第六章

平面电磁波的传播

2011-3-15

重庆大学电气工程学院

第6章 平面电磁波的传播

1、电磁波动方程与电磁波

2、理想介质中的均匀平面电磁波

3、导电媒质中的均匀平面电磁波

4、电磁波的极化

5、平面电磁波在平面分界面的垂直入射

1. 电磁波动方程与平面电磁波

6.1.1 电磁波动方程

讨论前提： • 脱离激励源；

• 媒质 γ,ε,μ 均匀,线性,各向同性。

从电磁场基本方程组推导电磁波动方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{e}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\gamma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \left(\gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H} = -\mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0}$$

6.1.2 均匀平面波(TEM)

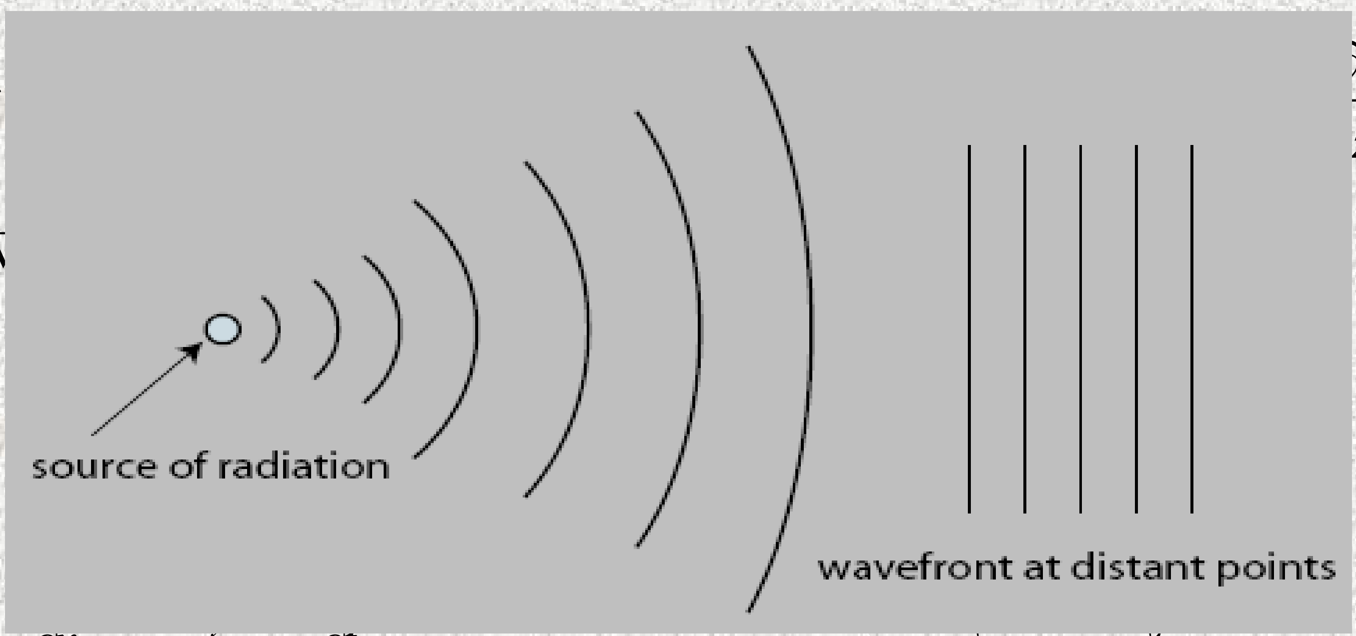
平面波：等相面（或波阵面）为平面的电磁波

均匀波：在等相面上振幅处处相等的波

横电磁波（TEM)的 ***E***、***H*** 无传播方向的分量。

设波沿 … $= 0$

由 ∇ …



(4)

(5)

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (6)$$

$$\gamma E_x + \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\gamma E_y - \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (2)$$

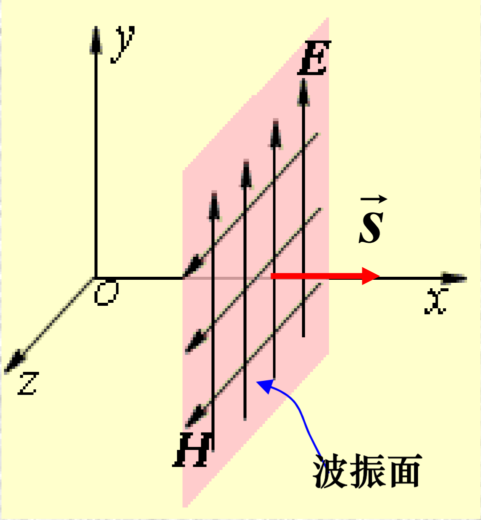
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \gamma E_z + \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (6)$$

结论



1、 $E_x=H_x=0$（时变场），沿波传播方向上无场的分量，称为TEM波。

2、 选择坐标轴，令$E_z=0$, 则 $H_y=0$,从式(2)、（6）导出一维标量波动方程

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\gamma\frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\gamma\frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

2. 理想介质中的均匀平面电磁波

6.2.1 波动方程的解及其传播特性　　$\gamma=0$

方程　$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$ 及 $$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$ 波速　$v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

方程的解　$$E_y(x,t)=E_y^+(t-\frac{x}{v})+E_y^-(t+\frac{x}{v}),\quad H_z(x,t)=H_z^+(t-\frac{x}{v})+H_z^-(t+\frac{x}{v})$$

传播特性

- 电磁波的波速　$v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}=\mathrm{c}/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}=c/n$　　　$c=3\times10^8$ m/s

- 波阻抗——入射（反射）电场与入射（反射）磁场的振幅之比

$$Z_o=\frac{E_y^+}{H_z^+}=-\frac{E_y^-}{H_z^-}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$ （欧姆）　　$$Z_o=-\frac{E_z^+}{H_y^+}=\frac{E_z^-}{H_y^-}$$

$$Z_o = \frac{E_y^+}{H_z^+} = -\frac{E_y^-}{H_z^-} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad Z_o = -\frac{E_z^+}{H_y^+} = \frac{E_z^-}{H_y^-}$$

结论

当 $\boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{E}^-)$，$\boldsymbol{H}^+(\boldsymbol{H}^-)$与 $\boldsymbol{S}^+(\boldsymbol{S}^-)$ 成右手定则时取正，否则取负。

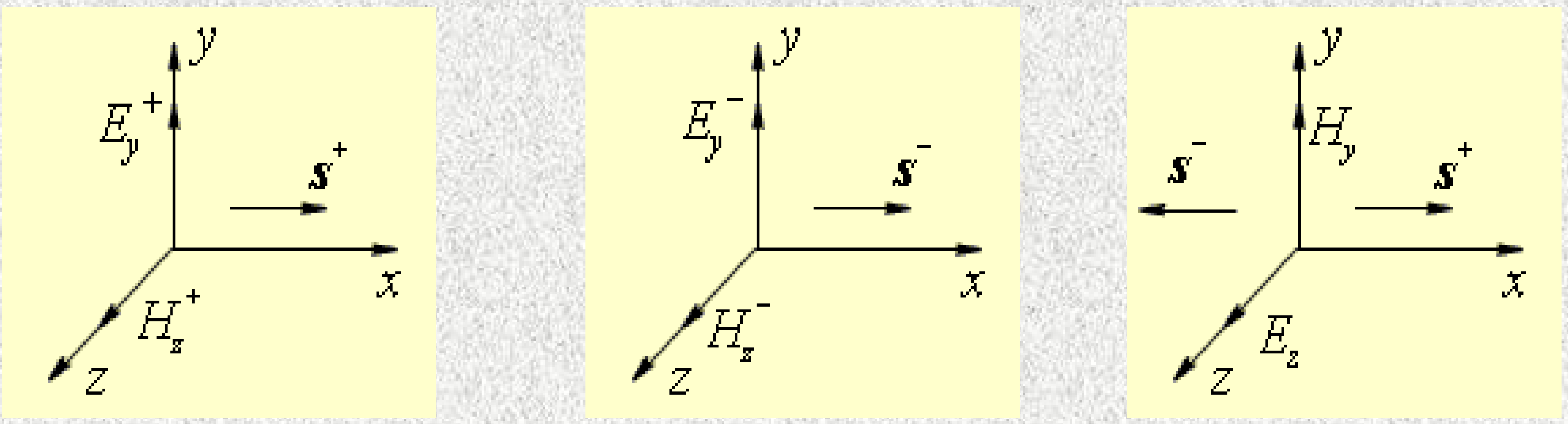


图6.2.1 电场、磁场与电磁功率流关系

- 能量的传播方向与波的传播方向一致。
- 电场能量和磁场能量相等。
- 电场、磁场和传播方向两两垂直，且满足右手定则。

6.2.2 理想介质中的正弦均匀平面电磁波

$$\frac{d^2\dot{E}_y}{dx^2}=(j\frac{\omega}{v})^2\dot{E}_y=k^2\dot{E}_y\quad,\qquad \frac{d^2\dot{H}_z}{dx^2}=(j\frac{\omega}{v})^2\ \dot{H}_z=k^2\dot{H}_z$$ 二阶常微分方程

式中 $k=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=j\beta$ ——传播常数，

$\beta=\omega/v$ —— 相位常数（rad/m）， $\lambda=2\pi/\beta$ ——波长（m）。

其解 $\dot{E}_y=\dot{E}^+e^{-j\beta x}+\dot{E}^-e^{j\beta x}$, $\dot{H}_Z=\dot{H}^+e^{-j\beta x}+\dot{H}^-e^{j\beta x}=\dfrac{1}{Z_o}(\dot{E}^+e^{-j\beta x}-\dot{E}^-e^{j\beta x})$

式中 $\dot{E}^+=E^+e^{j\varphi_+}$, 是待定常相量，由边界条件确定。

在有限时间内不考虑反射波，于是

$$\dot{E}_y=\dot{E}^+e^{-j\beta x}\qquad\qquad \dot{H}_Z=\dot{H}^+e^{-j\beta x}$$

瞬时值为

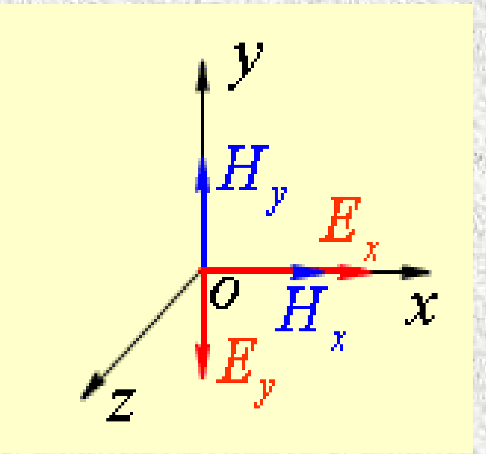
$$\mathrm{E}_y(x,t)=E_{ym}\sin(\omega t-\beta x+\varphi_E)\,\mathrm{e}_y\ \ \mathrm{V/m}$$

$$\mathrm{H}_z(x,t)=H_{zm}\sin(\omega t-\beta x+\varphi_H)\,\mathrm{e}_z\ \ \mathrm{A/m}$$

例 6.2.1 已知自由空间中 $B = 10^{-6} \sin(6\pi \times 10^{8} t - 2\pi z)(e_x + e_y)$

试求：*a.* f, v, λ, β 及传播方向；*b.* E 的表达式；*c.* S 的表达式；*d.* S_{av}

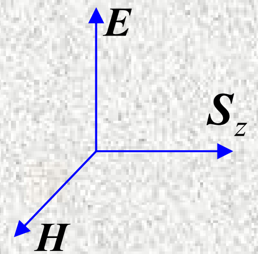
解： *a*. 波沿 +*Z* 轴方向传播；



$$\beta = 2\pi \ \text{rad/m}, \qquad \lambda = 2\pi/\beta = 1\,\text{m}$$

$$f = \omega/2\pi = 3\times10^{8}\ \text{Hz}, \qquad v = \omega/\beta = 3\times10^{8}\ \text{m/s}$$

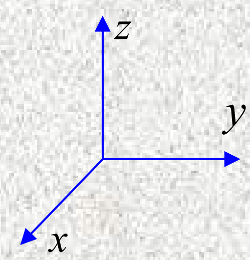
b. $$\boldsymbol{E} = Z_0 \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{e}_z \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377\,(\Omega)$$



$$\dot{E} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,(\dot{B}/\mu_0) \times e_z = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \dot{B} \times e_z = c\,\dot{B} \times e_z$$

$$= 3\times10^{8} \cdot 10^{-6} e^{-j2\pi z}(e_x + e_y) \times e_z$$

$$= 300 e^{-j2\pi z}(e_x - e_y)$$



$$\boldsymbol{E} = 300\sin(6\pi\times10^{8} t - 2\pi z)(e_x - e_y)\ \ \text{V/m}$$

c $$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{300\times10^{-6}}{4\pi\times10^{-7}}\sin^2(6\pi\times10^8t-2\pi z)\left[(\mathrm{e}_x-\mathrm{e}_y)\times(\mathrm{e}_x+\mathrm{e}_y)\right]$$

$$=477.4\sin^2(6\pi\times10^8t-2\pi z)\mathrm{e}_z\quad \mathrm{W/m^2}$$

d $$\mathrm{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{S}\,dt=\frac{1}{2}\mathrm{E}_m\times\mathrm{H}_m\cos(\phi_E-\phi_H)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{E_m^2}{Z_0}\mathrm{e}_z=\frac{1}{2}\frac{E_{xm}^2+E_{ym}^2}{Z_0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{300^2+300^2}{120\pi}\mathrm{e}_z$$

$$=238.7\mathrm{e}_z\ W/m^2$$

例 6.2.2 频率为100 MHz的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿（+z）方向传播，介质的特性参数为 $\varepsilon_r=4$, $\mu_r=1$, $\gamma=0$ **，设电场沿 x 方向，即** $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x E_x$ **；当 $t=0$，$z=1/8$m 时，电场等于其振幅值10^{-4} V/m。试求:**

（1） v、λ、β；（2）$\boldsymbol{H}(z,t)$ 和 $\boldsymbol{E}(z,t)$；（3） 平均波印廷矢量。

解: (1) 根据电场、磁场二者关系及平面波的参数定义来解题。

波速 $$v=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{4}}=1.5\times10^8 \ \text{m/s}$$

相位常数 $$\beta=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi\times100\times10^6}{1.5\times10^8}=\frac{4\pi}{3} \ \text{rad/m}$$

波长 $$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{3}{2} \ \text{m}$$

例 6.2.2 频率为100 **MHz**的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿（＋z）方向传播，介质的特性参数为 $\varepsilon_r = 4$，$\mu_r = 1$，$\gamma = 0$ 设电场沿 x 方向，即 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x$； 当 $t = 0$，$z = 1/8\text{m}$ 时，电场等于其振幅值 10^{-4} **V/m**。试求：**(2)** $\boldsymbol{H}(z, t)$ **和** $\boldsymbol{E}(z, t)$；

电场强度表示式

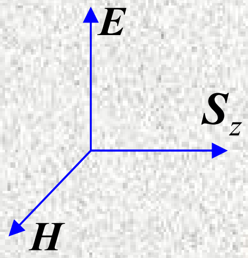
$$\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{e}_x E_x(z, t) = \boldsymbol{e}_x E_m \sin(\omega t - \beta z + \psi_E)$$

式中 $E_m = 10^{-4}$ **V/m**

又由 $t = 0$，$z = 1/8\text{m}$ **时，**$E_x(1/8, 0) = E_m = 10^{-4}$ **V/m**

得： $-\beta z + \psi_E = \dfrac{\pi}{2}$ **故：** $\psi_E = \dfrac{\pi}{2} + \beta z = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4\pi}{3} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{2\pi}{3}$ **rad** **则：**

$$\mathrm{E}(z, t) = \mathrm{e}_x 10^{-4} \sin\left[2\pi \times 10^8 t - (4\pi/3)z + 2\pi/3\right] \ \text{V/m}$$



$$\mathrm{H}(z, t) = \frac{\mathrm{e}_z \times \mathrm{e}_x E_x}{Z} = \mathrm{e}_y \left(10^{-4} / \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right) \sin\left[2\pi \times 10^8 t - (4\pi/3)z + 2\pi/3\right]$$

$$= \mathrm{e}_y (10^{-4}/60\pi) \sin\left[2\pi \times 10^8 t - (4\pi/3)z + 2\pi/3\right] \ \text{A/m}$$

（3）平均波印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^{*}]$$

式中：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x 10^{-4}e^{-\mathrm{j}\left(\frac{4\pi}{3}z-\frac{2\pi}{3}\right)} \qquad \boldsymbol{H}^{*}=\boldsymbol{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}e^{\mathrm{j}\left(\frac{4\pi}{3}z-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

故：

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_x 10^{-4}e^{-\mathrm{j}\left(\frac{4\pi}{3}z-\frac{2\pi}{3}\right)}\times\boldsymbol{e}_y\frac{10^{-4}}{60\pi}e^{\mathrm{j}\left(\frac{4\pi}{3}z-\frac{2\pi}{3}\right)}\right]$$

$$=\boldsymbol{e}_z\frac{10^{-8}}{120\pi}\quad \mathbf{w/m^2}$$

掌握如何计算自由空间中平面波的场分量和参数。掌握电场与磁场的关系，从概念和具体数值两方面加强对电磁波参数的理解和认识。理想介质中电磁波的传播速度是很快的，和光速数量级相同。

结束

- 已知 $E_y = E_y^+(t-\frac{x}{v}) + E_y^-(t+\frac{x}{v}),\qquad H_z = H_z^+(t-\frac{x}{v}) + H_z^-(t+\frac{x}{v}),$

由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[H_z^+(t-\frac{x}{v}) + H_z^-(t+\frac{x}{v})\right] = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[E_y^+(t-\frac{x}{v}) + E_y^-(t+\frac{x}{v})\right]$$

$$= \frac{1}{\mu v}\left[E_y^+(t-\frac{x}{v})\right]' - \frac{1}{\mu v}\left[E_y^-(t+\frac{x}{v})\right]' = \frac{1}{Z_o}\left[E_y^+(t-\frac{x}{v})\right]' - \frac{1}{Z_o}\left[E_y^-(t+\frac{x}{v})\right]'$$

$$Z_0 = \mu v = \mu \big/ \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

对 t 积分后，有

$$H_z^+(t-\frac{x}{v}) + H_z^-(t+\frac{x}{v}) = \frac{1}{Z_o}E_y^+(t-\frac{x}{v}) - \frac{1}{Z_o}E_y^-(t+\frac{x}{v})$$

在有限时间内不考虑反射波，则有

$$H_z^+(t-\frac{x}{v}) = \frac{1}{Z_o}E_y^+(t-\frac{x}{v}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_o = \frac{E_y^+}{H_z^+}}$$

对于反射波:

$$H_z^-(t+\frac{x}{v}) = -\frac{1}{Z_o}E_y^-(t+\frac{x}{v}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_o = -\frac{E_y^-}{H_z^-}}$$

- 若已知

$$E_z = E_z^+(t-\frac{x}{v}) + E_z^-(t+\frac{x}{v}) \qquad H_y = H_y^+(t-\frac{x}{v}) + H_y^-(t+\frac{x}{v})$$

由 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_o = -\frac{E_z^+}{H_y^+} = \frac{E_z^-}{H_y^-}}$$

返回

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\gamma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\left(\gamma E_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\gamma E_y+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\gamma E_z+\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=-\frac{\partial}{\partial x}H_z\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial x}H_y\boldsymbol{e}_z$$

$$\gamma E_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\gamma E_y-\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=\gamma E_z+\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (3)$$

返回

均匀平面波的能流

电场能量密度 w_e

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon(E_y^+)^2=\frac{1}{2}\varepsilon(ZH_z^+)^2=\frac{1}{2}\mu(H_Z^+)^2=w_m$$

磁场能量密度 w_m

正向行波总能量密度

$$w^+=\frac{1}{2}\varepsilon(E_y^+)^2+\frac{1}{2}\mu(H_Z^+)^2=\varepsilon(E_y^+)^2=\mu(H_Z^+)^2$$

反向行波总能量密度

$$w^-=\frac{1}{2}\varepsilon(E_y^-)^2+\frac{1}{2}\mu(H_Z^-)^2=\varepsilon(E_y^-)^2=\mu(H_Z^-)^2$$

正向行波的坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S}^+=\boldsymbol{E}^+\times\boldsymbol{H}^+=E_y^+H_z^+\,\boldsymbol{e}_x=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_z^+)^2\,\boldsymbol{e}_x=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\left[\mu(H_z^+)^2\right]\boldsymbol{e}_x=v\,w^+\,\boldsymbol{e}_x$$

表明电磁能量以速度$\boldsymbol{v}$ 沿波的传播方向传播，因此$\boldsymbol{S}$也称为能流密度。

反向行波的坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S}^-=\boldsymbol{E}^-\times\boldsymbol{H}^-=E_y^-H_z^-\,\boldsymbol{e}_x=-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(H_z^-)^2\,\boldsymbol{e}_x=-v\,w^-\,\boldsymbol{e}_x$$

返回

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(x,t) = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\because \ \nabla \times \boldsymbol{E}(x,t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \boldsymbol{e}_z$$

$$= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore \ \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

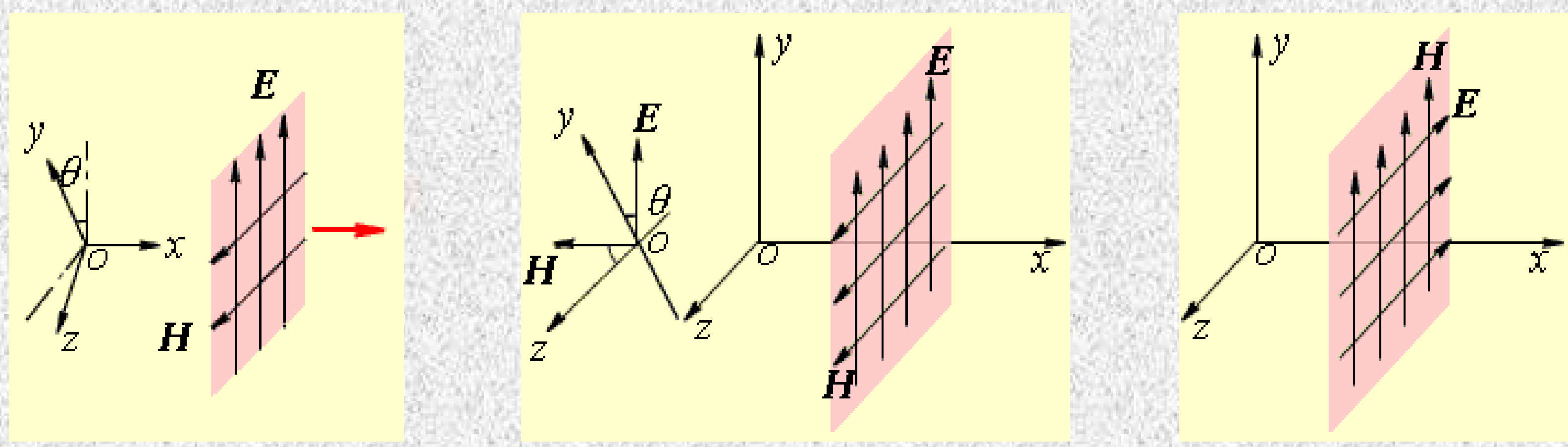
返回

• 由式 (1) $\gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ 解得 $E_x = E_{xo} e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon} t}$

通常 $\gamma >$ 则 E_x 随时间按指数规律很快衰减为零，故可取 $E_x=0$ 。

• 由式 (4) $\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$， H_x是与时间无关的恒定分量，

在波动问题中，常量没有意义，故可取 $H_x=0$。因此，均匀平面波的场量没有波传播方向上的分量。



(a) (b) (c)

图7.1.1 沿 x 方向两组彼此独立的均匀平面波

返回

$$\dot{E}_y = \dot{E}^+ e^{-\mathrm{j}\beta x} \qquad \dot{H}_Z = \dot{H}^+ e^{-\mathrm{j}\beta x}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}(x) = -\mathrm{j}\omega\mu \dot{\boldsymbol{H}}(x)$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{E}_{\boldsymbol{y}}^+ e^{-\mathrm{j}\beta x} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \dot{E}_y^+ e^{-\mathrm{j}\beta x}}{\partial x} \boldsymbol{e}_z = -\mathrm{j}\beta \dot{E}_y^+ e^{-\mathrm{j}\beta x} \boldsymbol{e}_z$$

$$= -\mathrm{j}\omega\mu H_z^+ e^{-\mathrm{j}\beta x} \boldsymbol{e}_z$$

即:

$$-\mathrm{j}\beta \dot{E}_y^+ e^{-\mathrm{j}\beta x} = -\mathrm{j}\omega\mu H_z^+ e^{-\mathrm{j}\beta x}$$

则:

$$\frac{\dot{E}_y^+}{H_z^+} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$$

返回

3. 导电媒质中的均匀平面电磁波

6.3.1 有阻尼波动方程一维解

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$$

正弦电磁波的波动方程复数形式为

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} = (j\omega\mu\gamma - \omega^2\mu\varepsilon)\dot{E}_y = k^2 \dot{E}_y \,, \qquad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} = k^2 \dot{H}_z$$

式中 $\boldsymbol{k}^2 = (\boldsymbol{j}\omega)^2 \mu(\varepsilon + \frac{\gamma}{\boldsymbol{j}\omega}) = (j\omega)^2 \mu\varepsilon'$ ，$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\gamma}{\boldsymbol{j}\omega}$ —— 复介电常数

用 $k = \alpha + j\beta$ 和 ε' 分别替换理想介质中的 相位常数 和 ε，

$$\dot{\boldsymbol{E}}_y = \dot{\boldsymbol{E}}_y^+ e^{-kx} = \dot{\boldsymbol{E}}_y^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \qquad \dot{\boldsymbol{H}}_z = \dot{\boldsymbol{H}}_z^+ e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

波阻抗: $\mathrm{Z}_0 = \frac{\dot{\boldsymbol{E}}_y^+}{\dot{\boldsymbol{H}}_z^+} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\mu/(\varepsilon - \boldsymbol{j}\frac{\gamma}{\omega})} = |\mathrm{Z}_0| \mathrm{e}^{j\varphi}$ ， $\varphi = \frac{1}{2}\mathbf{tg}^{-1}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}$

φ 是 $\dot{E}_y$ 与 $\dot{H}_z$ 之间的相位角,与频率有关

设电场初相角 $\varphi_E=0$，则电磁场瞬时表达式为：

$$\boldsymbol{E}=\sqrt{2}E_y^+e^{-\alpha x}\,\boldsymbol{sin}(\omega t-\beta x)\boldsymbol{e}_y\ \ \text{V/m}\ ,\qquad \boldsymbol{H}=\frac{\sqrt{2}E_y^+}{|\mathrm{Z}_0|}e^{-\alpha x}\,\boldsymbol{sin}(\omega t-\beta x-\varphi)\boldsymbol{e}_z\ \ \text{A/m}$$

结论:

1、减幅波，波沿传播方向衰减的快慢由 α 决定。 $\alpha=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}$

2、$\dot{\boldsymbol{E}}_y$ 与 $\dot{\boldsymbol{H}}_z$ 不同相变化 $\dot{\boldsymbol{H}}_z$ 滞后于 $\dot{\boldsymbol{E}}_y$ 角度 φ。

3、相速:
$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\sqrt{\frac{2}{\mu\varepsilon}}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

相速随频率变化，信号失真，这种现象称为色散现象，因此称导电媒质为色散媒质。

波长 λ 与频率和 γ 有关

4、坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S}_{av}=\boldsymbol{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_y^+\times\overset{*}{\boldsymbol{H}}{}_z^+\right]=\frac{1}{\mathrm{Z}_0}(\boldsymbol{E}_y^+)^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha x}\,\boldsymbol{cos}\,\varphi\,\boldsymbol{e}_x$$

6.3.2 良导体中的波参数、集肤效应

在电磁波传播问题中，判断导体的导电性，不是简单的根据导电率γ，而是根据传导电流与位移电流的比值决定的。

如果 $\dfrac{J_c}{J_D}=\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}>>1$ 或 $\gamma>>\omega\varepsilon$ 称为良导体。 复介电系数：$\varepsilon'=\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\gamma}{\omega}\approx-\mathrm{j}\dfrac{\gamma}{\omega}$

传播常数： $k=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\approx\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu(-\mathrm{j}\dfrac{\gamma}{\omega})}=\sqrt{\mathrm{j}\omega\mu\gamma}=\sqrt{\omega\mu\gamma}\ \angle 45^0$

衰减常数、相位常数： $\alpha=\beta=\sqrt{\dfrac{\omega\mu\gamma}{2}}$

波阻抗： $Z_0=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon'}}=\sqrt{\mu/(\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\gamma}{\omega})}=\sqrt{\mathrm{j}\dfrac{\omega\mu}{\gamma}}=\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\gamma}}\ \angle 45^\circ$

波长：$\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\gamma}}$ 相速： $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}=\sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\gamma}}$

当 $f\uparrow$, 时电磁波迅速衰减，场量仅存在于导体表面的薄层内，这种现象成为集肤效应。

弊：使导体有效利用面积减少，电阻增大，导致损耗增加。

应用： 1、高频淬火，2、电磁屏蔽。

理想介质与良导体中均匀平面波传播特性的比较。

例 6.4(1) 已知蒸馏水的 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=50$，设，$\gamma=20$ S/m 和 $f_1=30\ k\text{Hz}$

$f_2=15.9\times10^6\,k\text{Hz}$ 的均匀平面波分别在蒸馏水中传播，试计算两种频率下的

$\boldsymbol{k},\alpha,\beta,Z_0,\lambda$,和 $\boldsymbol{v_p}$；（2）若有某一介质（$\mu_r=1,\varepsilon_r=$ 重新计算）

上述两种均匀平面波在该介质中传播的λ和 v_p

解（1）当 $f_1=30\,\text{kHz}$ 时

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{20}{2\pi\times30\times10^3\times50\times8.85\times10^{-12}}=2.4\times10^5>>1$$

此时蒸馏水为良导体

$$k=\alpha+j\beta$$

$$\alpha=\beta=\sqrt{\pi f\mu\gamma}=153.9\times10^{-2}$$

$$=153.9\times10^{-2}+j153.9\times10^{-2}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\angle45^\circ=\sqrt{\frac{2\pi\times30\times10^3\times4\pi\times10^{-7}}{20}}\angle45^\circ=10.883\times10^{-2}\ \angle45^\circ(\Omega)$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{153.9\times10^{-2}}=4.083\,(\text{m})\qquad v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2\pi\times30\times10^3}{153.9\times10^{-2}}=1.225\times10^5\ \ (\text{m/s})$$

当 $f_2 = 15.9\times10^6\ \text{kHz}$ 时

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} = \frac{20}{2\pi\times15.9\times10^9\times50\times8.85\times10^{-12}} = 0.452$$

蒸馏水不能作为良导体处理，为有损耗介质

$$k = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} = \text{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\text{j}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}} = 519.5 + \text{j}2410.94$$

$\alpha = 519.5\ \ (\text{Np/m})$ ，$\beta = 2410.94\ \ (\text{rad/m})$

$$\text{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = 50.9\angle12.2^{\circ}\,(\Omega)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2.606\times10^{-3}\ (\text{m})$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = 4.144\times10^{7}\ \ (\text{m/s})$$

(2) 理想介质，当 $f_1 = 30\ k\text{Hz}$ 时	蒸馏水
$v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = c/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = 3\times10^8/\sqrt{50} = 4.243\times10^7\ \text{m/s}$	$1.225\times10^5\ (\text{m/s})$
$\lambda = v_p / f = 1.414\times10^3\ \text{m}$	$4.083\ (\text{m})$
$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f / v_p = 4.443\times10^{-3}\ \text{rad/m}$	$153.9\times10^{-2}(\text{rad/m})$
当 $f_2 = 15.9\times10^9\ \text{Hz}$ 时	
$v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = 4.243\times10^7\ \text{m/s}$	$4.144\times10^7\ (\text{m/s})$
$\lambda = v_p / f = 2.669\times10^{-3}\ \text{m}$	$2.606\times10^{-3}\ (\text{m})$

说明 （1）当 $f_1 = 30\,k\text{Hz}$ 时，蒸馏水为良导体，由于相位常数 β 大，因此相速 $v_p = \dfrac{\omega}{\beta}$ 比理想介质低得多，波长 $\lambda = \dfrac{v_p}{\beta}$ 也比理想介质低许多；

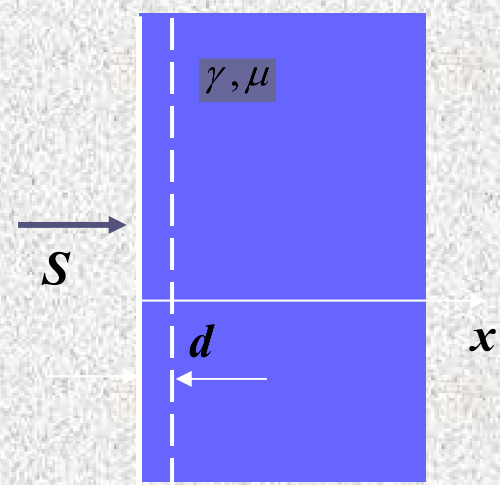
(2)当 $f_2 = 15.9\times10^6\ k\text{Hz}$ 时,蒸馏水为不良导体，与理想介质同频率下的 v_p 和 λ 接近，由此可见，一种媒质是否为良导体是相对的。

(3) 因为蒸馏水中 $Z_0(f_1) << Z_0(f_2)$ 说明在良导体中的电磁场以磁场分量为主

$$\frac{w_m}{w_e} = \left(\frac{1}{2}\mu(\dot{H}_z^+)^2\right) / \left(\frac{1}{2}\varepsilon(\dot{E}_y^+)^2\right) = \mu/\varepsilon\left|Z_0\right|^2 = \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\gamma}{\omega\mu} = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon} >> 1$$

6.3.3 透入深度 d

定义：波从导体表面向导体内部传播，经一段距离后，其值衰减到表面值的 $1/e$，这个距离称为该导体的透入深度，用 d 表示。



设 $\dot{E}_y^+ e^{-\alpha x}$ 为导体中传播的电场，根据定义，有

$$\dot{E}_y^+ e^{-\alpha d} = \dot{E}_y^+ e^{-1} \quad \therefore \alpha d = 1 \quad 或 \quad d = \frac{1}{\alpha}$$

一般情况：

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

良导体：$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}$，当 $f\uparrow$，$d\downarrow$，即随频率增高，波迅速衰减。

说明：

1、透入深度 d 仅表示场强或电流密度在该处衰减到表面值得 $1/e$，在大于 d 的地区，仍有电磁波存在,并继续衰减, d 越小，表示电磁波衰减的越快。

2、透入深度 d 与 γ,μ,f 平方根成反比，所以，γ,μ,f 越大，d 越小。

3、对于平板导体,场量按指数规律变化,对于圆柱体,如果曲率半径 $R >> d$，则可将圆柱体近似看成平板导体。

透入深度 ***d*** 用于电磁屏蔽

当场量行进 **4—5 *d*** 时，可认为电磁波衰减完了，

因为 $\lambda = 2\pi/\beta$ 对于良导体 $\beta \approx \alpha$

所以 $\lambda = 2\pi/\alpha = 2\pi d \approx 6d$

屏蔽厚度取一个波长即可，例如 铝：

$$\gamma = 3.8\times10^{7}\ \mathrm{S}/\boldsymbol{m} \quad \mu = \mu_0 \quad \text{当}\ f = 1\ \boldsymbol{MHz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^{6}\times4\pi\times10^{-7}\times3.8\times10^{7}}} = 0.513\times10^{-3}\ \mathrm{m} = 0.513\ \mathrm{mm}$$

例：设 **a = 2 mm** 求在 ***f*** **=1MHz**情况下铜线（$\gamma = 5.8\times 10^{7}$ 西/米）单位长度的等效交流电阻。

解：因为

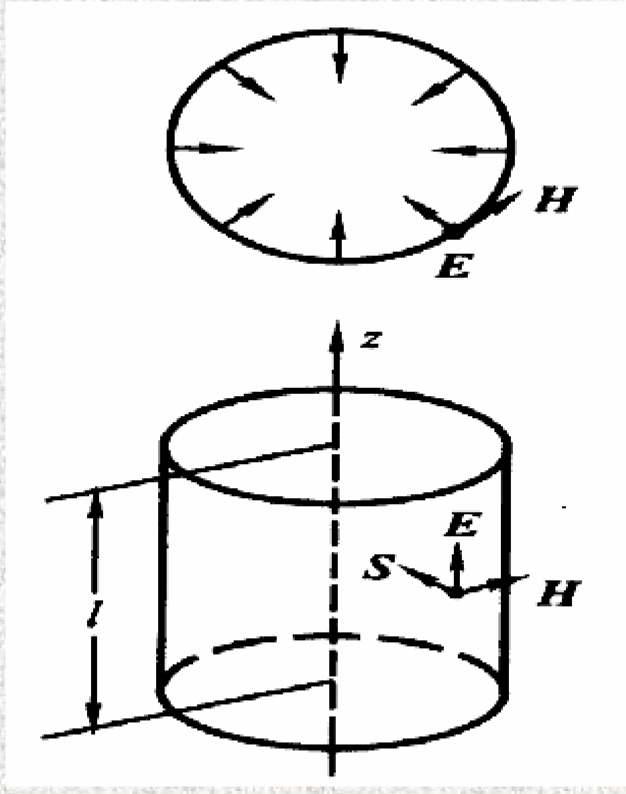
$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}} = 0.066\times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 0.066\mathrm{mm} << a$$

$$S_{eff} = 2\pi a\cdot d = 0.83\times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$R'_{ac} = \frac{1}{\gamma S_{eff}} \approx 2.08\times 10^{-2}\ \Omega/\mathrm{m}$$

$$R'_{dc} = \frac{1}{\gamma \pi a^2} = 1.37\times 10^{-3}\ \Omega/\mathrm{m}$$

$$\frac{R'_{ac}}{R'_{dc}} = 15.2$$



4. 平面电磁波的极化

电磁波的极化特性 —— 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 矢量末端随时间在等相位面上的变化轨迹。

7.4.1 直线极化

电场的两个分量振幅不等 但相位相同

$$E_y = E_{ym} sin(\omega t - \beta x + \varphi), \quad E_z = E_{zm} sin(\omega t - \beta x + \varphi)$$

在 $x=0$ 的等相面上，上述两分量分别为

$$E_y(0,t) = E_{ym}\sin(\omega t + \varphi), \qquad E_z(0,t) = E_{zm}\sin(\omega t + \varphi)$$

合成后

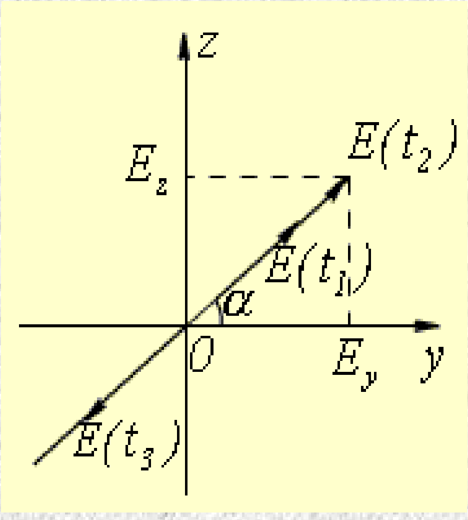


图6.4.1 直线极化的平面波

$$\mathrm{E} = E_{ym} sin(\omega t + \varphi)\mathrm{e}_y + E_{zm}\sin(\omega t + \varphi)\mathrm{e}_z$$

$$= (E_{ym}\mathrm{e}_y + E_{zm}\mathrm{e}_z)\sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{E_{ym}^2 + E_{zm}^2}\sin(\omega t + \varphi)\mathrm{e}_\alpha$$

$$\tan\alpha = E_z / E_y = E_{zm} / E_{ym} = \text{常数}$$

由于 α 不随时间变化，所以 $\boldsymbol{E}$ 矢量始终与 y 轴成 角的直线上。

如果电场只有 y 分量，则场强末端随着时间变化的轨迹沿着 y 轴，通常称它为沿 y 轴取向的极化波。

6.4.2 圆极化

特点：E_y 和E_z 振幅相同，相位差90° 。

$$E_y = E_m \sin(\omega t - \beta x + \varphi)\,, \qquad E_z = E_m \cos(\omega t - \beta x + \varphi)$$

合成后 $$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = C$$

$$\tan\alpha = \frac{E_z}{E_y} = \tan(\omega t + \varphi)$$

合成电场的方向随时间以角速度ω改变

当 E_y 超前 E_z时顺着波传播方向为右旋。

当 E_y 滞后E_z时，顺着波传播方向为左旋。

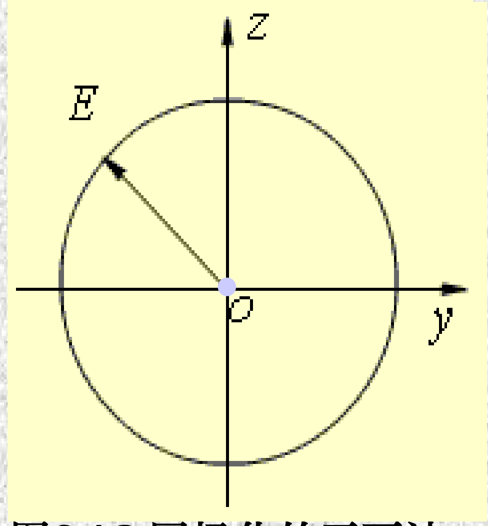
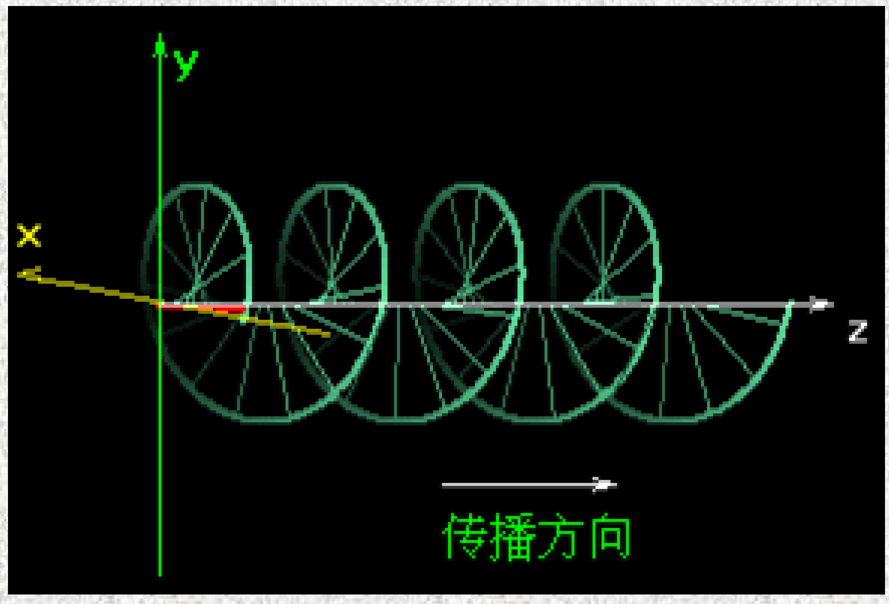
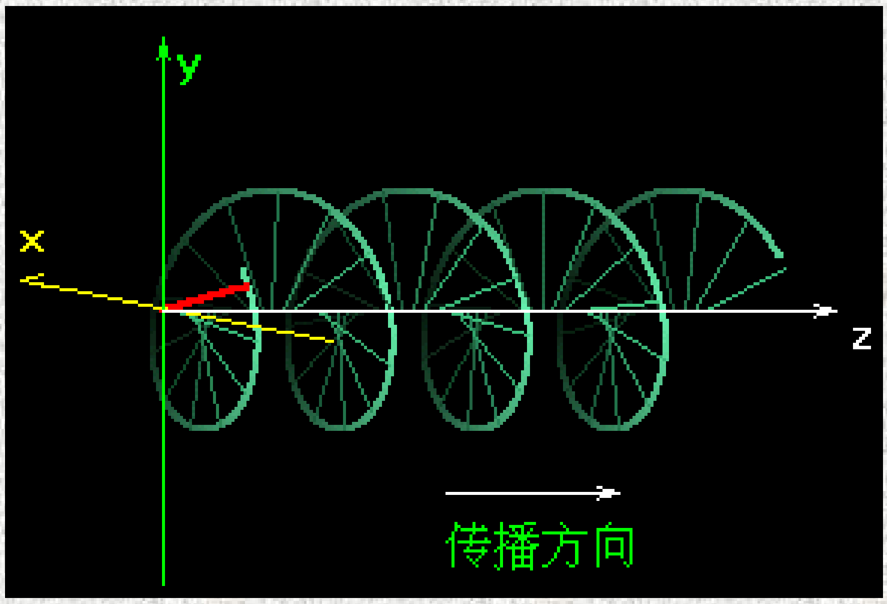


图6.4.2 圆极化的平面波





右旋极化波

左旋极化波

6.4.3 椭圆极化

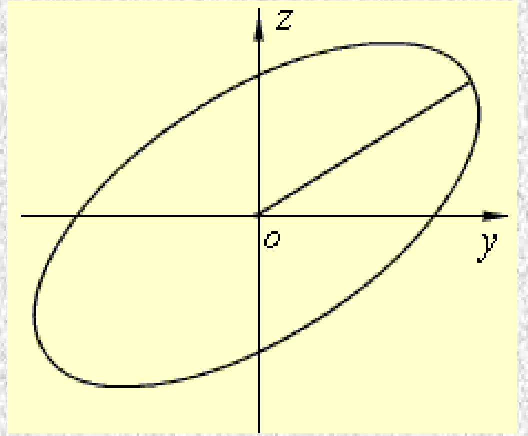


图6.4.3 椭圆左极化的平面波

$$E_y = E_{ym} \sin \omega t$$

$$E_z = E_{zm} sin(\omega t - \varphi)$$

特点： E_y 和 E_z 的振幅不同，相位不同。

合成后

$$\frac{E_y^2}{E_{ym}^2} + \frac{E_z^2}{E_{zm}^2} - \frac{2E_y E_z}{E_{ym} E_{zm}} cos\,\varphi = sin^2 \varphi$$

可以证明，椭圆的长轴与 y 轴的夹角为

$$\tan 2\beta = \frac{2E_{ym} E_{zm} cos\varphi}{E_{ym}^2 E_{zm}^2}$$

椭圆极化与圆极化类同，分右旋极化和左旋极化。

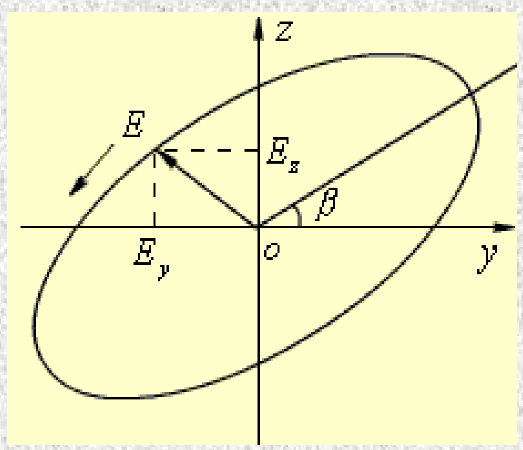
讨论与引伸

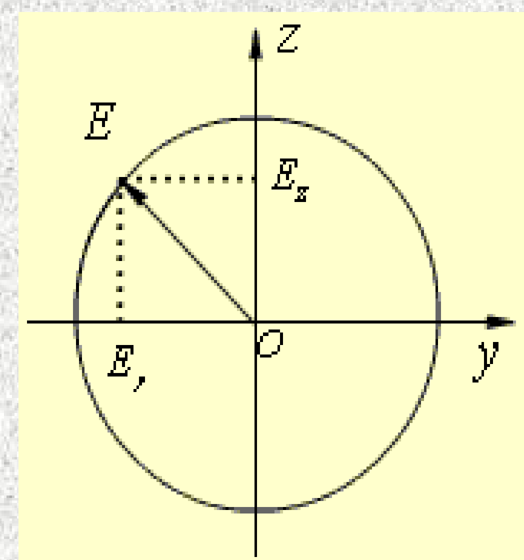
- 当 $\varphi=90^\circ$，$E_{ym}=E_{zm}=E_m$ 时，椭圆极化 → 圆极化。

- 当 $\varphi=0$ 时，椭圆极化 → 直线极化。

若 $\boldsymbol{E}$ 的变化轨迹在 $\boldsymbol{y}$ 轴上 $(\alpha=0)$，称为 $\boldsymbol{y}$ 轴取向的线极化波。

若 $\boldsymbol{E}$ 的变化轨迹在 z 轴上 $(\alpha=90^\circ)$，称为 z 轴取向的线极化波。





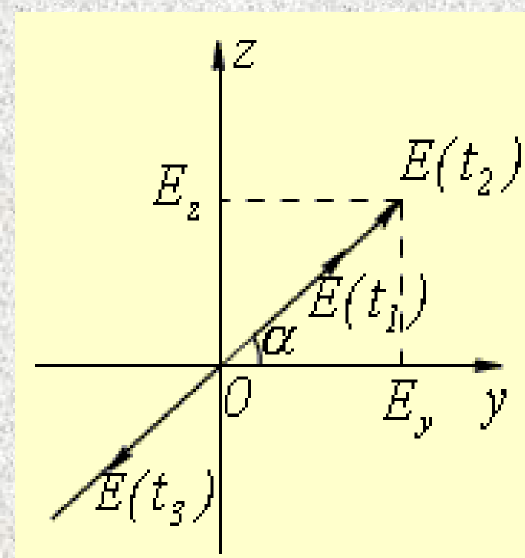


图6.4.4 椭圆、圆与直线极化的关系

例6.5 证明两个振幅相同，旋转方向相反的圆极化波可合成一直线极化波。

证明：设

$$\boldsymbol{E}_1(z\ ,\ t)=\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{sin}(\omega t-\beta x+\varphi)\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{sin}\left(\omega t-\beta x+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_z$$

为左旋极化波

$$\boldsymbol{E}_2(z\ ,\ t)=\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{sin}(\omega t-\beta x+\varphi)\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{E}_m\ \boldsymbol{sin}\left(\omega t-\beta x+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_z$$

为右旋极化波

合成波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=2E_m\ \boldsymbol{sin}(\omega t-\beta\ x+\varphi)\boldsymbol{e}_y$

可见，合成波是一沿*y*方向的直线极化波。反过来，一直线极化波可以分解成两个幅值相等，旋转方向相反的圆极化波。

例6.6 有一垂直穿入纸面（x=0)的平面电磁波，由两个直线波 $E_z=3\,\boldsymbol{sin}(\omega t)$ 和 $E_y=2\,\boldsymbol{sin}(\omega t+\pi/2)$ 组成，试问合成波是否为椭圆极化波？如果是，那么是右旋波还是左旋波？

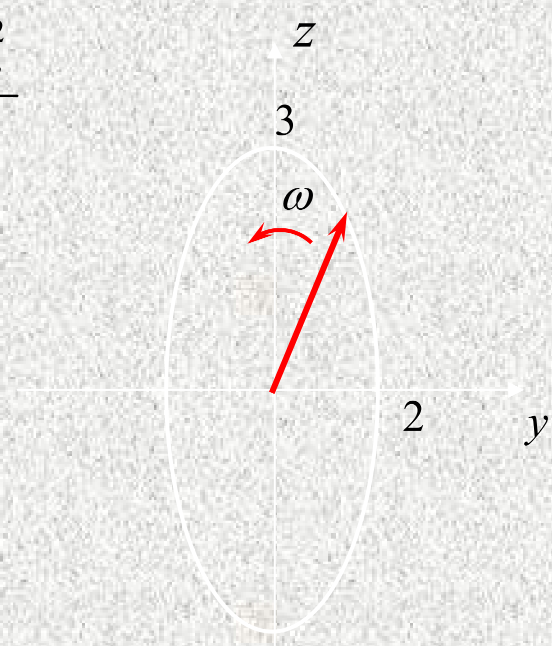
解:

$$E_z=3\,\boldsymbol{sin}(\omega t)$$

$$E_y=2\,\boldsymbol{sin}(\omega t+\pi/2)=2\,\boldsymbol{cos}(\omega t)$$

$$\boldsymbol{sin}^2\omega t=\frac{E_z^2}{9}\qquad\qquad \boldsymbol{cos}^2\omega t=\frac{E_y^2}{4}$$

$$\frac{E_z^2}{9}+\frac{E_y^2}{4}=\boldsymbol{sin}^2\omega t+\boldsymbol{cos}^2\omega t=1$$



为椭圆方程，右旋波。

表一 理想介质与良导体中均匀平面波的传播特性的比较

	理想介质	良导体
相同点	• E 与 H 除与时间 t 有关外，仅与传播方向的坐标有关 • 沿传播方向没有 E 与 H 的分量，即为TEM波 • $E \times H$ 与 S 的传播方向一致，三者在空间上相互垂直	
不同点	• 等幅波 • 波阻抗为实数 • $\dot{E}$ 与 $\dot{H}$ 同相 • 相速与 ω 无关，电磁波为非色散波	• 减幅波 • 波阻抗为复数 • $\dot{E}$ 超前 $\dot{H}$ 45° • 相速与 ω 有关，电磁波为色散波。

返回

$$k^2=(j\omega)^2\mu(\varepsilon+\frac{\gamma}{j\omega})=(\alpha+j\beta)^2$$

$$-\omega^2\mu\varepsilon+j\omega\mu\gamma=\alpha^2-\beta^2+j2\alpha\beta$$

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-\omega^2\mu\varepsilon\\ 2\alpha\beta=\omega\mu\gamma\end{cases}$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}$$

Np/m (奈伯/米) —— **衰减常数**

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}$$

弧度/米 —— **相位常数**

返回

5. 平面电磁波在平面分界面的垂直入射

6.5.1 均匀平面电磁波对理想导体的垂直入射

首先研究理想介质与理想导体分界面上的垂直入射情况。由于理想导体内部不存在时变场，即 $\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{H}=0$。垂直入射波到达分界面时将被反射回去，故只需讨论理想介质中的场。设场量参考方向如图。

在理想介质中

入射波 $\dot{E}_y^+ = \dot{E}_m^+ e^{-j\beta x}$ $\qquad \dot{H}_z^+ = \dfrac{\dot{E}_m^+}{Z_0} e^{-j\beta x}$

反射波 $\dot{E}_y^- = \dot{E}_m^- e^{j\beta x}$

合成波 $\dot{E} = \dot{E}_y^+ + \dot{E}_y^- = \dot{E}_m^+ e^{-j\beta x} + \dot{E}_m^- e^{j\beta x}$

由边界条件 $\dot{E}_y\Big|_{x=0} = \left(\dot{E}_m^+ e^{-j\beta x} + \dot{E}_m^- e^{j\beta x}\right)\Big|_{x=0} = 0$

得 $\dot{E}_m^- = -\dot{E}_m^+$

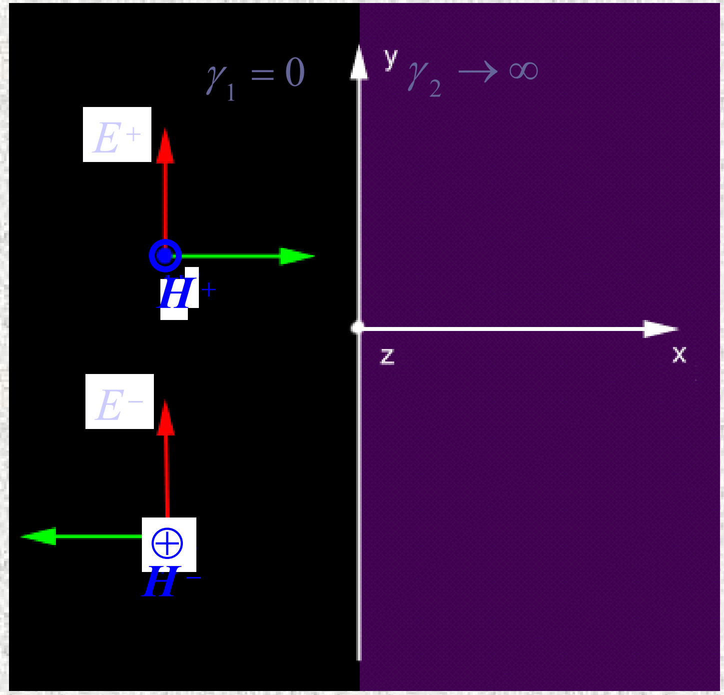


图6.6.1 理想导体表面的正入射

反射波的磁场 $\dot{H}_z^- = -\frac{E_y^-}{Z_0} = -\frac{E_m^-}{Z_0} e^{j\beta x} = \frac{E_m^+}{Z_0} e^{j\beta x}$

合成波可写成

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \dot{E}_m^+ e^{-j\beta x} + \dot{E}_m^- e^{j\beta x} \\ &= \dot{E}_m^+ \left(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x}\right) = -\mathrm{j}2\dot{E}_m^+ \sin\beta x\end{aligned}$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_z^+ + \dot{H}_z^- = \frac{E_m^+}{Z_0}\left(e^{-\mathrm{j}\beta x} + e^{\mathrm{j}\beta x}\right) = \frac{2E_m^+}{Z_0}\cos\beta x$$

瞬态形式

$$\begin{aligned}E_y(x,t) &= \mathrm{Im}\left[E_y \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[-\mathrm{j}2E_m^+ \sin(\beta x) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ &= 2E_m^+ \sin(\beta x)\cos(\omega t)\end{aligned}$$

同样可得 $H_z(x,t) = \frac{2E_m^+}{Z_0}\cos(\beta x)\sin(\omega t)$

特点:

1. 振幅随 *x* 作正弦变化,相位与*x* 无关,无波动性,称为驻波。

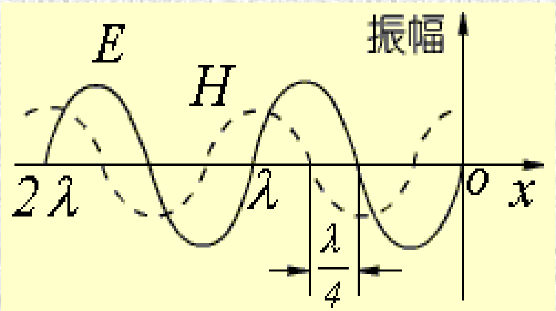
$$E_y(x,t)=2E_m^+\sin(\beta x)\cos(\omega t) \qquad H_z(x,t)=\frac{2E_m^+}{Z_0}\cos(\beta x)\sin(\omega t)$$

2. 波节与波腹

(1) 当 $\beta x=-n\pi$， $x=-\dfrac{n\pi}{\beta}=-\dfrac{n\lambda}{2}$， $n=0,1,2,\cdots$时， $E_y=0$，**称为波节。**

(2) 当 $\beta x=-\dfrac{2n+1}{2}\pi$， $x=-\dfrac{2n+1}{4}\lambda$， $n=0,1,2,\cdots$时， E_y **最大,称为波腹。**

(3) **波节与波腹的空间位置相差** $\lambda/4$



(4) ***E* 的波节点是*H* 的波腹点；**

***E* 的波腹点是 *H* 的波节点；**

(5) **驻波不传输能量**

$$\boldsymbol{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{j}2E_m^+\sin(\beta x)\times\boldsymbol{e}_z\frac{2E_m^+}{Z_0}\cos(\beta x)\right]=0$$

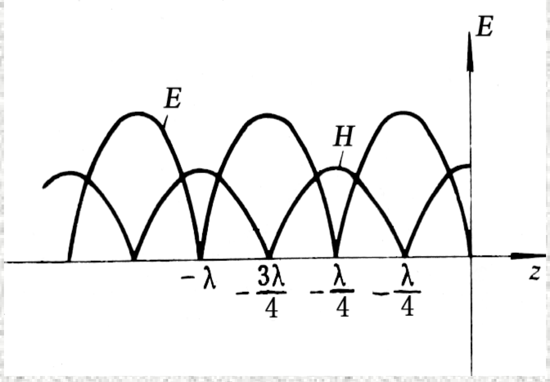


图6.6.2 波腹与波节

能量在 $\lambda/4$空间进行电能与磁能的交换。

3．完纯导体表面必有感应电流。

当x=0处，即分界面上

$$E_y(0,t)=2E_m^+\sin(\beta x)\cos(\omega t)=0$$

$$H_z(0,t)=\frac{2E_m^+}{Z_0}\cos(\beta x)\sin(\omega t)=\frac{2E_m^+}{Z_0}\sin(\omega t)$$

感应电流： $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}$

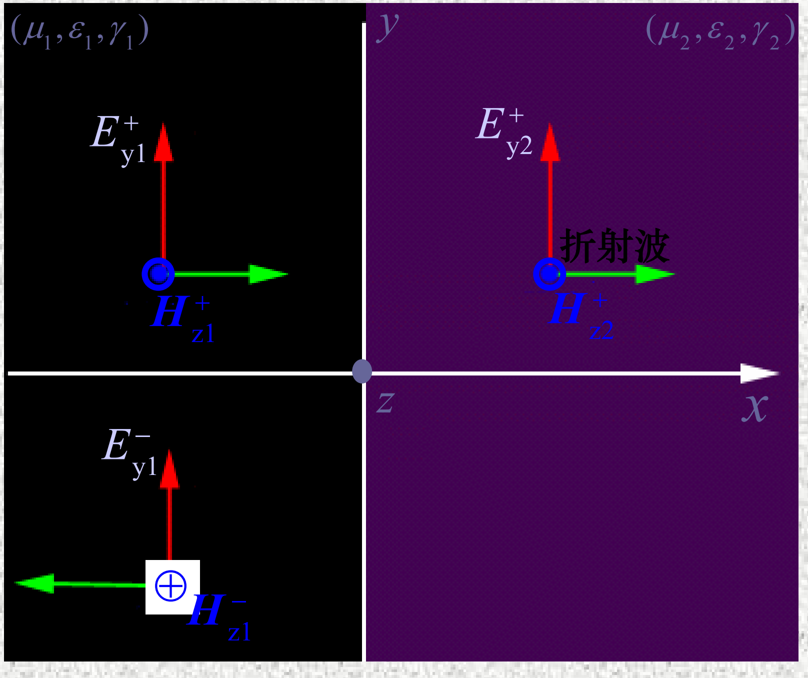
6.5.2 均匀平面电磁波在两种导电媒质分界面的垂直入射

入射波 $\dot{E}^{+}_{y1} = \dot{E}^{+}_{m1} e^{-k_1 x}$， $\dot{H}^{+}_{z1} = \dfrac{E^{+}_{m1}}{Z_{01}} e^{-k_1 x}$

反射波 $\dot{E}^{-}_{y1} = \dot{E}^{-}_{m1} e^{k_2 x}$， $\dot{H}^{-}_{z1} = -\dfrac{E^{-}_{m1}}{Z_{01}} e^{k_1 x}$

折射波

$$\dot{E}_{y2} = \dot{E}^{+}_{y2} = \dot{E}^{+}_{m2} e^{-k_2 x}, \quad \dot{H}_{z2} = \frac{E^{+}_{m2}}{Z_{02}} e^{-k_2 x}$$



平面波垂直入射到两种导电媒质分界面上

区域1的合成波

$$\dot{E}_{y1} = \dot{E}^{+}_{y1} + \dot{E}^{-}_{y1} = \dot{E}^{+}_{m1} e^{-kx} + \dot{E}^{-}_{m1} e^{kx} \qquad \dot{H}_{z1} = \frac{\dot{E}^{+}_{m1}}{Z_{01}} e^{-k_1 x} + \frac{\dot{E}^{-}_{m1}}{Z_{01}} e^{k_1 x}$$

由边界条件

$$\dot{E}_{y1}\Big|_{x=0} = \dot{E}_{y2}\Big|_{x=0} \Rightarrow \dot{E}^{+}_{m1} + \dot{E}^{-}_{m1} = \dot{E}^{+}_{m2}$$

$$\dot{H}_{z1}\Big|_{x=0} = \dot{H}_{z2}\Big|_{x=0} \Rightarrow \frac{\dot{E}^{+}_{m1}}{Z_{01}} - \frac{\dot{E}^{-}_{m1}}{Z_{01}} = \frac{\dot{E}^{+}_{m2}}{Z_{02}}$$

$$\dot{E}_{y1}\Big|_{x=0} = \dot{E}_{y2}\Big|_{x=0} \;\Rightarrow\; \dot{E}^{+}_{\mathrm{m1}} + \dot{E}^{-}_{\mathrm{m1}} = \dot{E}^{+}_{\mathrm{m2}}$$

$$\dot{H}_{z1}\Big|_{x=0} = \dot{H}_{z2}\Big|_{x=0} \;\Rightarrow\; \frac{\dot{E}^{+}_{\mathrm{m1}}}{\mathrm{Z}_{01}} - \frac{\dot{E}^{-}_{\mathrm{m1}}}{\mathrm{Z}_{01}} = \frac{\dot{E}^{+}_{\mathrm{m2}}}{\mathrm{Z}_{02}}$$

解得 $\dot{E}^{-}_{\mathrm{m1}} = \dot{E}^{+}_{\mathrm{m1}} \dfrac{\mathrm{Z}_{01} - \mathrm{Z}_{02}}{\mathrm{Z}_{01} + \mathrm{Z}_{02}}$ $\qquad \dot{E}^{+}_{\mathrm{m2}} = \dot{E}^{+}_{\mathrm{m1}} \dfrac{2\mathrm{Z}_{02}}{\mathrm{Z}_{01} + \mathrm{Z}_{02}}$

定义反射系数：

$$\boxed{R = \frac{\dot{E}^{-}_{m1}}{\dot{E}^{+}_{m1}} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}}}$$

分界面处反射波与入射波的切向场之比，通常为复数。

定义透（折）射系数：

$$\boxed{T = \frac{\dot{E}^{+}_{\mathrm{m2}}}{\dot{E}^{+}_{\mathrm{m1}}} = \frac{2\mathrm{Z}_{02}}{\mathrm{Z}_{01} + \mathrm{Z}_{02}}}$$

分界面处折射波与入射波的切向场之比，通常为复数。

在两种不同的媒质分界面上，当垂直入射波到达分界面时，由于两种媒质的波阻抗不同，将有一部分入射功率被反射回去，另一部分则透过分界面进入介质2继续传播。

介质1中合成波场分量 （设为理想介质 $k_1 = \mathrm{j}\beta_1$)

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{1y} = \boldsymbol{e}_y E_{\mathrm{m}1}^{+}\left[(1+R)\mathrm{e}^{-k_1 x} + \mathrm{j}2R\sin(k_1 x)\right]$$

瞬态形式 $$\boldsymbol{E}_{1y}(x,t) = \boldsymbol{e}_y E_{\mathrm{m}1}^{+}\left[(1+R)\sin(\omega t - \beta_1 x) + 2R\sin(\beta_1 x)\cos(\omega t)\right]$$

$$\boldsymbol{H}_{1z}(x,t) = \boldsymbol{e}_z \frac{E_{\mathrm{m}1}^{+}}{Z_{01}}\left[(1+R)\sin(\omega t - \beta_1 x) - 2R\cos(\beta_1 x)\sin(\omega t)\right]$$

特点

介质1中的合成波既有行波成分，又有驻波成分。

折射波总是行波。

例 6.6.1 已知波阻抗 Z_{01}、Z_{03}，求当介质 1 中的均匀平面波正入射到介质2 的界面时，不发生反射的 d 及Z_{02} 。

解　思路：介质 1 中无反射，即 $\Gamma(-d_-)=\left.\dfrac{Z(x)-Z_{01}}{Z(x)+Z_{01}}\right|_{x=-d_+}=0$ (匹配)

$$Z(x)=Z_{02}\left.\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}\right|_{x=-d_+} \qquad \Gamma(x)\big|_{x=-d_+}=\Gamma_0\, e^{2j\beta_2(-d)}$$

而 $\Gamma_0=(Z_{03}-Z_{02})/(Z_{03}+Z_{02})$.　　从后向前倒推计算。

$$\Gamma(x)\big|_{x=-d_+}=\frac{Z_{03}-Z_{02}}{Z_{03}+Z_{02}}\,e^{-2j\beta_2 d}$$

$$Z(x)\big|_{x=-d_+}=Z_{02}\left.\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}\right|_{x=-d_+}=Z_{02}\frac{Z_{03}+jZ_{02}\tan\beta_2 d}{Z_{02}+jZ_{03}\tan\beta_2 d}$$

$$\Gamma(-d_-)=\left.\frac{Z(x)-Z_{01}}{Z(x)+Z_{01}}\right|_{x=-d_+}=0\,,$$　即　$Z(x)=Z_{01}$

实部　$Z_{03}\cos\beta_2 d=Z_{01}\cos\beta_2 d$　　(1)

虚部　$Z_{02}^2\sin\beta_2 d=Z_{01}Z_{03}\sin\beta_2 d$　　(2)

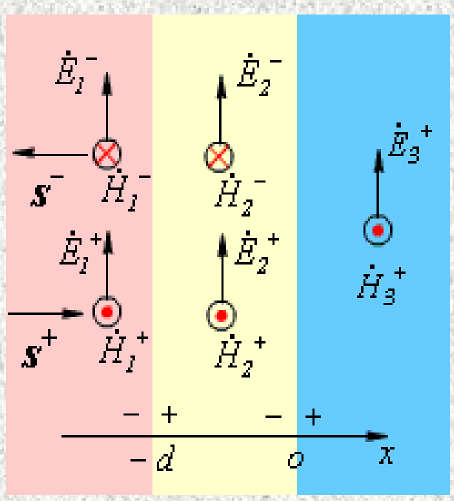


图6.6.5　平面波对多层介质分界面的正入射

例6.7 频率为f＝300MHz的线性极化均匀平面电磁波，其电场强度振幅值为2V/m，从空气垂直入射到$(\varepsilon_r = 4, \mu_r = 1)$的理想介质平面上，求:

（1）反射系数，透射系数。

（2）入射波，反射波和透射波的电场和磁场。

解：（1）空气中和给定的理想介质$(\varepsilon_r = 4, \mu_r = 1)$中的波阻抗分别为

$$Z_{01} = 120\pi \qquad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi$$

$$R = \frac{Z_{01} - Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} = -\frac{1}{3} \qquad T = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} = \frac{2}{3}$$

（2）频率为f＝300MHz，则

$$\lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{300\times 10^6} = 1\,\mathrm{m}, \qquad \beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 2\pi$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,f} = 0.5\,\mathrm{m}, \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi$$

设电场强度方向为*y*方向，沿*x*方向传播，即

入射波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,t)=E_0\sin(\omega t-\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_y=2\sin(\omega t-\beta_1 x)\boldsymbol{e}_y\ \ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,t)=\frac{E_0}{Z_{01}}\sin(\omega t-\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{60\pi}\sin(\omega t-\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_z\ \ \mathrm{A/m}$$

反射波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(x,t)=RE_0\sin(\omega t+\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_y=-\frac{2}{3}\sin(\omega t+\beta_1 x)\boldsymbol{e}_y\ \ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}(x,t)=-R\frac{E_0}{Z_{01}}\sin(\omega t+\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{180\pi}\sin(\omega t+\beta_1 x)\,\boldsymbol{e}_z\ \ \mathrm{A/m}$$

折射波

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}(x,t)=TE_0\sin(\omega t-\beta_2 x)\,\boldsymbol{e}_y=\frac{4}{3}\sin(\omega t-\beta_1 x)\boldsymbol{e}_y\ \ \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,t)=T\frac{E_0}{Z_{02}}\sin(\omega t-\beta_2 x)\,\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{45\pi}\sin(\omega t-\beta_2 x)\,\boldsymbol{e}_z\ \ \mathrm{A/m}$$