 设 L 为取逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=R^2$，则 $\oint\limits_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$ ______⑥______.

二. 单项选择题:（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1), & x<0\\ a+b\sin x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（ 1 ）

(A) $a=0,\quad b=1$　　(B) $a=1,\quad b=2$

(C) $a=2,\quad b=2$　　(D) $a=2,\quad b=1$

2. 若 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(0)=0$，又知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$，则有（ 2 ）

(A) $f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值　　(B) $f(0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(0)$ 一定不是函数 $f(x)$ 的极值　(D) $f(0)$ 不一定是函数 $f(x)$ 的极值.

3. 设 $f'(\sin x)=\cos^2 x$, 则 $\int f(x)dx=$（ 3 ）

(A) $x-\dfrac{1}{3}x^3+C$　　(B) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{12}x^4+C_1x+C_2$

(C) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+C$　　(D) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+Cx$

4. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则 P 点为（ 4 ）

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,2)$

(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

5. 若 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=$（ 5 ）

(A) 12π　　(B) 8π　　(C) 10π　　(D) 6π

6. 微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^x$ 的特解形式为（ 6 ）

(A) $(ax+b)e^x$　　(B) $(ax+b)xe^x$

(C) $(ax+b)+ce^x$　　(D) $(ax+b)+cxe^x$

三. 计算下列各题：(本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\dfrac{1}{2}x\sin 2x}{x^3\ln(1+x)}$.

2. 设 $\begin{cases} x+t-t^2=0 \\ te^{y}+y+1=0 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$

3. 已知 $\int_x^{2\ln 2}\dfrac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\dfrac{\pi}{6}$，求 x.

4. 设 $u=xy^2z^3$，其中 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 确定的函数，

   求当 $x=y=z=1$ 时的 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dxdy$，其中区域 D 由曲线 $y=x^2$ 和 $y=1, x=0$ 围成.

6. 设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+P(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件

   $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的解.

四.（本题满分 8 分）

设曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 oy 轴旋转一周得旋转曲面，求该曲面在点

$P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量.

五.（本题满分 8 分）

求 $I=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=x$.

六.（本题满分 8 分）

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\cos\dfrac{1}{n})^{n^3}$ 的敛散性，若收敛，请说明是条件收敛还是

绝对收敛.

七．（本题满分 8 分）

设函数 $y(x)$ 连续，且满足

$$y(x)=\cos 2x+\int_0^x y(t)\sin t\,dt,$$

求 $y(x)$.

八．证明题（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，n 为大于 1 的正整数，

证明 ：$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\dfrac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy$.

九．（本题满分 12 分）

求曲线 $y_1(x)=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{ax}}$，$y_2(x)=\dfrac{1}{2}x$ 与 $x=1$ 所围图形的面积 A .

十．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 二阶可微，$f(0)=0, f'(0)=1,$ 又知曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{xy}{1+x^2}f'(x)dx+f'(x)dy$$

与路径无关，试确定 $f(x)$ 并计算上述曲线积分.