

4 结束语

在本文中,作者在总结归纳前人和作者本人研究成果的基础上提出了一个新的弹性力学问题,即“被轴对称扭转载荷扭转的轴对称弹性体的弹性力学空间问题”,该问题可看成是弹性力学空间问题的另一个特例.

应当指出,该问题目前还仅仅是作者提出的一个猜想,它需要经受严格的证明或者像“弹性力学空间轴对称问题”那样,成为一个公理.在经典的弹性力学专著和先前的学术研究中,对于这一类问题是采用半逆解法或其他数学力学方法求解的,求解过程比较麻烦.如果本文中作者提出的这一猜想随着时间的流逝,最终被学术界所认可和接受,则今后再求解这一类问题时,即可直接利用本文中所述的求解该问题的弹性力学基本方程式(即式(5)~式(8))以及该问题中轴对称弹性体内应力和位移分量的规律(正如我们现在求解“弹性力学空间轴对称

问题”那样),这将大大简化问题的求解过程.上述分析实例是一个很好的佐证.

作者对东南大学丁汉山教授的指教和帮助谨表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Timoshenko SP, Goodier JN. Theory of Elasticity (3rd edn). New York: McGraw-Hill, 1970
- 2 钱伟长,叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1980
- 3 徐芝纶. 弹性力学(第4版). 北京: 高等教育出版社, 2006
- 4 王龙甫. 弹性理论. 北京: 科学出版社, 1979
- 5 Sneddon IN. Fourier Transforms. New York: McGraw-Hill, 1951. 48-70, 500-504
- 6 Eason G. On the torsional impulsive loading of an elastic half space. *Quart Journ Mech and Applied Math*, 1964: 279-292
- 7 Muki R. Three dimensional problem of elasticity for a semi-infinite solid with a tangential load on its surface. *Trans Japan Soc Mech Eng*, 1956, 22(119): 468-474 (in Japanese)
- 8 王凯, 姚炳卿. N 层弹性体系在多圆旋转水平载荷作用下的力学计算. 西安公路学院学报, 1986, 4(3): 15-30

(责任编辑: 胡漫)

考虑轴向均布载荷时压杆的稳定性计算¹⁾

黄开志²⁾ 陈小亮

(重庆科技学院数理学院, 重庆 401331)

摘要 为了求得压杆同时承受轴向均布载荷和集中载荷时, 临界载荷的计算公式, 首先对仅承受轴向均布载荷的压杆, 用初参数法, 导出了临界载荷特征方程, 由软件分析特征方程发现, “固支-定向”、“固支-自由”、“铰支-定向”支承的压杆, 轴向均布载荷对其稳定性有明显影响, 并求得了临界载荷的近似解; 其次采用载荷换算与叠加的方法, 求得了压杆同时承受轴向均布载荷和集中载荷时, 临界载荷计算的公式; 最后就“固支-自由”支承的压杆, 与其他一些研究结果进行了比较, 本文结果与“平均结果”较吻合.

关键词 材料力学, 压杆, 稳定性, 临界载荷, 经验公式, 欧拉公式

中图分类号: O341 文献标识码: A

doi: 10.6052/1000-0879-14-297

对同时承受轴向均布载荷和集中载荷的压杆稳定性问题, 文献 [1] 指出, 难以求得临界载荷的精确解, 该文作者采用摄动法得到了临界载荷的特征方程, 给出了临界载荷的一些数值解; 文献 [2] 首先假设了压杆挠曲线近似为正弦函数, 然后用能量原理得到了临界载荷的解答; 文献 [3] 用幂级数法求得了临界载荷的解答.

在这些近似方法中, 较详细研究了“固支-自

2014-09-19 收到第1稿, 2014-10-11 收到修改稿.

1) 重庆科技学院本科生教育教学改革研究项目(CK2011B25)和研究生教育教学改革研究一般项目(YJG2014y008)资助.

2) 黄开志, 教授级高工, 主要从事力学计量测试技术研究. E-mail: mocd361@163.com

引用格式: 黄开志, 陈小亮. 考虑轴向均布载荷时压杆的稳定性计算. 力学与实践, 2015, 37(6): 744-749

Huang Kaizhi, Chen Xiaoliang. Calculating stability of long column while considering axial uniform load. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(6): 744-749

由” 支承的情况, 对其他支承情况, 没有提供详实的临界载荷公式。

本文拟先导出压杆仅承受轴向均布载荷 q 时, 其临界载荷的近似解, 并根据不同的支承情况作载荷换算, 再与压杆轴向集中载荷叠加, 以求得压杆同时承受轴向均布载荷和集中载荷时, 其临界载荷计算的经验公式。

1 q 单独作用时临界载荷近似解

设长为 l 、抗弯刚度为 EI 的压杆, 仅承受轴向均布载荷 q 时处于微弯曲平衡状态, 其受力和变形情况可简化为图 1 所示模型。

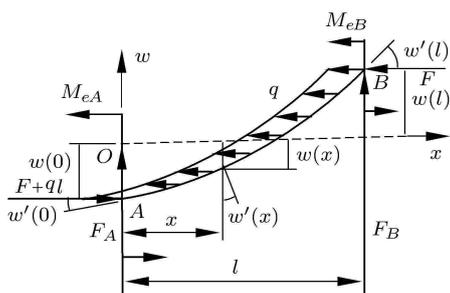


图 1 整体微弯曲平衡状态

1.1 变形方程

在微弯曲平衡状态的压杆中取 dx 微段, 因小变形, 可视 dx 段为直线, 按材料力学习惯设内力为正, 其受力情况如图 2 所示, 则静力平衡方程为

$$dF_S(x) - qdx \cdot \sin w'(x) = 0$$

$$dM(x) - F_S(x)dx - qdx \cdot \sin w'(x) \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

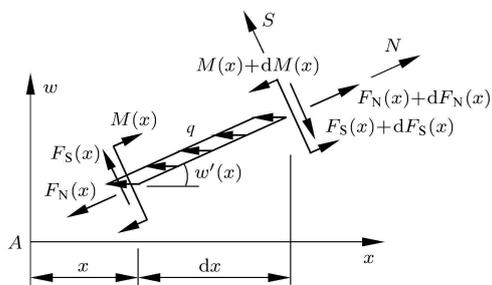


图 2 dx 段平衡状态

因小变形, 故 $\sin w'(x) \approx w'(x)$, 并略去二阶微量, 上述二式简化为

$$F'_S(x) = qw'(x) \tag{1}$$

$$M'(x) = F_S(x) \tag{2}$$

对式 (2) 求一阶导数并考虑到式 (1) 得

$$M''(x) = qw'(x) \tag{3}$$

挠曲线近似微分方程

$$\frac{M(x)}{EI} = w''(x) \tag{4}$$

对式 (4) 求一阶导数并考虑到式 (2) 得

$$\frac{F_S(x)}{EI} = w'''(x) \tag{5}$$

对式 (5) 求一阶导数并考虑到式 (1) 得

$$w^{(4)}(x) = \frac{qw'(x)}{EI}$$

令 $k^3 = \frac{q}{EI}$, 上式变为

$$w^{(4)}(x) - k^3 w'(x) = 0 \tag{6}$$

求解式 (6) 得挠曲线方程

$$w(x) = C_1 + C_2 e^{kx} + C_3 e^{-\frac{1}{2}kx} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) + C_4 e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) \tag{7}$$

对式 (7) 求一阶导数得转角 $w'(x)$ 满足方程

$$\frac{w'(x)}{k} = C_2 e^{kx} + C_3 e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) - C_4 e^{-\frac{1}{2}kx} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) \tag{8}$$

1.2 变形边界条件

在式 (7) ~ 式 (8) 中令 $x = 0$, 得到 A 端的变形满足

$$w(0) = C_1 + C_2 + C_4 \tag{9}$$

$$\frac{w'(0)}{k} = C_2 + C_3 \cos \frac{\pi}{6} - C_4 \sin \frac{\pi}{6} \tag{10}$$

在式 (7) ~ 式 (8) 中令 $x = l$, 得到 B 端的变形满足

$$w(l) = C_1 + C_2 e^{kl} + C_3 e^{-\frac{1}{2}kl} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) + C_4 e^{-\frac{1}{2}kl} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \tag{11}$$

$$\frac{w'(l)}{k} = C_2 e^{kl} + C_3 e^{-\frac{1}{2}kl} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) - C_4 e^{-\frac{1}{2}kl} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \quad (12)$$

$$\frac{F_S(l)}{k^3 EI} = C_2 e^{kl} + C_3 e^{-\frac{kl}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) + C_4 e^{-\frac{kl}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \quad (18)$$

1.3 内力边界条件

对式(8)求一阶导数并考虑到式(4),得

$$\frac{M(x)}{k^2 EI} = C_2 e^{kx} - C_3 e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) - C_4 e^{-\frac{1}{2}kx} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) \quad (13)$$

对式(13)求一阶导数并考虑到式(2),得

$$\frac{F_S(x)}{k^3 EI} = C_2 e^{kx} + C_3 e^{-\frac{kx}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) + C_4 e^{-\frac{kx}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right) \quad (14)$$

在式(13)~式(14)中令 $x=0$,得到A端的内力满足

$$\frac{M(0)}{k^2 EI} = C_2 - C_3 \cos\frac{\pi}{6} - C_4 \sin\frac{\pi}{6} \quad (15)$$

$$\frac{F_S(0)}{k^3 EI} = C_2 + C_4 \quad (16)$$

在式(13)~式(14)中令 $x=l$,得到B端的内力满足

$$\frac{M(l)}{k^2 EI} = C_2 e^{kl} - C_3 e^{-\frac{1}{2}kl} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) - C_4 e^{-\frac{1}{2}kl} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \quad (17)$$

1.4 特征方程

根据表1所述不同支承情况的压杆,由变形和内力为零的边界条件,选用式(9)~式(12),式(15)~式(18)中的4个,构成关于初参数 C_1, C_2, C_3, C_4 的齐次线性方程组.因初参数 C_1, C_2, C_3, C_4 不全为0,则方程组的系数行列式必为0,由此得到临界载荷 q_{cr} 的特征方程.

表1 边界条件

支承情况 A-B	变形边界条件		内力边界条件	
	A	B	A	B
固支-固支	$w(0)=0$ $w'(0)=0$	$w(l)=0$ $w'(l)=0$	$M(0)=?$ $F_S(0)=?$	$M(l)=?$ $F_S(l)=?$
固支-铰支	$w(0)=0$ $w'(0)=0$	$w(l)=0$ $w'(l)=?$	$M(0)=?$ $F_S(0)=?$	$M(l)=0$ $F_S(l)=?$
固支-定向	$w(0)=0$ $w'(0)=0$	$w(l)=?$ $w'(l)=0$	$M(0)=?$ $F_S(0)=?$	$M(l)=?$ $F_S(l)=0$
固支-自由	$w(0)=0$ $w'(0)=0$	$w(l)=?$ $w'(l)=?$	$M(0)=?$ $F_S(0)=?$	$M(l)=0$ $F_S(l)=0$
铰支-铰支	$w(0)=0$ $w'(0)=?$	$w(l)=0$ $w'(l)=?$	$M(0)=0$ $F_S(0)=?$	$M(l)=0$ $F_S(l)=?$
铰支-定向	$w(0)=0$ $w'(0)=?$	$w(l)=?$ $w'(l)=0$	$M(0)=0$ $F_S(0)=?$	$M(l)=?$ $F_S(l)=0$

1.4.1 固支-固支

由式(9)~式(12)及表1所述该支承情况下为零的边界条件,得特征方程为

1.4.2 固支-铰支

由式(9)~式(11)和式(17)及表1所述该支承情况下为零的边界条件,得特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 1 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \\ 0 & e^{kl} & -e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & -e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \end{vmatrix} = 0$$

1.4.3 固支-定向

定向支承是指仅对压杆的转角作刚性约束, 即该处压杆的转角为 0, 而不限制其挠度, 即该处压杆

的剪力为 0. 由式 (9), 式 (10), 式 (12), 式 (18) 及表 1 所述该支承情况下为 0 的边界条件, 得特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & -e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \\ 0 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \end{vmatrix} = 0$$

1.4.4 固支-自由

由式 (9), 式 (10), 式 (17), 式 (18) 及表 1 所述该支承情况下为零的边界条件, 得特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & e^{kl} & -e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & -e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \\ 0 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \end{vmatrix} = 0$$

1.4.5 铰支-铰支

由式 (9), 式 (11), 式 (15), 式 (17) 及表 1 所述该支承情况下为零的边界条件, 得特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}kl & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}kl \\ 0 & 1 & -\cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & e^{kl} & -e^{-\frac{1}{2}kl} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) & -e^{-\frac{1}{2}kl} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}kl \right) \end{vmatrix} = 0$$

1.4.6 铰支-定向

由式 (9), 式 (12), 式 (15), 式 (18) 及表 1 所述该支承情况下为零的边界条件, 得特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) & -e^{-\frac{1}{2}kl} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \\ 0 & 1 & -\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & e^{kl} & e^{-\frac{1}{2}kl} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) & e^{-\frac{1}{2}kl} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kl\right) \end{vmatrix} = 0$$

1.5 临界载荷近似解

对 1.4.1~1.4.6 所述的特征方程求解, 若其有最小正数解 $(kl)_{cr}$, 则由 $k^3 = \frac{q}{EI}$ 得临界载荷 $q_{cr} = \left[\frac{(kl)_{cr}}{l}\right]^3 EI$.

用软件如《Maple》等绘制 1.4.1~1.4.6 所述的 6 种压杆的临界载荷特征方程曲线, 见图 3, 每条曲线在 kl 轴上的所有截距均为相应的特征方程的解, 取第一截距即最小正数值 $(kl)_{cr}$ 计算临界载荷. 软件分析表明, 易失稳的压杆为图中虚线表示的情况.

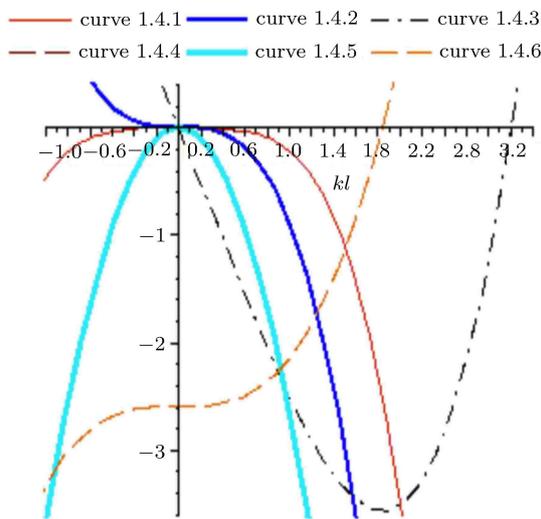


图 3 特征方程曲线

(1) 1.4.3 所述固支-定向支承压杆第一截距 $(kl)_{cr} \approx 3.02$, 则

$$q_{cr} = \left(\frac{3.02}{l}\right)^3 EI \quad (19)$$

将式 (19) 换算为欧拉公式形式, 即

$$0.35833q_{cr}l = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (20)$$

该式表明, 将大小为 $q_{cr}l$ 且沿压杆轴向均布施加的载荷, 换算成大小为 $0.35833q_{cr}l$ 的集中载荷施

加在压杆端部时, 二者对压杆的稳定性影响是等效的.

(2) 1.4.4 所述固支-自由支承和 1.4.6 所述“铰支-定向”支承压杆

二者特征方程曲线重合, 第一截距 $(kl)_{cr} \approx 1.85$, 则

$$q_{cr} = \left(\frac{1.85}{l}\right)^3 EI \quad (21)$$

将式 (21) 换算为欧拉公式形式, 即

$$0.38969q_{cr}l = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad (22)$$

该式表明, 将大小为 $q_{cr}l$ 且沿压杆轴向均布施加的载荷, 换算成大小为 $0.38969q_{cr}l$ 的集中载荷施加在压杆端部时, 二者对压杆的稳定性影响是等效的.

2 q 和 F 同时作用时临界载荷经验公式

设压杆处于临界状态时, 轴向均布载荷为 q , 轴向集中载荷为 F ; 设 F_{cr} 为未考虑轴向均布载荷 q 时, 按欧拉公式计算的临界载荷. 不妨令 $F = K_{cr}F_{cr}$, 且称 K_{cr} 为 F_{cr} 的修正因子.

(1) 对 1.4.3 所述固支-定向支承压杆

采用载荷换算与叠加的方法, 结合式 (20) 得 q 和 F 同时作用时, 临界载荷经验公式为

$$0.35833ql + F = F_{cr} \quad (23)$$

即 $F = \left(1 - 0.35833\frac{ql}{F_{cr}}\right) F_{cr}$, 得

$$K_{cr} = 1 - 0.35833\frac{ql}{F_{cr}} \quad (24)$$

其中 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

(2) 对 1.4.4 所述固支-自由支承和 1.4.6 所述铰支-定向支承压杆

采用载荷换算与叠加的方法, 结合式 (22) 得 q 和 F 同时作用时, 临界载荷经验公式为

$$0.38969ql + F = F_{cr} \quad (25)$$

即 $F = \left(1 - 0.38969 \frac{ql}{F_{cr}}\right) F_{cr}$, 得

$$K_{cr} = 1 - 0.38969 \frac{ql}{F_{cr}} \quad (26)$$

其中 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$

3 结果比较

由于文献 [1-3] 及 Bessel 函数法 (源于文献 [1])

仅研究了本文所述固支 - 自由支承的压杆, 且研究范围是 ql/F_{cr} 介于 0 与 0.5 之间, 故这里仅就该可比情况进行比较。

先分别按文献 [1-3]、Bessel 函数法及本文方法得到的公式或数据计算出 F_{cr} 的修正因子 K_{cr} (本文应按式 (26) 计算 K_{cr}), 再计算出 K_{cr} 的平均值 \bar{K}_{cr} , 最后计算出各 K_{cr} 与 \bar{K}_{cr} 的偏差 $\delta_{cr}(\%)$, 结果见表 2. 表 2 中带下划线及粗体数字表明:

表 2 结果比较

ql/F_{cr}		0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.50
F_{cr} 的修正因子 K_{cr}	文献 [1]	1	0.9876	0.9389	0.9156	0.8935	0.8718	0.7421
	文献 [2]	1	0.9843	0.9686	0.9530	0.9373	0.9216	0.8432
	文献 [3]	1	0.9843	0.9685	0.9528	0.9370	0.9213	0.8426
	Bessel 函数法	1	0.9881	0.9472	0.9328	0.9252	0.9240	0.8430
	本文方法	1	0.9805	0.9610	0.9415	0.9221	0.9026	0.8052
K_{cr} 的平均值 \bar{K}_{cr}		1	0.9850	0.9568	0.9391	0.9230	0.9083	0.8152
K_{cr} 与 \bar{K}_{cr} 的偏差 $\delta_{cr}/\%$	文献 [1]	0	+0.26	-1.87	-2.50	-3.20	-4.02	-8.97
	文献 [2]	0	<u>-0.07</u>	+1.23	+1.48	+1.32	+1.46	+3.43
	文献 [3]	0	<u>-0.07</u>	+1.22	+1.46	+1.52	+1.43	+3.36
	Bessel 函数法	0	+0.31	-1.00	-0.67	+0.24	+1.73	+3.41
	本文方法	0	-0.46	<u>+0.44</u>	<u>+0.26</u>	<u>-0.10</u>	<u>-0.63</u>	<u>-1.23</u>

- (1) 当 $ql/F_{cr} = 0$ 时, 5 种方法研究结果一致;
- (2) 当 ql/F_{cr} 在 0.05 左右时, 文献 [2-3] 的研究结果与平均结果较吻合, 文献 [1] 次之;
- (3) 当 ql/F_{cr} 介于 0.10~0.20 时, 本文研究结果与平均结果较吻合, Bessel 函数法次之;
- (4) 当 ql/F_{cr} 介于 0.25~0.5 时, 本文研究结果与平均结果较吻合, 文献 [3] 次之。

由文献 [1] 知, 工程中一般 $0.1 \leq ql/F_{cr} \leq 0.25$. 由表 2 知, 当 $0.1 \leq ql/F_{cr} \leq 0.5$ 时, 本文研究结果与平均结果较吻合。

4 结束语

对固支 - 定向、固支 - 自由和铰支 - 定向支承的压杆, q 对其稳定性有明显影响. 压杆处于临界状态时, q 和 F 依次满足经验式 (23) 和式 (25). 当 F 计

算结果为负时, 表示需要施加拉力, 才可能避免压杆失稳. 其他支承的压杆, q 对其稳定性无明显影响。

显然, 对于完全理想支承的压杆, 参照经验公式 $0.38969ql + F = \frac{\pi^2 EI}{(ul)^2}$ 计算临界载荷是比较安全的, 其中 u 为压杆的长度因数, 其值取决于压杆的支承情况。

参 考 文 献

- 1 吴晓, 杨立军, 郑长成. 轴向压力和均布载荷作用下压杆的屈曲研究. 四川建筑科学研究, 2008, 34(5): 34-35,65
- 2 张平占. BHA 受压失稳的模型及临界钻压公式. 煤田地质与勘探, 1995, 23(5): 59-62
- 3 马肖, 韩春民. 具有较大初始位移的拼组柱在分布与集中荷载共同作用下的承载能力分析. 四川建筑科学研究, 2009, 35(3): 27-29

(责任编辑: 胡 漫)