山东师 范大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学 A

注意事项：1. 本试卷共 十 道 大题（共计 25 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一．填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f'(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(a+3x)-f(a-5x)}=$______

2. 曲线 $\rho=2(1-\cos\theta)$ 上 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线的直角坐标方程为______

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=2$，则 $a=$______

4. 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，则 $dz=$______

5. 设 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\dfrac{y\sin z}{1+x^2}-1)dv$，其中 $\Omega:-1\le x\le 1,0\le y\ge 2,0\le z\le\pi$，则 $I=$______

6. 曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$ 在点 P 处的切平面平行于 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是______

二．单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$，则当 $x\to 2$ 时，有　　(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$　　(B) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$　　(D) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq\infty$

2. 若 $\int f(x)dx=\sin^2 x+c$，则 $\int\dfrac{xf(\sqrt{2x^2-1})}{\sqrt{2x^2-1}}dx=$　　(　　)

(A) $\dfrac{1}{4}\sin^2 x^2+c$　　(B) $\dfrac{1}{2}\sin^2(2x^2-1)+c$

(C) $\dfrac{1}{2}\sin^2 x^2+c$　　(D) $\dfrac{1}{4}\sin^2(2x^2-1)+c$

3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则　(　　)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(D) 无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

4．设区域 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 1$，则 $\iint\limits_D |y-x^2|d\sigma=$　　(　　)

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}(y-x^2)dy$　　(B) $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y-x^2)dy$

(C) $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}(x^2-y)dy$　　(D) $\int_{-1}^{1}dx[\int_{x^2}^{1}(y-x^2)dy-\int_{0}^{x^2}(y-x^2)dy]$

5. 设 L 为取逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=R^2$，则 $\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$　　(　　)

(A) 2π　　(B) 0　　(C) $2\pi R^2$　　(D) $2\pi R$

6. 设 $a_n=\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$，要使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛，则常数 p 应当　　(　　)

(A) $p>-1$　　(B) $p>0$　　(C) $p\ge 0$　　(D) $p\ge -1$

三. 计算下列各题：(本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定的隐函数 ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3. 计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x+2}{x\ln x(1+x\ln^2 x)}dx$

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数， $y=y(x),z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 确定，求 $\dfrac{du}{dx}$

5. 设 D 是以 $O(0,0),A(1,2),B(2,1)$ 为顶点的三角形区域，求 $I=\iint\limits_D xdxdy$ 。

6. 求解微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ ，其中 a 为常数

四.（本题满分 8 分）设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-\sin 2x} & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 6(x-\dfrac{\pi}{2})^2 & \dfrac{\pi}{2}\le x\le 1+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ，求 $\displaystyle\int_0^{1+\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

五.（本题满分 8 分）

设 $z=x^3f(xy,\dfrac{y}{x})$， f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

六.（本题满分 8 分）

求 $I=\displaystyle\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+[e^x\cos y-ax]dy$，其中 a,b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到 $O(0,0)$ 的弧.

七．（本题满分 8 分）

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数，并指出收敛区间。

八．**证明题**（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 连续，且常数 $a>0$，证明：$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

九．（本题满分 12 分）

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，当 $x\geq 0$ 时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$，

且 $F(0)=1, F(x)\geq 0$，试求 $f(x)$.

十．（本题满分 12 分）

求 $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极值及其在区域 $D: x^2+y^2\leq 16$ 上的最大值.