山东师 范大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学 A

注意事项：1．本试卷共 十 道 大题（共计 25 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一．填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．设 $f(x)$ 是可导的偶函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线斜率为__________①__________

2．$\displaystyle\int\frac{f'(\ln x)}{x\sqrt{f(\ln x)}}dx=$__________②__________

3．已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分，则常数 $a=$_____③_____

4．设 L 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，则 $\displaystyle\oint_L(9x^2+4y^2)ds=$__________④______

5．级数 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}+\cdots$ 的和 $s=$________⑤________

6．微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________⑥__________

二．单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ 1 ）

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 是同阶但非等价的无穷小

2．设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（ 2 ）

(A) 导数存在，且 $f'(a)\neq 0$ (B) 导数不存在
(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

3．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于（ 3 ）

(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9

4．设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 都存在，则必有（ 4 ）

(A) 存在常数 k，使 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=k$ (B) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，且 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$

(D) $\Delta z-[f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y]=0\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$

5．设 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\arctan(1+x^2+y^2)dxdy$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$ 等于（ 5 ）

(A) $\dfrac{\pi^2}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi^2}{8}$ (D) $\dfrac{\pi}{8}$

6．设 $y=f(x)$ 是 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，且 $f(x_0)>0,f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0（ 6 ）

(A) 取得极大值 (B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增加 (D) 某邻域内单调减少

三. 计算下列各题：(本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\ln(1+\sin x)}$

2. 设 $\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2 - \int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

3. 已知 $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{(x+2)^2}dx=A$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{x+1}dx$.

4．设二元函数 $g(u,v)$ 可微，方程 $z=g(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z})$ 确定了函数 $z=F(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

5．计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 为在第一象限由 $y=x,y=x^3$ 围成的区域。

6. 作变换 $t=\tan x$，把微分方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx}+y=\tan x$

变换为关于 y,t 的微分方程，并求原方程的通解。

四.（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}dt$，求 $\int_0^1(x-1)^2 f(x)dx$

五.（本题满分 8 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-2x\right|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 4\}$

六.（本题满分 8 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数。

七.（本题满分 8 分）

求解微分方程 $y''' - y' = 1$. 使其解函数在原点处有拐点，同时在原点处的切线为 x 轴。

八. **证明题**（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>0$. 证明：

（1）存在 $\xi_1\in(a,b)$，使 $f(\xi_1)<0$；

（2）存在 $\xi_2\in(a,b)$，使 $f''(\xi_2)<0$；

九.（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $x\in(0,1)$ 时，$y(x)>0$ 及 $xy'=y+\frac{3}{2}ax^2$，若曲线 $y=y(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围图形 A 的面积 $s=2$

（1） 求函数 $y(x)$；

（2） a 为何值时图形 A 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小?

十.（本题满分 12 分）

设可微函数 $f(x)>0, f(1)=\frac{1}{2}$，且沿平面区域 $x>1$ 内任何一条封闭曲线 L 均有 $\oint_L [ye^x f(x)-\frac{y}{x}]dx-\ln[f(x)]dy=0$，求 $f(x)$.