

第四章

恒定磁场

2011-3-15

重庆大学电气工程学院

第4章 恒定磁场

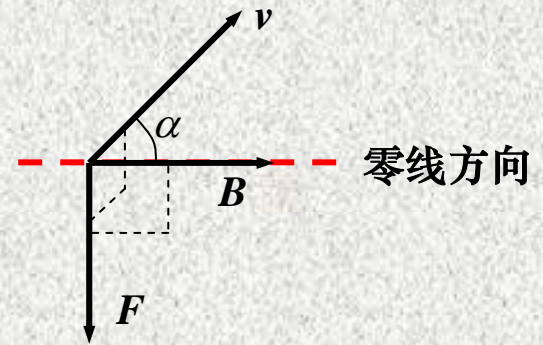
- 1、磁感应强度
- 2、磁矢量位
- 3、真空中的安培环路定律
- 4、媒质磁化 安培环路定律的一般形式
- 5、磁标量位
- 6、恒定磁场的基本方程 媒质分界面上的衔接条件
- 7、电感
- 8、磁场能量与磁场力

1. 磁感应强度

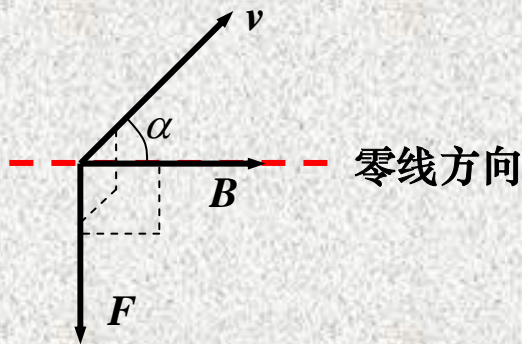
4.1.1 洛伦兹力-微观

已知磁场表现为对于运动电荷或电流元有力的作用，因此，可以根据运动电荷或电流元受到的**作用力**(磁场力、洛伦兹力)，或者根据小电流环在磁场中受到的力矩描述磁场的强弱。

实验发现：运动电荷在磁场中受到的作用力不仅与电荷量及运动速度的大小成正比，而且还与电荷的运动方向有关。电荷沿某一方向运动时受力最大，而垂直此方向运动时受力为零。我们定义，受力为零的方向为零线方向，如图所示。



设最大作用力为 F_m ，沿偏离零线方向 α 角度运动时，受力为 $F_m \sin \alpha$ 。作用力 F 的大小与电荷量 q 及速度大小 v 的乘积成正比。



我们定义一个矢量 B ，令其大小 $\frac{F_m}{qv}$ ，其方向为零线方向，那么矢量 B 与电荷量 q ，运动速度 v 以及作用力 F 的关系为

$$F = qv \times B$$

矢量 B 称为磁感应强度，单位为 T（特斯拉）。

值得注意的是：运动电荷受到的磁场力始终与电荷的运动方向垂直，因此，磁场力无法改变运动电荷速度的大小，只能改变其运动方向，磁场与运动电荷之间没有能量交换。

4.1.1 安培力定律-宏观

1820年，法国物理学家安培从实验中总结出电流回路之间的相互作用力的规律,称为安培力定律 (Ampere's force Law)。

电流 I' 的回路对电流 I 回路的作用力 F

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2}$$

式中真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2}$$

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2}$$

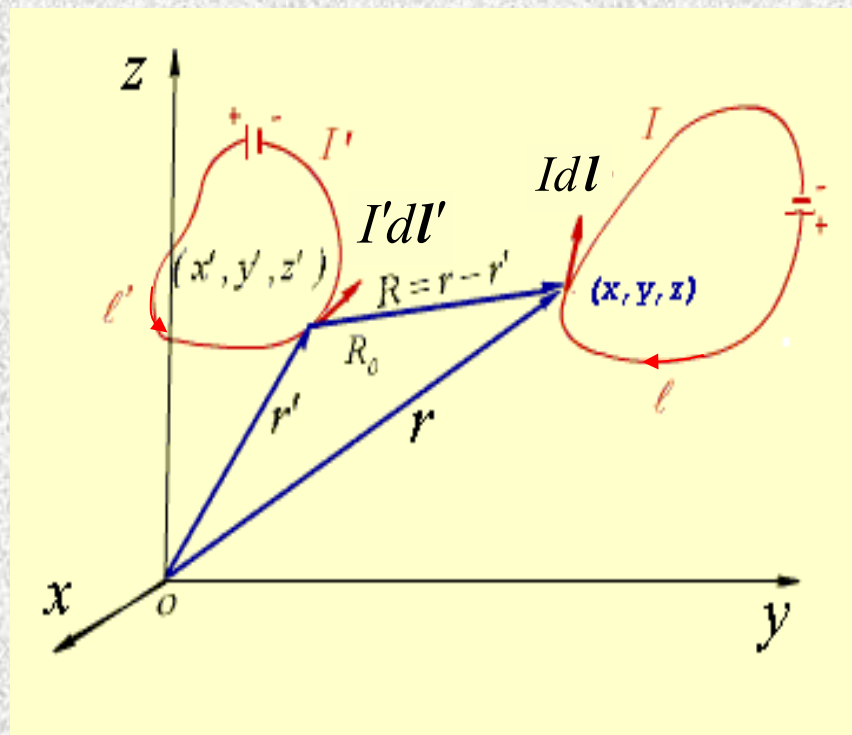


图4.1.1 两载流回路间的相互作用力

4.1.2 毕奥——沙伐定律·磁感应强度

电荷之间相互作用力通过电场传递。

$$\mathbf{F} = q_t \mathbf{E} = q_t \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R^2} \mathbf{e}_R$$

电流之间相互作用力通过磁场传递。元电流段 $I d\mathbf{l}$ 受电流回路 l' 的作用力为：

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I d\mathbf{l} \times (I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R)}{R^2} = I d\mathbf{l} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2} \right)$$

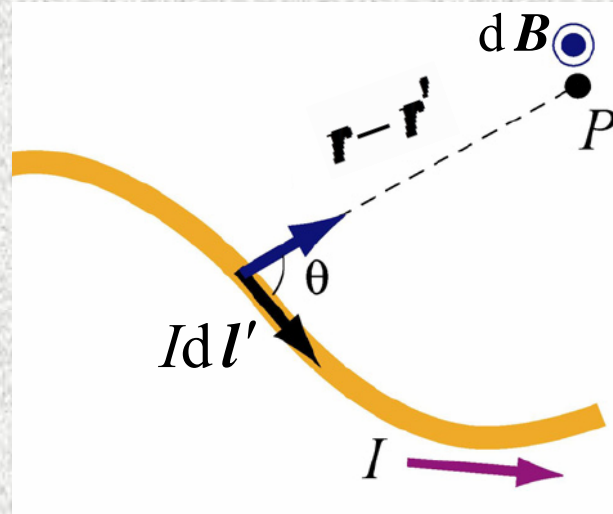
定义： $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times \mathbf{e}_R}{R^2}$ 磁感应强度 单位 T (wb/m^2) 特斯拉。

式中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 于是 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

写成一般表达式，即

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{V'} \frac{Id\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

毕奥——沙伐定律 (Biot — Savart Law)



讨论与引伸

- 1) 适用条件：真空无限大区域 (μ_0) 且电流分布在有限区域内。
- 2) 由毕奥—沙伐定律可以导出恒定磁场的基本方程 (\mathbf{B} 的散度与旋度)。
- 3) 对于体分布或面分布的电流，Biot - Savart Law 可写成

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

2. 磁矢量位

1 磁矢量位 A 与库伦规范

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

A 称磁矢量位(Magnetic vector potential), 单位: Wb/m (韦伯/米)。

令 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 称为库伦规范

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{使得 } A \text{ 唯一确定。}$$

4.3.2 真空中 A 与场源电流的积分关系

将 $B = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$ 与 $B = \nabla \times \mathbf{A}$ 对照

容易得到 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \mathbf{C}$ 或 $\nabla \psi$

同理可得 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \mathbf{C}$

和 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{C}$

可见，每个电流元产生的磁矢量 A 与此元电流 $I d\mathbf{l}$, $K dS$, $J dV$ 具有相同的方向。

4.3.3 真空中 \mathbf{A} 的微分方程

1. 微分方程及其特解

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{泊松方程})$$

当 $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ 时

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (\text{拉普拉斯方程})$$

在直角坐标系下， $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ 可以展开为

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x ; \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_y ; \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_z 。$$

令无限远处 A 的量值为零（参考磁矢位），则各式的特解分别为

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_x dV'}{R} ; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_y dV'}{R} ; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z dV'}{R}$$

4.3.3 磁矢量 A 的应用

1) 矢量积分求 A

例4.3.1 空气中有一长度为 l ，截面积为 S ，位于 z 轴上的短铜线，电流 I 沿 z 轴方向，试求离铜线较远处 ($R \gg l$) 的磁感应强度。

解：取圆柱坐标

$$A = A_z \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Idl}{R} \mathbf{e}_z \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{Idz}{R}$$

由于 $R, \gg l$ $A_z \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Il}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

根据

$$B = \nabla \times A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

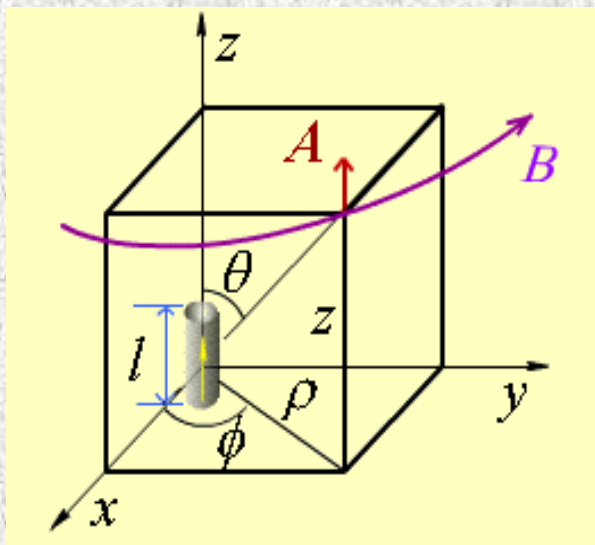


图4.3.1 位于坐标原点的短铜线

$$B = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 Il}{4\pi R^2} \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

例4.3.2 应用磁矢位 A ，求空气中一长直载流细导线的磁场。

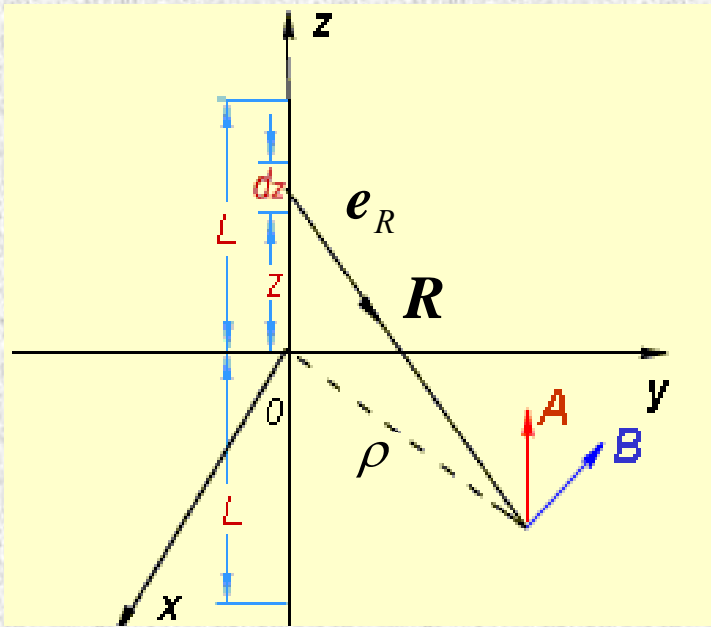


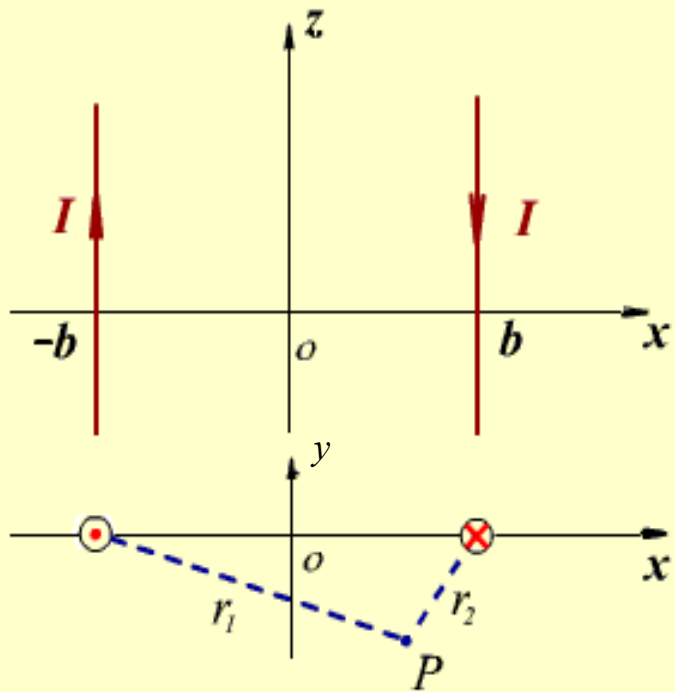
图4.3.2 长直载流细导线的磁场

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \quad A &= A_z \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{R} \mathbf{e}_z + \mathbf{C} \\
 &= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(L + \sqrt{\rho^2 + L^2}) - \ln \rho \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C}
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho} \mathbf{e}_z + \mathbf{C} \quad (L \gg \rho)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

例 4.3.3 应用磁矢位分析两线输电线的磁场。



解：这是一个平行平面磁场。

由上例计算结果, 两导线在 P 点的磁矢位

$$A_1 = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r_1} \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C}_1$$

$$A_2 = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r_2} \right] \mathbf{e}_z + \mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z + \mathbf{C}$$

图4.3.3 圆截面双线输电线

令 r_1 处 r_2 , 即以 $yozy$ 平面为参考面, 则 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$

于是

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{y+b}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{y-b}{x^2 + (y-b)^2} \right] \\ B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{x}{x^2 + (y-b)^2} \right] \\ B_z = 0 \end{array} \right.$$

表明 在 xoy 平面上 B 线为平面闭合矢量线

上式表明：在xoy平面上 B 线为平面闭合矢量线，故有

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} \quad -B_y dx + B_x dy = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} \mathbf{e}_z$$

$$dA = 0 \quad \text{或} \quad A = \text{const}$$

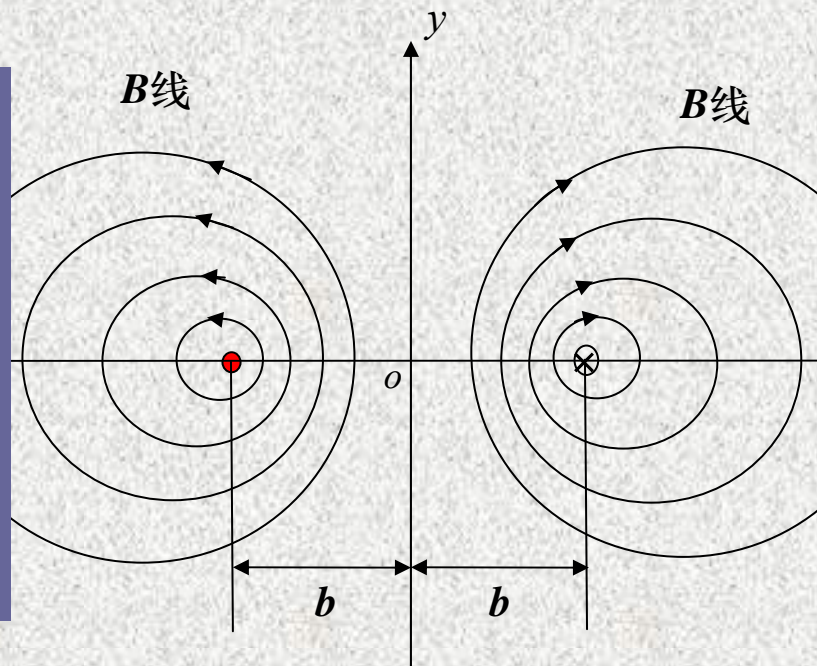
$$\Rightarrow \frac{x^2 + (y+b)^2}{x^2 + (y-b)^2} = k^2$$

$$\left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bk}{k^2 - 1}\right)^2$$

等 A 线 (B 线) 是一束包围导线的偏心圆族。

其圆心坐标是: $\left[\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}b, 0 \right],$

圆的半径是: $a = \left| \frac{2bk}{k^2 - 1} \right|$



在平行平面磁场中 $A = A_z e_z$ ，等 A 线可表示磁感应强度 B 线。

即平行平面磁场中的等 A 线可以代表 B 线。

可以证明：在轴对称磁场中， $\rho A_\phi = \text{const}$ 代表 B 线。

注意！

等 A 线不是 A 线，只涉及 A 的大小，不涉及方向。因此，等 A 线仅反映 B 的大小分布。

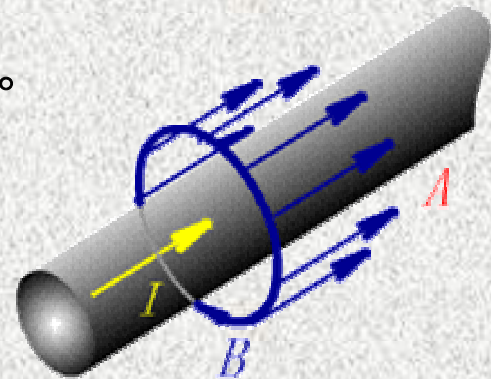
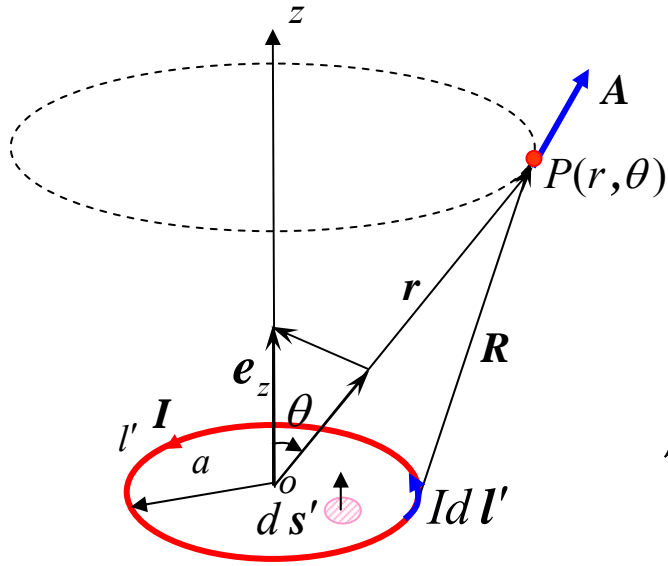


图4.3.4 A 线,等 A 线与 B 线关系

例 4.3.4 半径为 a 的平面小载流圆环称为磁偶极子，式求其在真空中远离自己区域内的 A 和 B 。

解：场分布为轴对称子午面场，对称轴是圆环的几何轴线，如选用球坐标，此时圆环线为 $r' = a, \theta' = \frac{\pi}{2}$ 的两个坐标面的交线。



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

应用矢量积分恒等式 $\oint_{l'} f d\mathbf{l}' = -\int_S \nabla f \times d\mathbf{s}$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \nabla' \frac{1}{R} \times d\mathbf{s}' \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \left(\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \times \mathbf{e}_z \right) ds' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{e}_R}{R^2} \right) ds' \end{aligned}$$

在 $r \gg a$ 的远区 $R \approx r, \mathbf{e}_R \approx \mathbf{e}_r$ 又因 $\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta$

$$\text{所以} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{S'} [(\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_r] ds' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{S'} \sin\theta (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta) ds' = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} S'$$

令 $\mathbf{m} = I S' = I S' \mathbf{e}_z$ ($\text{A} \cdot \text{m}^2$) 称为磁偶极矩或磁矩

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} S'$$

$$\mathbf{m} = I S' = IS' \mathbf{e}_z$$

于是上述 \mathbf{A} 的表达式改写成

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (m \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{e}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ r A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{e}_r}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\phi) - \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\phi)$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

与真空中的电偶极子比较

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$$

2)从磁矢位 A 计算磁通

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{wb (韦伯)}$$

在工程数值中经常用此公式计算磁通，并由此得到其它等效参数。

3. 真空中的安培环路定律

4.2.1 磁通与磁通连续性

1. 磁通

定义:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

单位 Wb (韦伯)

因此 B 也被称为磁密, 另一单位为 Wb/m^2

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

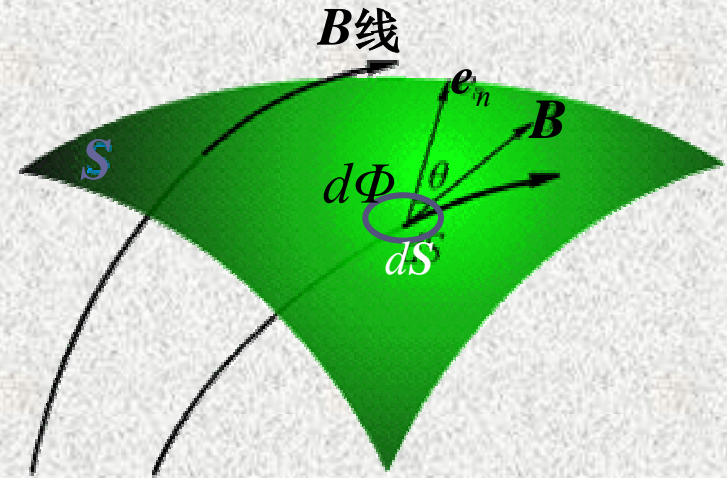


图4.2.1 B 的通量 Φ

4.2 真空中恒定磁场的性质

2. 磁通连续性原理

恒定磁场的散度—方法一

可从 *Biot-Savart Law* 直接导出恒定磁场 B 的散度。

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[-\mathbf{J}(x', y', z') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'$$

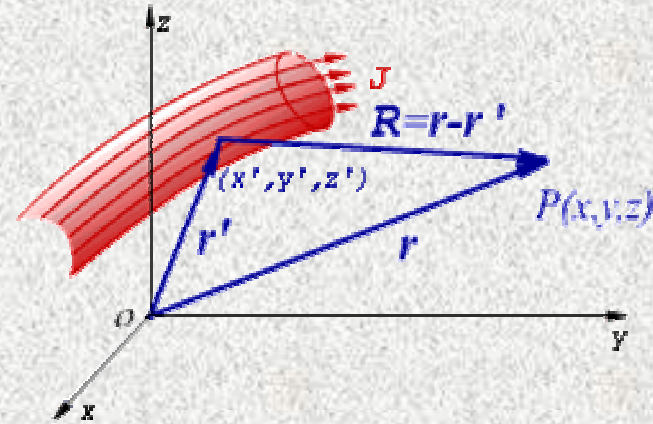


图4.2.2 计算体电流的磁场

由矢量恒等式 $\nabla \times (h \mathbf{A}) = h \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla h$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] dV' = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

即：

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

对上式两边取散度

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right]$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

表明 \mathbf{B} 是无头无尾的闭合线，恒定磁场是无源场。（在任意媒质中均成立）

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 可以作为判断一个矢量场能否成为恒定磁场的必要条件。

恒定磁场的散度—方法二

以体电流产生的磁场为例：

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \int_{V'} \vec{J} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{V'} \frac{\mu_0 \vec{J} dV'}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times d\vec{S}$$

$$= \int_{V'} \frac{\mu_0 \vec{J} dV'}{4\pi} \cdot \oint_S -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{S}$$

$$\oint_S (\vec{n} \times \vec{A}) dS = \int_{\tau} (\nabla \times \vec{A}) d\tau$$

磁通连续性原理

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_{V'} \frac{\mu_0 \vec{J} dV'}{4\pi} \cdot \int_{\tau} \underbrace{\nabla \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= 0} d\tau = 0$$

磁通连续性原理

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV \xrightarrow{\text{散度定理}} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这说明磁场通过任意闭合面的磁通量为零，称之为磁通连续性原理，或称磁场中的高斯定律 (Gauss's Law for the Magnetic field)。

3. 磁力线

仿照静电场的 E 线，恒定磁场可以用 B 线描绘， B 线的微分方程

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$$

在直角坐标系中

$$\frac{B_x}{dx} = \frac{B_y}{dy} = \frac{B_z}{dz}$$

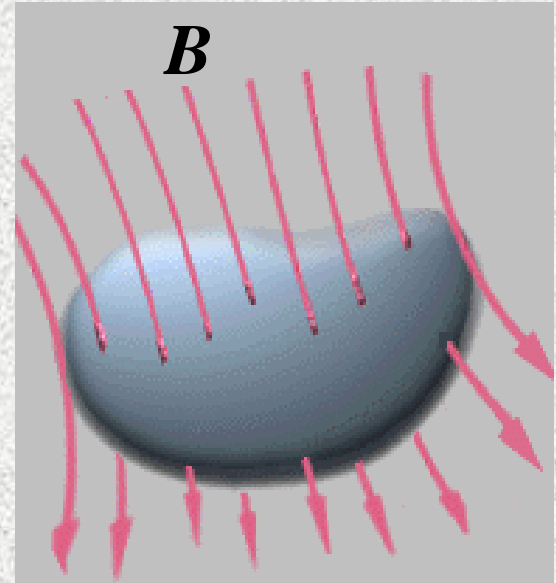


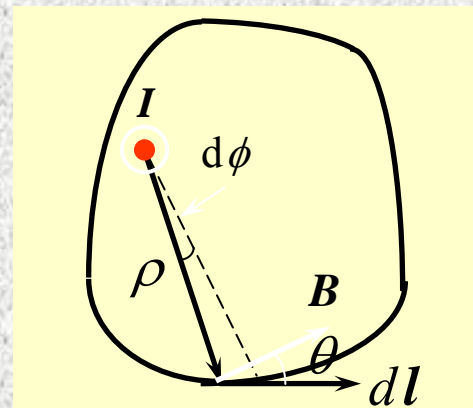
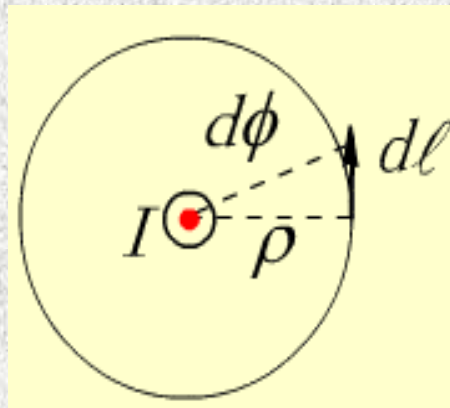
图4.2.3 磁通连续性原理

4.2.2 真空中的安培环路定律

以长直导线的磁场为例 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} e_\phi$

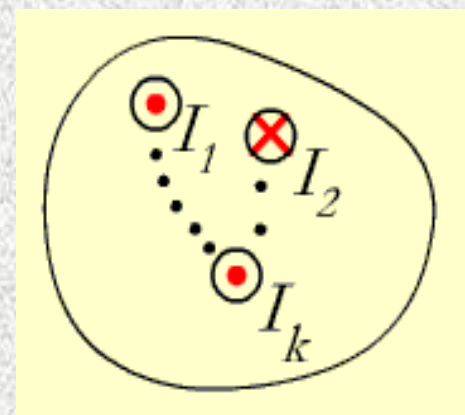
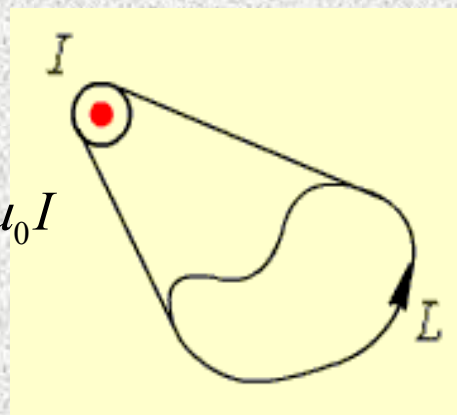
(1) 安培环路与磁力线重合

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \rho d\phi = \mu_0 I$$



(2) 安培环路与磁力线不重合

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_L B \cos\theta dl = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \rho d\phi = \mu_0 I$$



(3) 安培环路与交链电流

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_L B \cos\theta dl = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \rho d\phi = 0$$

图4.2.8 证明安培环路定律用图

(4) 安培环路与若干根电流交链

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_k$$

该结论适用于其它任何带电体情况。强调：环路方向与电流方向成右手，电流取正，否则取负。

恒定磁场的旋度—方法一

以两载流线圈磁场为例：

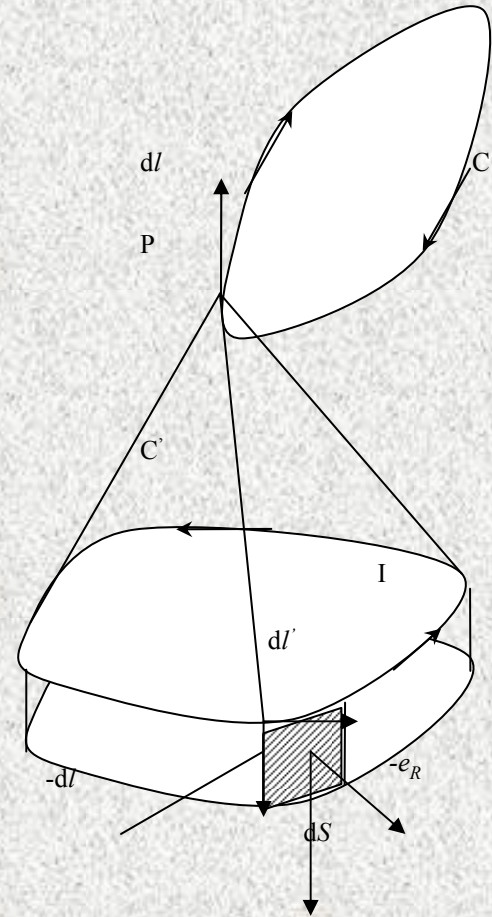
$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I d\vec{l}' \times \vec{e}_R}{R^2} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{e}_R}{R^2}$$

$$d\Omega = \oint_{C'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{e}_R}{R^2}$$

$$\Delta\Omega = \int d\Omega = \oint_C \oint_{C'} \frac{(d\vec{l} \times d\vec{l}') \cdot \vec{e}_R}{R^2}$$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega$$



恒定磁场的旋度—方法二

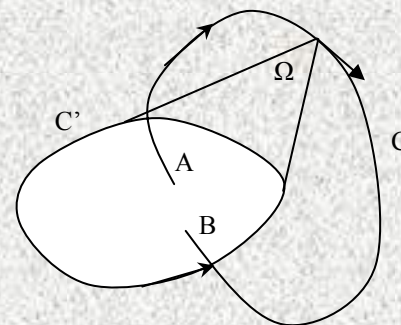
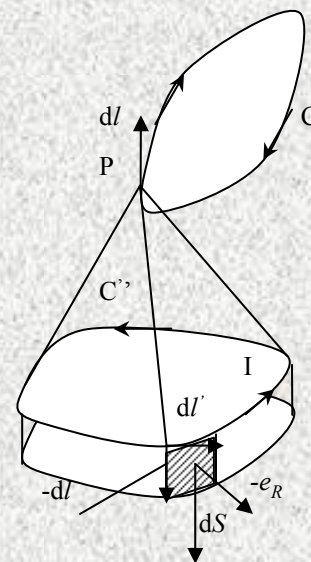
$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega$$

(1) 积分回路C不与电流回路C'相套链，则从某点开始的闭合回路C绕行一周并回到起点时，立体角变化为： $\Delta\Omega = 0$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

(2) 积分回路C与电流回路C'相套链，则从某点开始的闭合回路C绕行一周并回到起点时，立体角变化为： $\Delta\Omega = 4\pi$

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4\pi = \mu_0 I$$



安培环路定律

恒定磁场的旋度—方法二

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times \left[\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\nabla \times \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\nabla (\nabla \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) - \nabla^2 \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left\{ \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \left(-\vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \\ &= \frac{-\mu_0}{4\pi} \nabla \int_{V'} \left[\nabla' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}_{=0} \right] dV' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \\ &= \frac{-\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad \text{恒定电流}\end{aligned}$$

待续.....

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

其中

$$\oint_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$$

沿闭面S的表面流动，始终有 $\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{n} = 0$

$$\therefore \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

4. 媒质磁化与安培环路定律的一般形式

4.4.1. 媒质的磁化 (Magnetization)

媒质磁化产生的物理现象和分析方法与静电场媒质的极化类同。

1) 磁偶极子

磁偶极矩 $m = IdS$ $\text{A} \cdot \text{m}^2$

I —分子电流，电流方向与 dS 方向成右手螺旋关系

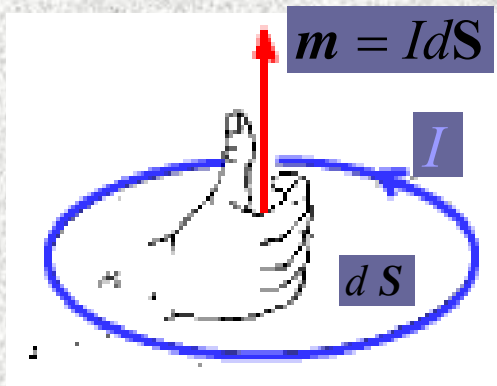


图4.4.1 磁偶极子

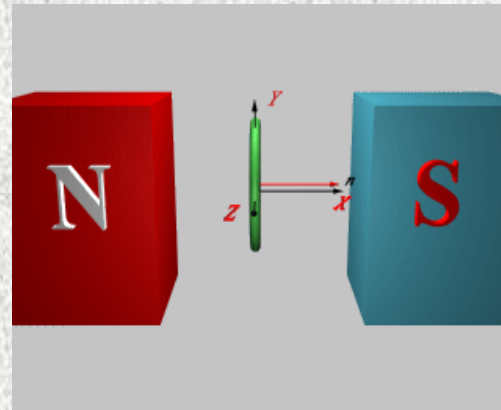


图4.4.2 磁偶极子受磁场力而转动

2) 媒质的磁化

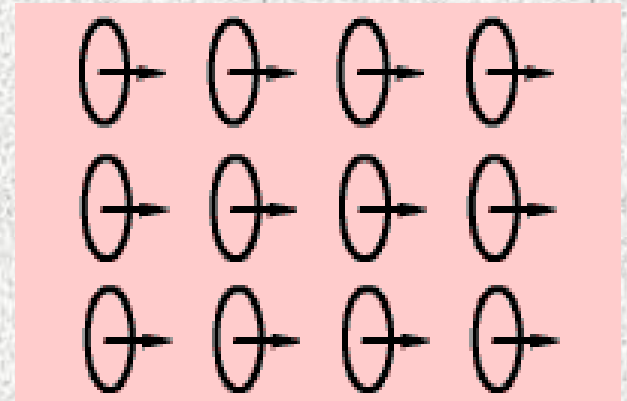
无外磁场作用时，媒质对外不显磁性， $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ 。

在外磁场作用下，磁偶极子发生旋转，使 $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ ，转矩为 $T_i = m_i \times B$ ，
旋转方向使磁偶极矩方向与外磁场方向一致，对外呈现磁性，称为磁化现象。

用磁化强度 (Magnetization Intensity) M 表示磁化的程度，即

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\Delta V}$$

A/m



4.4.2. 媒质磁化后的磁效应

(磁化介质的附加磁场与磁化电流)

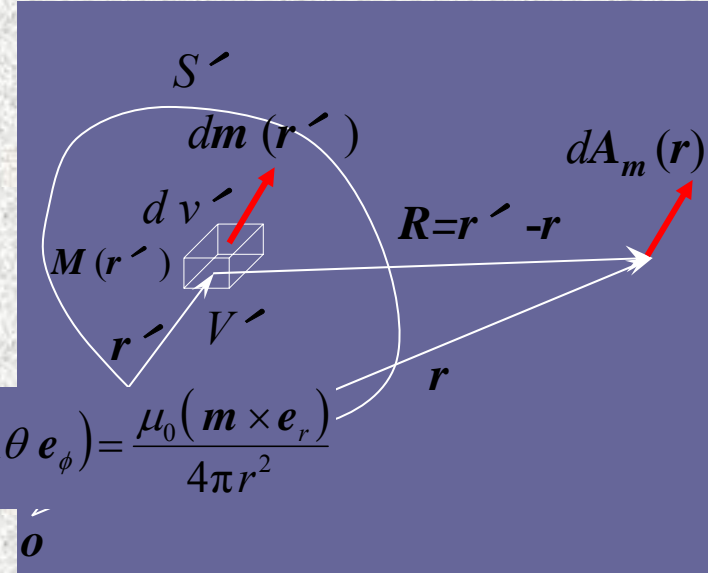
dv' 中的元磁矩为: $dm(r') = M(r') dv'$

它在真空中 r 点处产生的元磁矢量 dA_m 为

$$dA_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(r') \times \mathbf{e}_R}{R^2} dv'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (m \sin\theta \mathbf{e}_\phi) = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2}$$



V' 中所有的元磁矩在真空中 r 点处产生的磁矢量 A_m 为

图4.4.4 磁介质的附加磁场

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(r')}{R} - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(r')}{R} \right] dv'$$

矢量恒等式 $\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(r')}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(r')}{R} - \mathbf{M}(r') \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(r')}{R} - \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(r')}{R} \right] dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(r')}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(r') \times \mathbf{e}_n}{R} ds'$$

旋度定律 $\int_V (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dV = - \oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{s}$

定义: 体磁化电流密度

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

面磁化电流密度

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$$

于是磁化介质的附加磁场为：

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'$$

$$\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dS'$$

结论：

- 1、磁化电流媒质磁化后产生的宏观电流，仍满足恒定电流连续性原理，即 $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0$ $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$
- 2、磁化介质的附加磁场效应，可归结为体磁化电流和面磁化电流在真空中作用的结果；
- 3、磁化电流和自由电流在真空中产生的磁场，都遵从毕—沙定律；
- 4、在有磁介质存在的情况下，任一点的磁感应强度都是自由电流和磁化电流在真空中产生的磁场的叠加，即

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_m$$

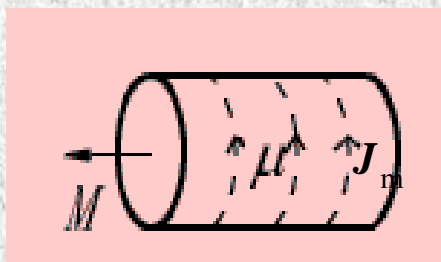
且有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

和


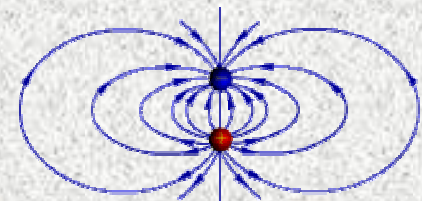

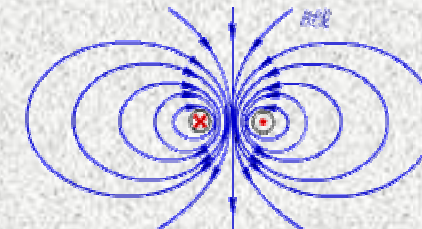
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m)$$

例 4.4.1 判断磁化电流的方向。



$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

磁偶极子与电偶极子对比

	模型	电量	产生的电场与磁场
电偶极子	 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$	
磁偶极子	 $\mathbf{m} = I\mathbf{dS}$	$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$	

4.4.3. 安培环路定律的一般形式

1、安培环路定律一般形式的积分形式

有磁介质时
$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I + I_m) = \mu_0 I + \mu_0 \int_s \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{s}$$

将 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ 代入上式，得

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_s (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{s} = I + \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

移项后
$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = I$$

定义磁场强度
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{A/m}$$

则有
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

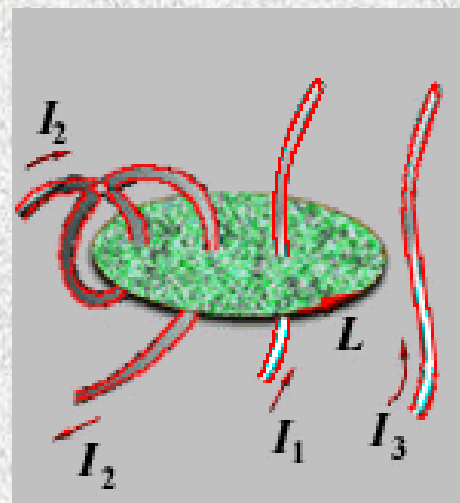


图4.4.6 \mathbf{H} 与 \mathbf{I} 成右螺旋关系

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

说明: • H 的环量仅与环路交链的自由电流有关。

- 环路上任一点的 H 是由系统全部载流体产生的。
- 电流的正、负仅取决于环路与电流的交链是否满足右手螺旋关系，是为正，否为负。

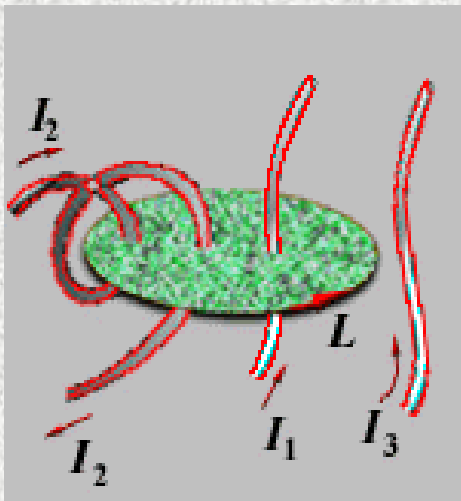


图4.4.6 H 与 I 成右螺旋关系

2、安培环路定律一般形式的微分形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \rightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

积分式对任意曲面S都成立，则

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{恒定磁场是有旋的}$$

上式表明， $\nabla \times \mathbf{H}$ 就是该处的自由电荷密度，与磁化电流无关。

4.4.4. 各向同性线性媒质的性能方程

磁场强度的定义式也是媒质的性能方程

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{或} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

实验证明，在各向同性的线性磁介质中 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$

式中 χ_m ——磁化率，无量纲量，代入 $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

式中 μ_r ——相对磁导率，无量纲，

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{磁导率，单位 H/m。}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

各向同性的线性磁介质的性能方程(构成关系、本构关系)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

同一自由电流在磁介质中产生的磁场是真空中磁场的 μ 倍

可推得在无限大磁介质中有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\oint_{l'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \sum I$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

} I 在同一局部均匀的磁介质中也成立
对局部均匀的区域也成立

例 4.9 试求载流无限长同轴电缆在周围产生的 B ，以及磁介质与内外导体接触处的 $B_m(R_1)$ 。设导体的磁介质的 $\mu = \mu_0$ 电流在导体上均匀分布。

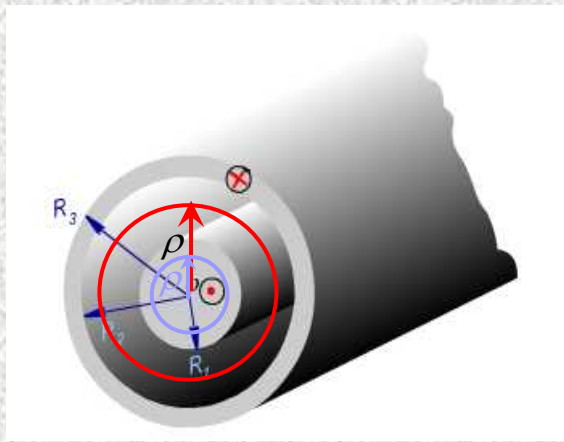


图4.19 同轴电缆截面

解：选用圆柱坐标系， $\mathbf{B} = B(\rho)\mathbf{e}_\phi$

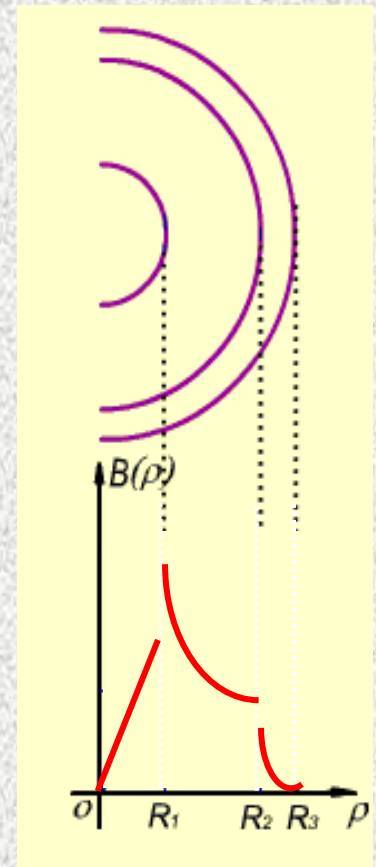
$$1) \quad 0 \leq \rho < R_1$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{H} = \frac{I \rho}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi$$

$$R_1 \leq \rho < R_2$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B \rho d\phi = \mu I \quad \mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$R_2 \leq \rho < R_3 \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi \rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \mathbf{e}_\phi$$



$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{A/m}$$

$$2) \because \mathbf{M}(\rho) = \frac{\mathbf{B}(\rho)}{\mu_0} - \mathbf{H}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{e}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} (\mu_r - 1) \mathbf{e}_\phi$$

$$(R_1 \leq \rho \leq R_2)$$

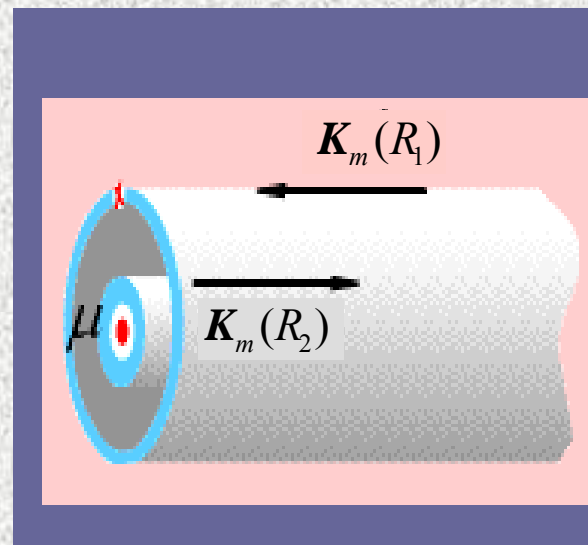
面磁化电流密度 $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$ A/m

$$\therefore \mathbf{K}_m(R_1) = \mathbf{M}(\rho) \times \mathbf{e}_n \Big|_{\rho=R_1} = \frac{I}{2\pi R_1} (\mu_r - 1) [\mathbf{e}_\phi \times (-\mathbf{e}_\rho)] = \frac{I}{2\pi R_1} (\mu_r - 1) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{K}_m(R_2) = \mathbf{M}(\rho) \times \mathbf{e}_n \Big|_{\rho=R_2} = \frac{I}{2\pi R_2} (\mu_r - 1) [\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\rho] = \frac{I}{2\pi R_2} (\mu_r - 1) (-\mathbf{e}_z)$$

结论:

- 1、在两种不同磁介质交界处， \mathbf{B} 要发生跳变；
- 2、两种磁介质分界面处是磁介质不均匀（不连续）性的集中表现，因此，要出现磁化面电流，这是使得场量产生跳变的根源。



例4.4.2 计算铁制环形螺线管内的 B 、 H 、 Φ 。

(1) 通有电流 I ，匝数位 N ， $R \gg a$ ；

(2) 如果螺线管上开个小口再求 B 、 H 、 Φ 。

解：(1) 可认为螺线管内磁场是均匀的，且等于半径为 R 处的磁场，应用安培环路定律：

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu NI \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mu \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{e}_\phi,$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad \mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{e}_\phi$$

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{\mu NI}{2\pi R} \pi a^2 = \frac{\mu NI a^2}{2R}$$

(2) 介质不均匀，用安培环路定律一般形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad \Rightarrow \quad H_i(2\pi R - t) + H_g t = NI$$

$$\frac{B}{\mu}(2\pi R - t) + \frac{B}{\mu_0} t = NI \quad \text{因为} B \text{线是连续的}$$

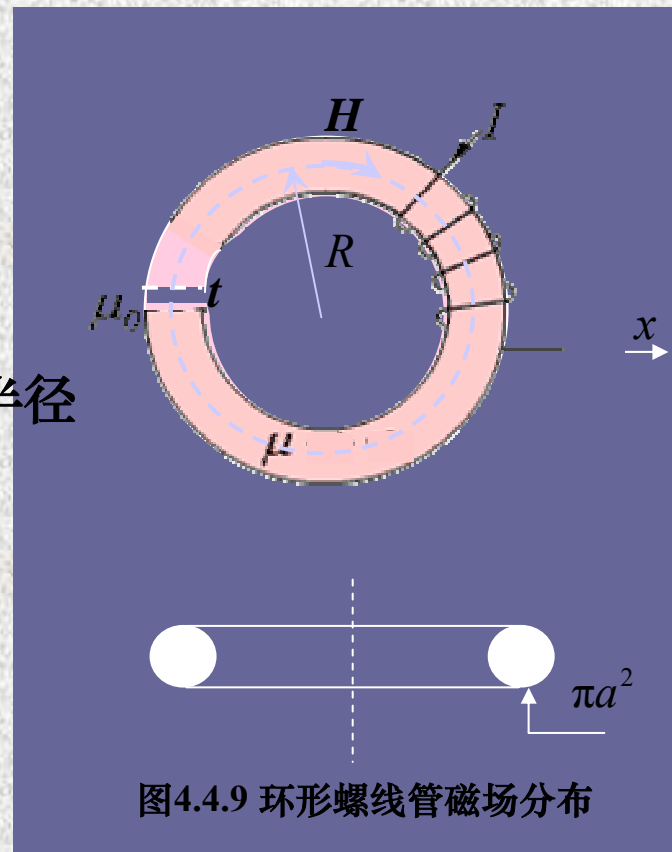


图4.4.9 环形螺线管磁场分布

材 料	μ_r
铁 粉	100
机 器 钢	300
铁 氧 体	1 000
坡莫合金 45	2 500
变 压 器 钢	3 000
矽 铁	3 500
纯 铁	4 000
μ 磁性合金	20 000
铝硅铁粉	30 000
镍铁铝导磁合金	100 000

$$B \left[\frac{1}{\mu} (2\pi R - t) + \frac{1}{\mu_0} t \right] = NI$$

$$B = \frac{NI}{(2\pi R - t)/\mu + t/\mu_0} = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

$\because \mu_r \gg 1 \quad \therefore$ 开口后 B 大大降低了

$$H_i = \frac{B}{\mu} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R \mu_0 + (\mu - \mu_0)t} \quad H_g = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu NI}{2\pi R \mu_0 + (\mu - \mu_0)t}$$

可见 $H_g \gg$ 气隙中磁场强度占了绝对比例，电机就是利用这个原理进行有效的能量转换。

$$\Phi = B \cdot S = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t} \pi a^2$$

B 小了，故磁通小了

5. 磁标量位

4.5.1 磁标量位 φ_m 的概念

恒定磁场无电流区域

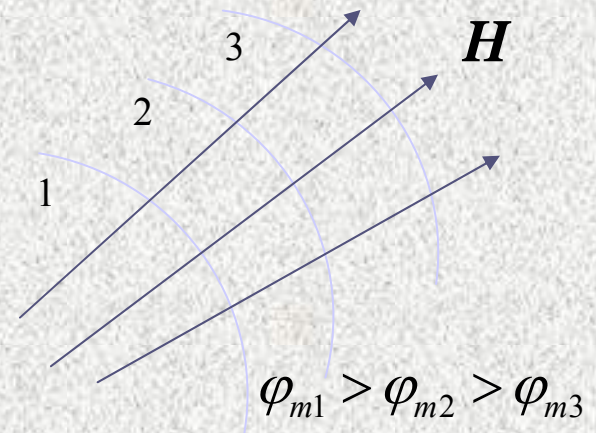
$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad \rightarrow \quad \varphi_m(p) = \int_p^{\text{ref}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

φ_m —— 磁标量位，简称磁位 (Magnetic Potential)，单位：A (安培)。

磁位 φ_m 的特点：

- 磁位 φ_m 仅适合于无自由电流区域，且无物理意义。
- 等磁位面 (线) 方程为 $\varphi_m = \text{常数}$ ，等磁位面 (线) 与磁场强度 H 线垂直。
- A、B 两点间的线积分为磁压：

$$U_{mAB} = \varphi_{mA} - \varphi_{mB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$



4.5.2 磁位 φ_m 的多值性

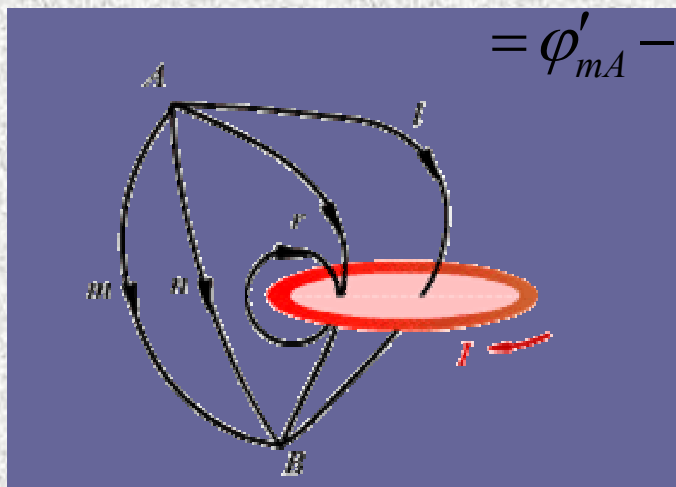
在恒定磁场中，设 B 点为参考磁位，

$$\text{则} \quad \varphi'_{mA} = \int_{AlB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad \varphi''_{mA} = \int_{AmB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

由安培环路定律，得

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{AlBmA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{AlB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{BmA} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$= \varphi'_{mA} - \varphi''_{mA} = I$$



推论 $\varphi'_{mA} = \varphi''_{mA} + kI$ 多值性

为了克服 多值性，规定积分路径不得穿过从电流回路为周界的 S 面（磁屏障面）。这样， φ_m 就成为单值函数，两点之间的磁压与积分路径无关。

图4.5.1 磁位 φ_m 与积分路径的关系

4.5.3 磁位 的微分方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad \mu = \text{常数}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mu \mathbf{H} = 0 \quad \rightarrow \quad -\nabla \cdot (\mu \nabla \varphi_m)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad = -\nabla \varphi_m \cdot \nabla \mu - \mu \nabla \cdot \nabla \varphi_m = 0$$

$$\nabla^2 \varphi_m = 0$$

(适用于无自由电流区域)

在直角坐标系中

$$\nabla^2 \varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} = 0$$

4.5.4 磁位 φ_m 、磁矢位 A 与电位 φ 的比较

位函数 比较内容	电位 (φ) (有源或无源)	磁位 (φ_m) (无源)	磁矢位 (A) (有源或无源)
引入位函数的依据	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
位与场的关系	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ $\varphi = \int_p^{ref} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ $\varphi_m = \int_p^{ref} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
微分方程	$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$ $\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi_m = 0$	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$
位与源的关系	$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi \varepsilon R}$	$\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega$	$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_0 \mathbf{J} dV}{4\pi R}$

6. 恒定磁场的基本方程 媒质分界面上的衔接条件

4.6.1 恒定磁场的基本方程

	积分形式	微分形式	物理意义
磁通连续原理	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	1、恒定磁场没有通量源； 2、 \mathbf{B} 线是无头无尾的矢量线。
安培环路定律	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	1、恒定磁场有漩涡源，漩涡源为电流； 2、磁场为非保守场，线积分与路径有关。
性能方程： $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (适用于各向同性线性媒质)			

4.6.2 分界面上的衔接条件

1. H 的衔接条件

在媒质分界面上，包围 P 点作一矩形回路 l 。

令 Δl_2 ，根据 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ ，可得

$$H_{1t} \Delta l_1 - H_{2t} \Delta l_1 = K \Delta l_1$$

$$\boxed{\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}} \quad H \text{ 的切向分量不连续}$$

当 $\mathbf{K} = 0$ $\boxed{H_{1t} = H_{2t}}$ H 的切向分量连续

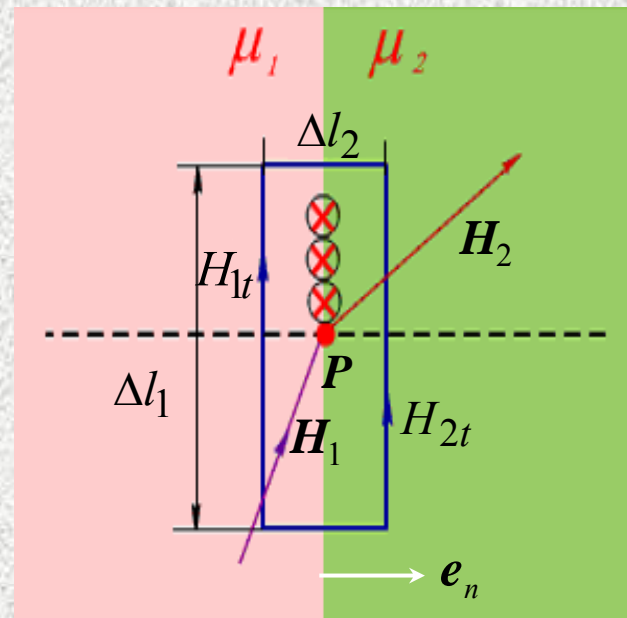


图4.6.2 分界面上 H 的衔接条件

2. B 的衔接条件

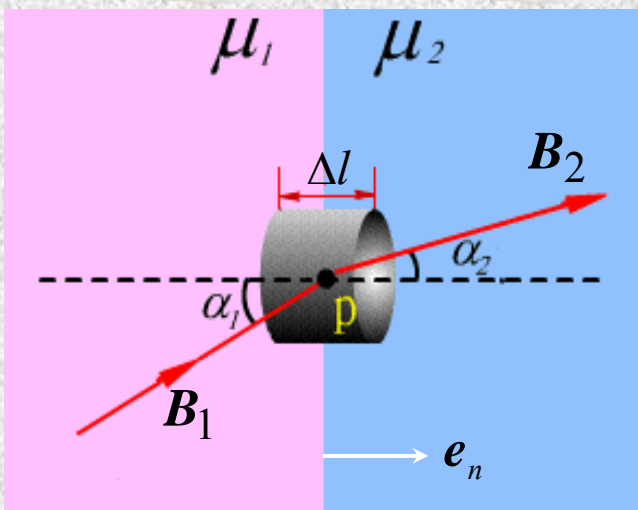


图4.6.1 分界面上 B 的衔接条件

在媒质分界面上，包围 P 点作一小扁圆柱，

令 $\Delta l \rightarrow 0$ 则根据 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

或

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

B 的法向分量连续

3. 分界面上的折射定律

当两种媒质均匀、各向同性，则有

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2$$

在分界面无自由电流密度 K ，即

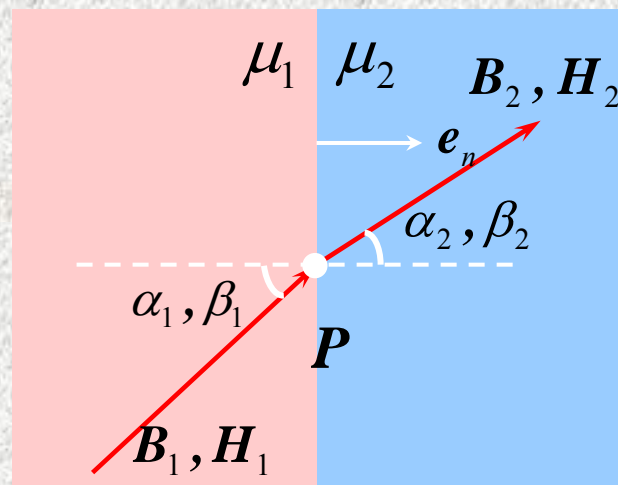
$$K = 0$$

由 $B_{1n} = B_{2n} \quad H_{1t} = H_{2t}$

可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

折射定律



例4.6.2 第一种媒质是铁磁物质， $\mu_1 \gg \mu_0$ ，第二种媒质是空气， $\mu_2 = \mu_0$ 。

设 $\mu_1 = 7000\mu_0$ ，当 $\alpha_1 = 89^\circ$ 时

根据折射定理，可得

$$\alpha_2 = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\mu_0}{7000\mu_0} \operatorname{tg} \alpha_1 \right) = \operatorname{tg}^{-1} (8.184 \times 10^{-3}) = 28'$$

可见当磁场由铁磁物质进入非铁磁物质时，不管入射角大小如何，只要 $\alpha_1 \neq 90^\circ$ ，则分界面上紧靠非铁磁物质一侧均可视为磁感应强度垂直于分界面，分界面可看作是等标量磁位面。

4.6.3 用磁位表示的媒质分界面边界条件

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$$

表明在媒质分界面上磁矢位 \mathbf{A} 是连续的。

$$\mathbf{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \mathbf{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{A}_1 \right) = \mathbf{K}$$

φ_m 推导方法与静电场类似，

$$\text{由 } \begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases} \quad (\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m)$$

推导得

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \end{cases}$$

例4.6.3 一半径为 a 的带电长直圆柱体，其电流为 I ，试通过磁矢位 A ，求磁感应强度 B 。（导体内外媒质的磁导率均为 μ_0 ）

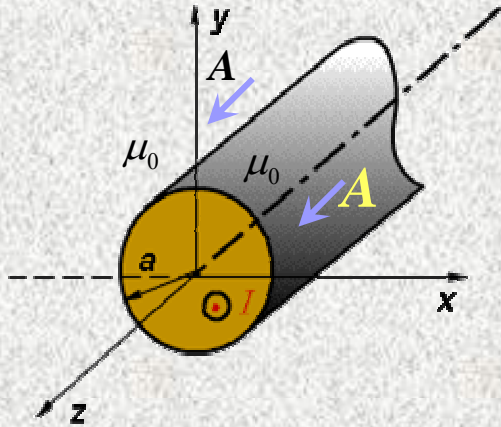


图4.6.4 长直带电圆柱导体

解：采用圆柱坐标系， $A = A_z \mathbf{e}_z$ $A_z = f(\rho)$

设 $\mathbf{J} = J_z \mathbf{e}_z$

$$\nabla^2 A_{z1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_z \quad 0 < \rho \leq a \quad (1)$$

$$\nabla^2 A_{z2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0 \quad a < \rho \leq \infty \quad (2)$$

通解为 $A_{z1}(\rho) = -\frac{\mu_0 J_z}{4} \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2$ (3)

$$A_{z2}(\rho) = C_3 \ln \rho + C_4 \quad (4)$$

根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \end{vmatrix}$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi \quad \xrightarrow{J_z = \frac{I}{\pi a^2}} \quad B_{1\phi} = -\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

$$B_{2\phi} = -\frac{\partial A_2}{\partial \rho} = -\frac{C_3}{\rho}$$

$$B_{1\phi} = -\frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho$$

$$B_{2\phi} = -\frac{\partial A_2}{\partial \rho} = -\frac{C_3}{\rho}$$

根据导体表面 $H_{1t} = H_{2t} \rightarrow H_{1\phi}|_{\rho=a} = H_{2\phi}|_{\rho=a}$

应有 $\frac{I}{2\pi a} = -\frac{C_3}{\mu_0 a} \rightarrow C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$

$$\mathbf{B}_1 = B_{1\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B}_2 = B_{2\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

例4.6.3 一环形磁芯由 μ 两种磁性材料构成，在磁芯轴心线上只有一无限长直载流导线，

求：1) 磁芯内的 B , H , Φ ;

2) 分界面上的 B , H 是否突变?

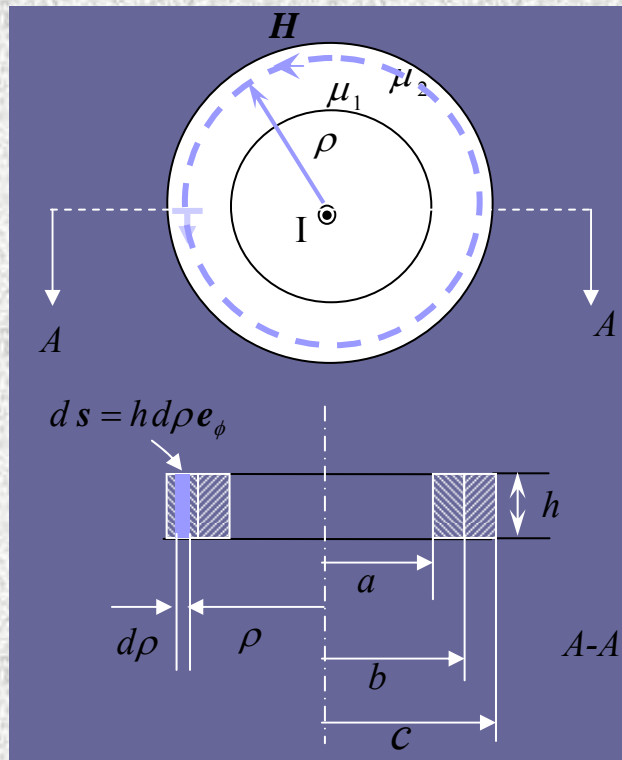
解：1) 选用柱坐标，并应用安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad a \leq \rho \leq c$$

$$a < \rho < b \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad ; \quad b < \rho < c \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{s_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho} h d\rho + \int_b^c \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho} h d\rho$$

$$= \frac{\mu_1 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_2 I h}{2\pi} \ln \frac{c}{b} = \frac{I h}{2\pi} \left(\mu_1 \ln \frac{b}{a} + \mu_2 \ln \frac{c}{b} \right)$$

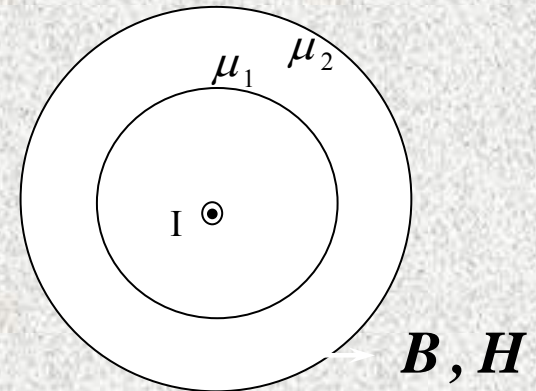


2) 分界面上 B , H 均只有切向分量, 分界面上无自由面电流,

故 $H_{1t} = H_{2t}$, H 连续; $B_{1t} = \mu_1 H_{1t}$ $B_{2t} = \mu_2 H_{2t}$

$$\because \mu_1 \neq \mu_2 \quad \therefore B_{1t} \neq B_{2t}$$

故 $B_1 \neq B_2$ 不连续。



7. 电感

4.7.1 电感的概念

1、磁通与磁链

磁通：磁感应强度 B 通过某一表面 S 的通量称为磁通或磁通量。

公式：
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

磁链：定义为与某电流或线圈交链的磁通量称为磁链或磁通链。

公式：
$$\Psi = \sum_{k=1}^N \Phi_k$$

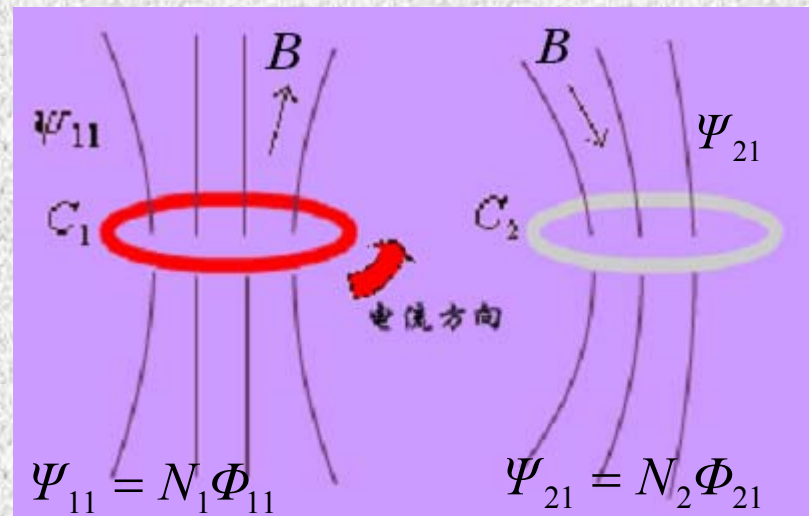
其中， N 为线圈匝数或电流根数。

由毕奥——沙伐定律

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

可知 $B \propto I \rightarrow \Phi \propto I, \Psi \propto I$

定义电感为： Ψ / I 单位： H (亨利)



Ψ_{11} 是 I_1 产生的磁通与 C_1 交链的磁通链

Ψ_{21} 是 I_1 产生的磁通与 C_2 交链的磁通链

4.7.2 自感

回路的电流与该回路交链的磁链的比值称为自感。

即
$$L = \frac{\Psi}{I}$$

在线性各向同性媒质中， L 仅与回路的几何尺寸、媒质参数有关，与回路的电流无关。

自感又分为内自感 L_i 和外自感 L_0
$$L = L_i + L_0$$

$L_i = \frac{\Psi_i}{I}$ —— 内自感是导体内部仅与部分电流交链的磁链与回路电流比值。

$L_0 = \frac{\Psi_0}{I}$ —— 外自感是导体外部闭合的磁链与回路电流的比值。

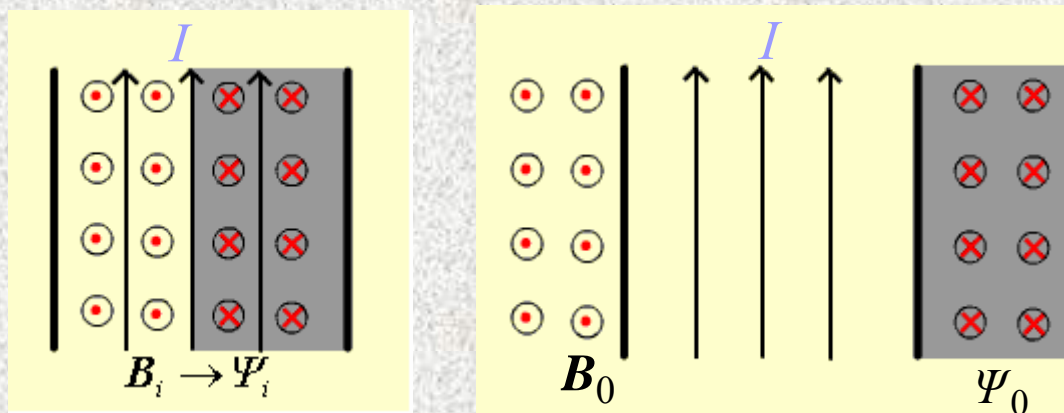


图4.7.1 内磁链与外磁链

自感计算的一般步骤:

设 $I \rightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{\mu\mathbf{H}} \mathbf{B} \xrightarrow{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} \Phi \xrightarrow{N\Phi} \psi \rightarrow L(L_i, L_0)$

$\mathbf{A} \quad \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

The diagram illustrates the general steps for calculating self-inductance. It starts with current I leading to the magnetic field \mathbf{H} . \mathbf{H} is multiplied by the permeability μ to get the magnetic flux density \mathbf{B} . \mathbf{B} is then integrated over a surface S to find the magnetic flux Φ . The flux Φ is multiplied by the number of turns N to get the flux linkage ψ . Finally, ψ is used to find the inductance L , which is the ratio of flux linkage to current, denoted as $L(L_i, L_0)$. A separate box highlights the relationship between the vector potential \mathbf{A} and its line integral $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, which is equal to the magnetic flux Φ .

例 4.7.1 试求图示长为 l 的同轴电缆的自感 L 。

解：总自感 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_0$

1) 内导体的内自感 $L_{i1} = (0 \leq \rho \leq R_1)$

设安培环路包围部分电流 I' 则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I' = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi \rho^2 = \frac{I}{R_1^2} \rho^2$$

$$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} \rho, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \rho$$

穿过宽度为 $d\rho$ 长度为 l 的矩形面积的磁通为

磁链中的匝数，可根据

$$I : 1 = I' : N \rightarrow N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{R_1^2} \quad d\Psi = Nd\Phi$$

$$\text{因此，有 } \Psi_{i1} = \int_s Nd\Phi = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi R_1^2} \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

$$\text{内自感 } L_{i1} = \frac{\Psi_{i1}}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

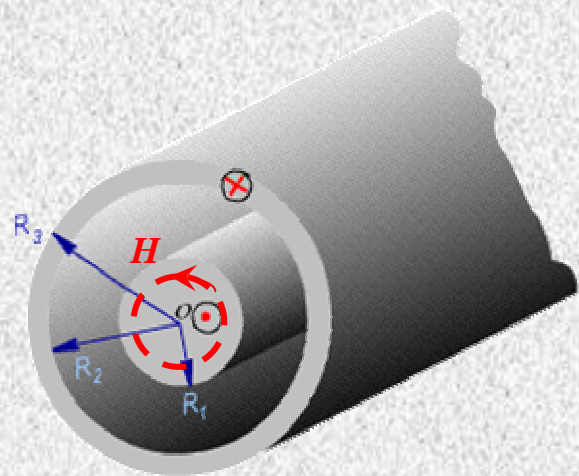


图4.7.2 同轴电缆截面

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \rho l d\rho$$

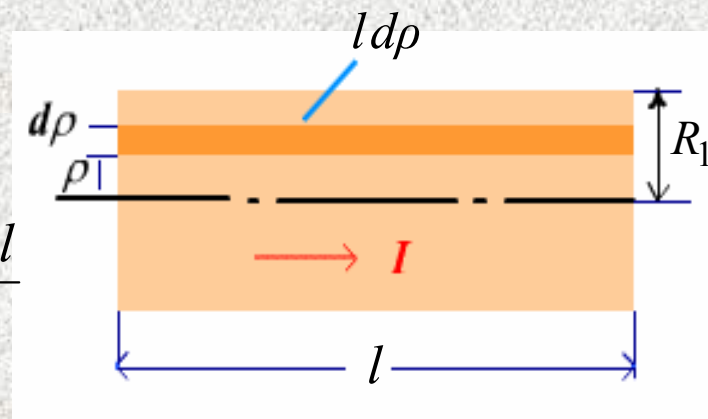


图4.7.3 同轴电缆内导体纵截面

2) 外导体内自感 $R_2 \leq \rho \leq R_3$

$$I' = I - I \left(\frac{\pi \rho^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} \right) = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} I$$

$$H = \frac{I'}{2\pi\rho} = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} I \cdot \frac{1}{2\pi\rho}, \quad B = \mu_0 H$$

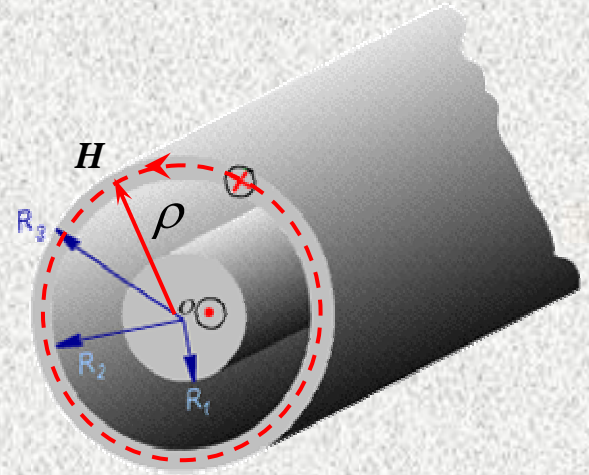


图4.7.2 同轴电缆截面

$$d\Phi_{i2} = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot l d\rho \quad N = \frac{I'}{I} = \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad L_{i2} &= \frac{1}{I} \int N d\Phi_{i2} = \frac{1}{I} \int_{R_2}^{R_3} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \left(\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 l d\rho \\ &= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{\mu_0 l R_3^2}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)} + \frac{\mu_0 l (R_3^2 + R_2^2)}{8\pi(R_3^2 - R_2^2)} \end{aligned}$$

工程上视同轴电缆外导体为面分布的电流，故忽略此部分的内自感 ($L_{i2^{\circ}}=0$)

3) 内、外导体间的外自感 L_0 ($R_1 < \rho < R_2$)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad d\Psi_0 = d\Phi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{1}{I} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

总电感为 $L = L_{i1} + L_{i2} + L_0$

单位长度上的电感

$$L' = \frac{L}{l}$$

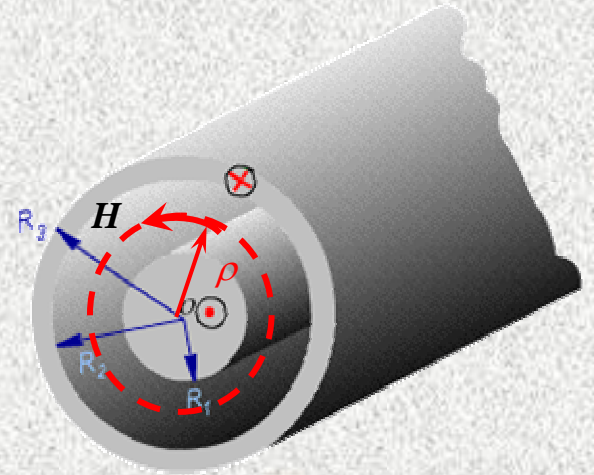


图4.7.2 同轴电缆截面

例 4.7.2 设传输线的长度为 l ，试求图示两线传输线的自感。

解：总自感 $L = 2L_i + L_0$

内自感 $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ ， $2L_i = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$

解法一 (由 $\mathbf{B} \rightarrow L_0$)

设 $I \rightarrow \mathbf{H} = \left(\frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(D-x)} \right) (-\mathbf{e}_y) \rightarrow \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

$$\psi_0 = \Phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad d\mathbf{S} = l dx (-\mathbf{e}_y)$$

$$= \mu_0 I \int_R^{D-R} \left(\frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi(D-x)} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$L_0 = \frac{\psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R} \quad \text{总自感为 } L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

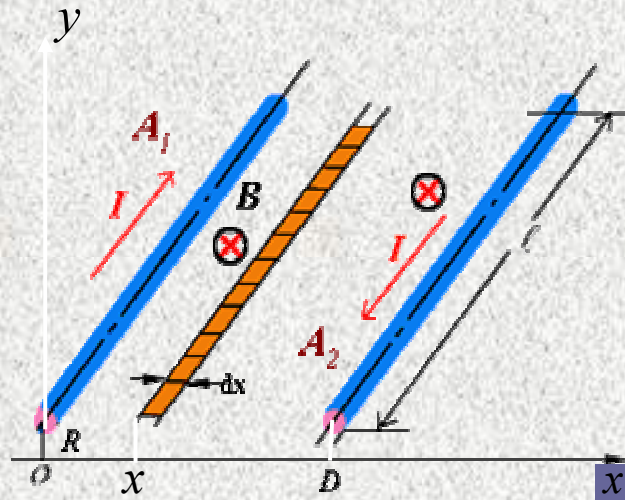


图3.7.4 两线传输线的自感计算

解法二

(由 $\mathbf{A} \rightarrow L_0$)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mathbf{e}_z$$

在 ab 线段上 $r_1 = R, r_2 = D - R$

$$\mathbf{A}(ab) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{D-R}{R} \right) \mathbf{e}_z$$

在 cd 线段上 $r_1 = D - R, r_2 = R$

$$\mathbf{A}(cd) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{D-R} \right) \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{D-R}{R} \right) (-\mathbf{e}_z)$$

$$\psi_0 = \Phi_0 = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A}(ab) \cdot (l \mathbf{e}_z) + \mathbf{A}(cd) \cdot l(-\mathbf{e}_z)$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R} \quad L_0 = \frac{\psi_0}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

$$\text{总自感为 } L = 2L_i + L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D-R}{R}$$

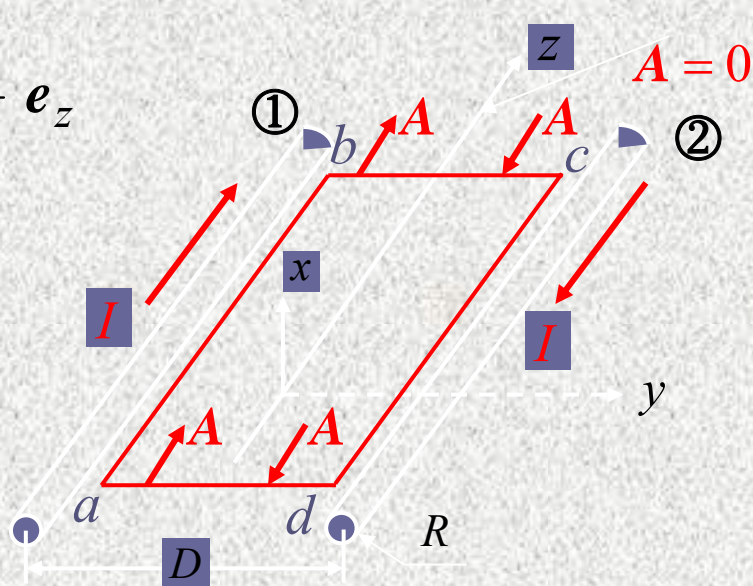


图3.7.4 两线传输线的自感计算

4.7.3 互感

在线性媒质中，回路1的电流 产生与回路2相交链的磁链 与 Ψ 成正比。

$$\Psi_{21} = M_{21}I_1 \quad \rightarrow \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

式中， M_{21} 为互感，单位：**H**（亨利）

同理，回路2对回路1的互感可表示为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

可以证明

$$M_{12} = M_{21}$$

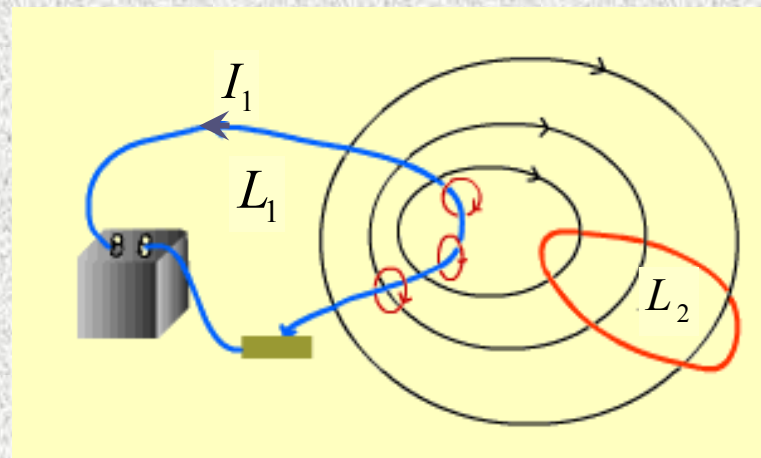


图4.7.3 电流 I_1 产生与回路2交链的磁链

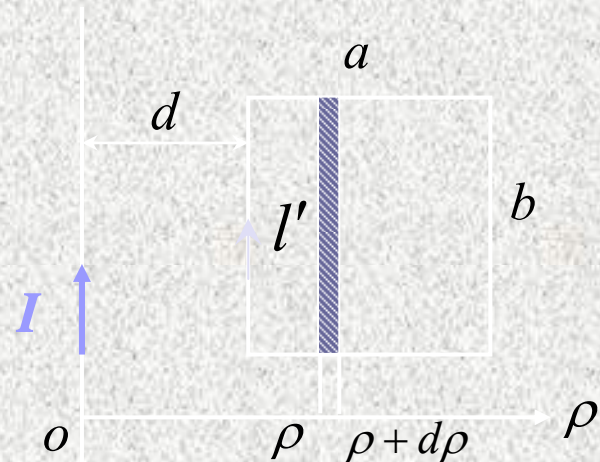
互感是研究一个回路电流在另一个回路所产生的磁效应，它不仅与两个回路的几何尺寸和周围媒质有关，还和两个回路之间的相对位置有关。

计算互感的一般步骤：

$$\text{设 } I_1 \rightarrow H_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{21} = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \xrightarrow{N_2\Phi_{21}} \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

例 4.7.3 如右图，一根长直导线与一边长为 a 的矩形线圈共面，线圈与直导线平行，接近直导线的 b 边到直导线的距离为 d ，求两导线间的互感。



解：设长直导线中有电流 I 通过，则直导线产生的磁场穿过矩形线圈的磁链为

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} b d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

互感 $M = \Psi / I = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$

例 4.7.4 图示尺寸的环形磁心，由导磁率分别为 μ_1 和 μ_2 的两个半环形磁芯构成，在磁芯上均匀密绕有 N 匝线圈，在环形磁芯轴线处置有一无限长直导线，试求长直导线与线圈之间的互感 M 。

解：选柱坐标，设长直导线上通有电流 I_1 ，应用安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} \cdot d\mathbf{l} = I_1$$

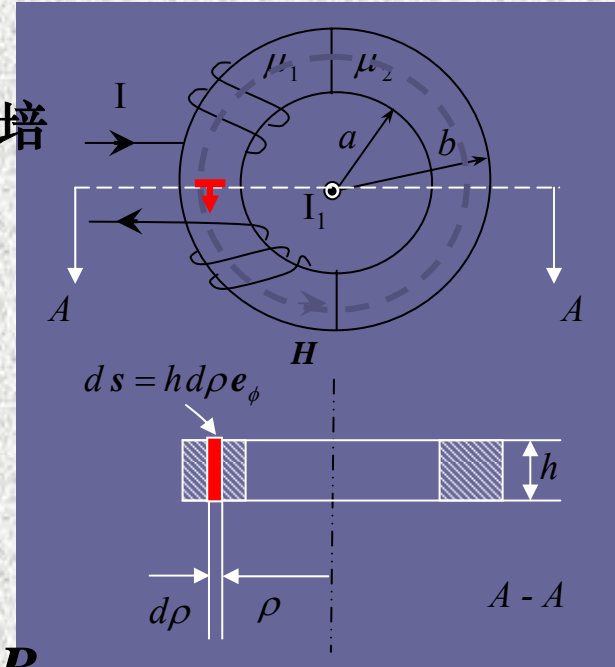
$$\pi \rho \left(\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} \right) = I_1$$

在分界面上有 $B_{1n} = B_{2n}$ ，且磁场没有切向分量： $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$

因此
$$\pi \rho B_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = I_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{I \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} \mathbf{e}_\phi ;$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{I \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2) \pi \rho} h d\rho = \frac{I \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Psi = N\Phi = \frac{NI \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a} \quad M = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \mu_1 \mu_2 h}{(\mu_1 + \mu_2) \pi} \ln \frac{b}{a}$$



8. 磁场能量与力

4.8.1 恒定磁场中的能量

假设：• 媒质为线性；

- 磁场建立无限缓慢（不考虑涡流及辐射）；
- 系统能量仅与系统的最终状态有关，与能量的建立过程无关。

磁场能量的推导过程

第一步： i_1 从 $0 \rightarrow I_1$, $i_2 = 0$

则 t 时刻，回路1、2中的感应电动势为

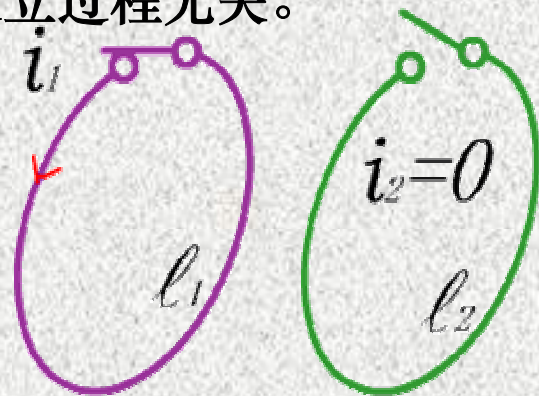
$$\varepsilon_{11} = -\frac{d\psi_{11}}{dt}, \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt}$$

若要继续充电，外源必须克服回路的感应电动势做功，即

$$dA'_1 = (-\varepsilon_{11})i_1 dt = \frac{d\psi_{11}}{dt} i_1 dt = i_1 d\psi_{11} \quad dA'_2 = (-\varepsilon_{21})i_2 dt = \frac{d\psi_{21}}{dt} i_2 dt = i_2 d\psi_{21}$$

i_1 从 $0 \rightarrow I_1$ 过程中，外源所做的功

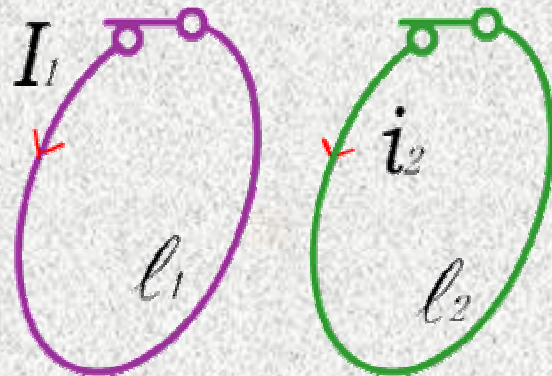
$$A' = A'_1 + A'_2 = \int dA'_1 + 0 = \int_0^{I_1} i_1 d\psi_{11} = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = L_1 I_1^2 / 2$$



第二步： I_1 不变， i_2 从 $0 \rightarrow I_2$

则 t 时刻，回路1、2中的感应电动势为

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt}, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{d\psi_{22}}{dt}$$



若要继续充电，外源必须克服回路的感应电动势做功，即

$$dA_1'' = (-\varepsilon_{12})I_1 dt = \frac{d\psi_{12}}{dt} I_1 dt = M_{12} I_1 di_2;$$

$$dA_2'' = (-\varepsilon_{22})i_2 dt = \frac{d\psi_{22}}{dt} i_2 dt = L_2 i_2 di_2$$

I_1 不变， i_2 从 $0 \rightarrow I_2$ 外源所做的功

$$A'' = A_1'' + A_2'' = I_1 \int_0^{I_2} M_{12} di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = MI_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W_m = A = A' + A'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} (L_1 I_1 + M I_2) I_1 + \frac{1}{2} (M I_1 + L_2 I_2) I_2 \\
 &= \frac{1}{2} \psi_1 I_1 + \frac{1}{2} \psi_2 I_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 I_k \psi_k
 \end{aligned}$$

推广

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k$$

自有能
(n 项)

互有能
 $\binom{n^2}{2}$ 项

- $M_{ij} I_i I_j$ 与两回路的电流及互感系数有关，称为互有能。当两个载流线圈产生的磁通是相互增加的，互有能为正；反之为负。

- $\frac{1}{2} L_k I_k^2$ 是回路 k 独存在时的能量，称为自有能量。自有能量始终大于零。

- 对于单一回路 $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$

4.8.2 磁场能量的分布

磁场能量是在建立回路电流的过程中形成的，分布于磁场所在的整个空间中。

考虑到磁通可以用磁矢量位 A 表示，则磁能 W_m 可表示为

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} I_k A \cdot dl$$

由于 $I dl$ 与 $J dV$ 等价，用 $J dV$ 所以 $dl \rightarrow \infty$ ，有

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V A \cdot J dV$$

利用 $\nabla \times H$ 的关系，

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V A \cdot \nabla \times H dV$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} dV$$

由矢量恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$

得
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$$

散度定理 $\frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$

$\because H \propto \frac{1}{r^2}, A \propto \frac{1}{r}, dS \propto r^2 \quad \therefore r \rightarrow \infty$ 时, 第一项为 0

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \int_V w_m dV \quad \text{单位: J (焦耳)}$$

磁能密度定义: $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$; 单位: J / m³

各向同性线性媒质 : $w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$

上式表明磁能是以磁能密度的形式储存在整个场域中。

例 4.8.1 长度为 l , 内外导体半径分别为 R_1 与 R_2 的同轴电缆, 通有电流 I , 磁导率均为 μ_0 , 试求电缆储存的磁场能量与自感。

解: 由安培环路定律, 得

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I'}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{\rho I}{2\pi R_1^2} \mathbf{e}_\phi & 0 < \rho < R_1 \\ \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi & R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \rho > R_2 \end{cases}$$

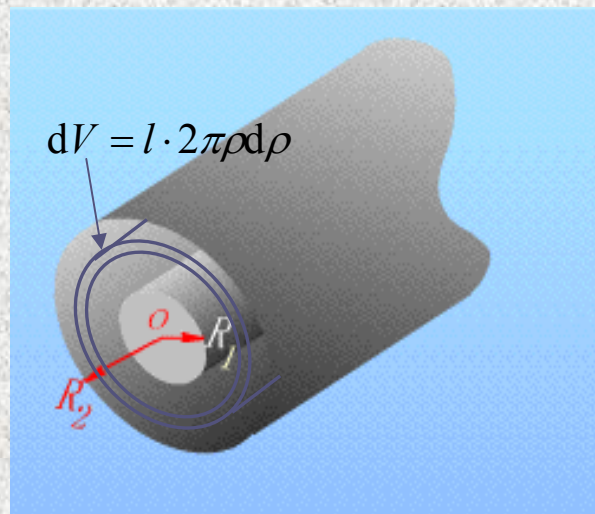


图4.8.1 同轴电缆截面

磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_0 H^2 dV \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left[\int_0^{R_1} \left(\frac{\rho I}{2\pi R_1^2} \right)^2 l 2\pi\rho d\rho + \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{I}{2\pi\rho} \right)^2 l 2\pi\rho d\rho \right] = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \end{aligned}$$

自感

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = L_i + L_0$$

4.8.3 磁场力

磁场能量的宏观效应就是载流导体或运动的电荷在磁场中要受到力的作用。仿照静电场，磁场力的计算也有三种方法。

1. 安培力
$$F = \oint_l Idl \times B$$

2. 虚功原理 (虚位移法)

3. 法拉第看法

虚功原理

假设系统中 n 个载流回路分别通有电流 I_1, I_2, \dots, I_n , 仿照静电场, 当回路仅有一个广义坐标发生位移 dg , 该系统中发生的功能过程是

$$dW = dW_m + fdg \quad \text{即} \quad d\left(\sum_{k=1}^n I_k \psi_k\right) = d\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k\right) + fdg$$

电源提供的能量 = 磁场能量的增量 + 磁场力所做的功

• 常电流系统

$$dW_m \Big|_{I_k = \text{常量}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k d\psi_k = \frac{1}{2} dW$$

表明外源提供的能量, 一半用于增加磁场能量, 另一半提供磁场力做功, 即

$$fdg = dW_m \Big|_{I_k = \text{常量}}$$

由此得广义力

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{I_k = \text{常量}}$$

• 常磁链系统

由于各回路磁链保持不变，故各回路没有感应电动势，电源不提供（增加的）能量，即 $(dW_{\text{所以}}0)$ 只有减少磁能来提供磁场力作功，故有

$$fdg = -dW_m \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$$

由此得广义力

$$f = - \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$$

两点说明：

- 两种假设结果相同，即

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{I_k = \text{常量}} = - \frac{\partial W_m}{\partial g} \Big|_{\psi_k = \text{常量}}$$

- 在实际问题中，若求相互作用力，只需求出互有磁能，并以相对位置为广义坐标，利用上式即可得到相应的广义力。

例 4.8.2 试求图示载流平面线圈在均匀磁场中受到的转距。设线圈中的电流 I_1 ，线圈的面积为 S ，其法线方向与外磁场 B 的夹角为 α 。

解：系统的磁能及相互作用能为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

$$W_{m\bar{H}} = M I_1 I_2 = I_1 \psi_{12} = I_1 B S \cos \alpha$$

选 α 为广义坐标，对应的广义力是转距，即

$$T = \left. \frac{\partial W_{m\bar{H}}}{\partial \alpha} \right|_{I_k = \text{常量}} = -I_1 B S \sin \alpha = -B m \sin \alpha$$

式中 $m = I_1 S$ 为载流回路的磁偶极矩；

$T < 0$ 表示广义力（转距）企图使广义坐标 α 减小，使该回路包围尽可能多的磁通。

用矢量表示为

$$\boxed{T = m \times B}$$

本例的结果完全适用于磁偶极子，也是电磁式仪表的工作原理。

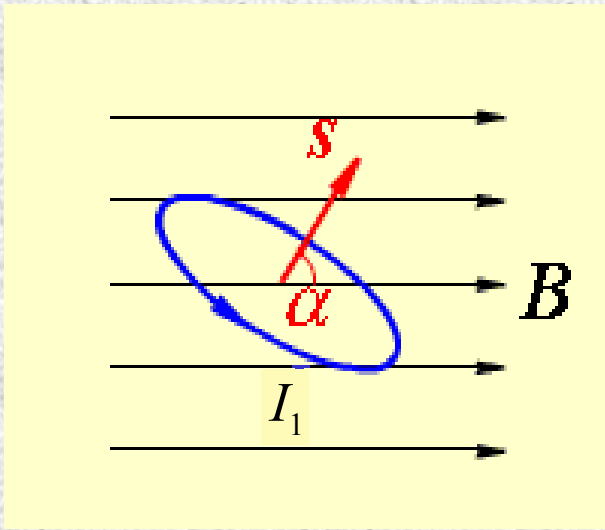
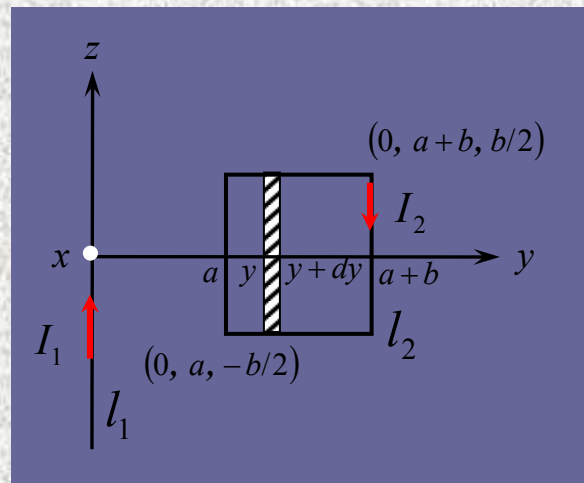


图4.8.2 外磁场中的电流回路

例4.8.3 求图示正方形载流回路所受的磁场力。

解：首先计算系统的磁场能量。长直载流细导线视为一个载流回路 l_1 ，两电流回路构成的系统磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$



载流回路为刚性， L_1 、 L_2 、 I_1 、 I_2 视为不变量，因此，上式中可能变化的是：

$$W_{m\text{互}} = M I_1 I_2 = I_2 (M I_1) = I_2 \psi_{21}$$

$$\psi_{21} = \phi_{21} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

将 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} (-\mathbf{e}_x)$ ， $d\mathbf{S} = b dy (-\mathbf{e}_x)$ 代入上式得

$$\psi_{21} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y} \cdot b dy = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

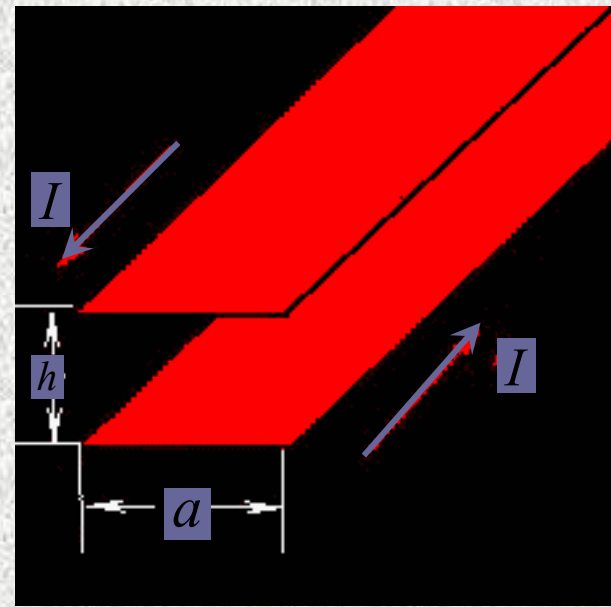
$$W_{m\text{互}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$W_{m\bar{H}} = I_2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\begin{aligned} f &= \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}} = \left. \frac{\partial W_{m\bar{H}}}{\partial g} \right|_{I_k = \text{常量}} = \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial g} \left[\ln \frac{a+b}{a} \right] \\ &= \frac{\mu_0 b I_1 I_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \ln \frac{a+b}{a} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} \right) = - \frac{\mu_0 I_1 I_2 b^2}{2\pi a(a+b)} \end{aligned}$$

因为 $f < 0$ 所以磁场的方向沿 a 减小的方向。

例 4.8.4 一对宽为 a 相距 h 的平行带线传输线，其中流有相反方向的电流 I 。如果带线宽 $a \gg h$ ，忽略边沿效应，求带线间单位长度上的作用力。



解：在 $a \gg h$ 条件下，忽略边沿效应，可以认为带线间的磁场是均匀的。利用虚位移法求解磁场力。

应用安培环路定律得带线间的磁场 $H = I / a$

$$\text{带线间磁能密度} \quad w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{a^2} = \mu_0 \frac{I^2}{2a^2}$$

$$\text{单位长度总的磁场能量:} \quad W_m = w_m h a = \frac{\mu_0 I^2 h}{2a}$$

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I=\text{const}} = \frac{dW_m}{dh} = \frac{\mu_0 I^2}{2a}$$

结果 $f > 0$ 表示两板间的作用力是排斥力。