第二章

静　电　场

2011-3-15

重庆大学电气工程学院

第2章 静电场

1、库伦定律 电场强度

2、静电场的无旋性 电位

3、静电场中的导体与电介质

4、高斯定律

5、静电场基本方程 介质分界面上的衔接条件

6、电位的微分方程与边值问题

7、静电场的间接求解方法

8、电容与部分电容

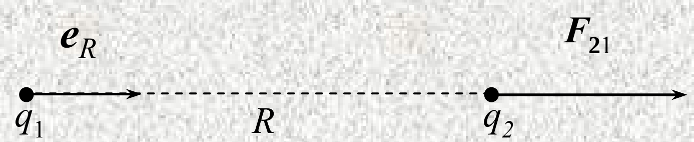
9、静电能量与力

1. 库伦定律 电场强度

1. 库仑定律

库仑定律是静电现象的基本实验定律，真空中两个静止的点电荷 q_1 与 q_2 相距为R时，其相互作用力:

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{12}}{R^2} \qquad \text{N (牛顿)}$$



$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{21}}{R^2} \qquad \text{N (牛顿)}$$

两点电荷之间的作用力

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

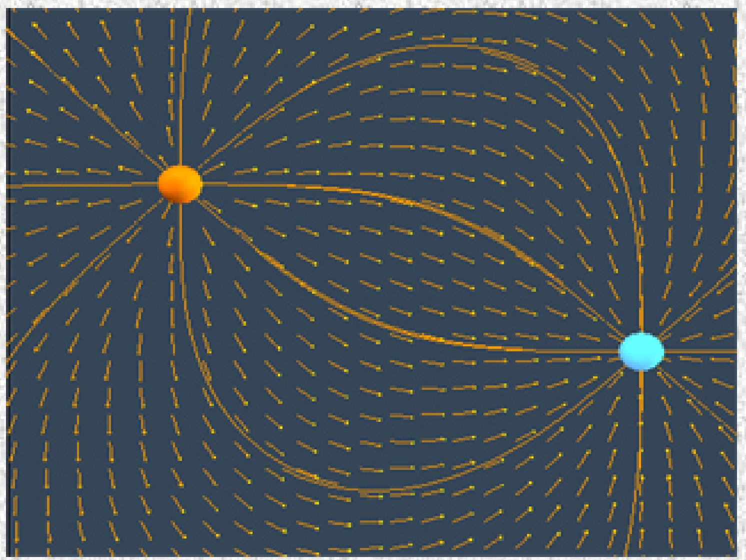
式中 $\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36\pi} = 8.85\times10^{-12}$ F/m)

2. 电场强度

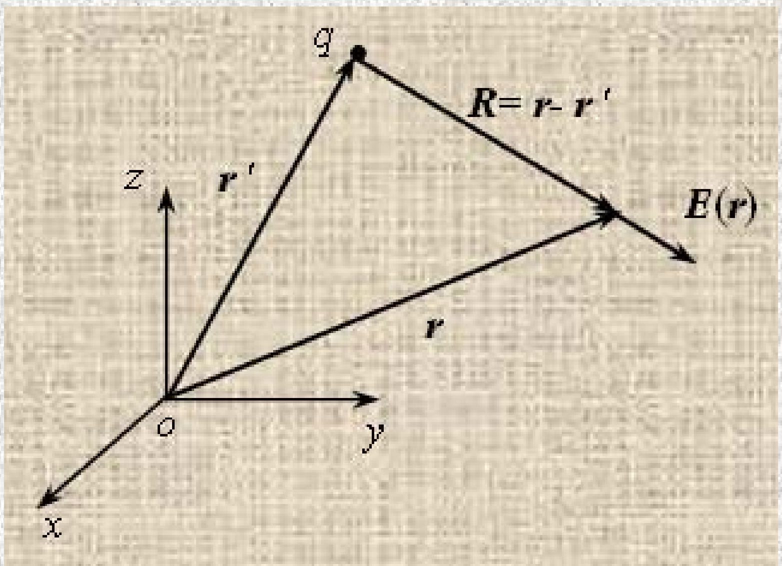
定义：

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\lim_{q_t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(x,y,z)}{q_t}\qquad \text{V/m (N/C)}$$

电场强度（Electric Field Intensity) $\boldsymbol{E}$ 表示单位正电荷在电场中所受到的力($\boldsymbol{F}$), 它是空间坐标的矢量函数, 定义式给出了$\boldsymbol{E}$ 的大小、方向与单位。



1) 点电荷产生的电场强度



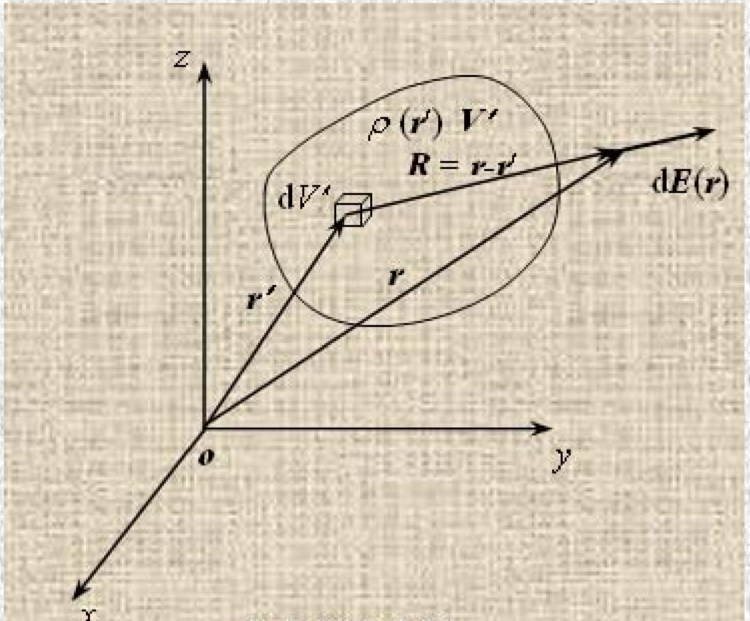
位于 r '处的 q 在 r 点产生的 E

$$\boldsymbol{F} = \frac{q\ q_t}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \qquad \text{V/m}$$

2) 连续分布电荷产生的电场强度



体电荷的电场

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')$$

体电荷分布 $\mathrm{d}q = \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|^3}\mathrm{d}q$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathrm{r}')\mathrm{d}V'}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

面电荷分布: $\mathrm{d}q = \sigma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s'$ 线电荷分布: $\mathrm{d}q = \tau(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l'$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}s'}{R^2}\boldsymbol{e}_R \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l'}{R^2}\boldsymbol{e}_R$$

2. 静电场的无旋性 电位

1. 静电场旋度

点电荷

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\times\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \end{cases}$$

矢量恒等式 $\nabla\times C\boldsymbol{F} = C\nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla C\times\boldsymbol{F}$

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\nabla\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

直接微分得 $\nabla\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0$

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -3\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0$$

故 $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ 电场强度$\boldsymbol{E}$ 的旋度等于零

由叠加定理知上述结论适用于点电荷群和连续分布电荷产生的电场。即任一分布形式的静电荷产生的电场的旋度恒等于零，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$$

表明：静电场是一个无旋场。

2. 静电场的环路定律

由斯托克斯定理，得

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_s(\nabla\times \boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\equiv 0$$

- 在静电场中,电场强度沿着闭合回路的环量恒等于零。
- 电场力作功与路径无关,静电场是保守场。

$\nabla\times \boldsymbol{E}=0 \quad \Rightarrow \quad \oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 二者等价。

无旋场一定是保守场，保守场一定是无旋场。

3. 电位函数

1) 电位的引出

$$\because \nabla \times \mathrm{E} = 0$$

根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \varphi = 0$

$$\therefore \boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$$

在静电场中可通过求解电位函数(*Potential*)，再利用上式可方便地求得电场强度*E*，式中负号表示电场强度的方向从高电位指向低电位。

2) 已知电荷分布，求电位:

以点电荷为例推导电位:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\because\quad \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\nabla\varphi(r)$$

$$\therefore\quad \varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+C$$

点电荷 $$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+C$$

点电荷群 $$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i'|}+C$$

连续分布电荷 $$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma'}\frac{\mathrm{d}q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+C$$

$$\mathrm{d}q:\quad \rho\,\mathrm{d}V,\quad \sigma\,\mathrm{d}S,\quad \tau\,\mathrm{d}l$$

3) 电力线与等位线（面）

- ***E*** **线：曲线上每一点切线方向应与该点电场强度*E* 的方向一致，若**

  $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ **是电力线的长度元，*E* 矢量将与** $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ **方向一致，**

故电力线微分方程 $$\boldsymbol{E}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

在直角坐标系中：

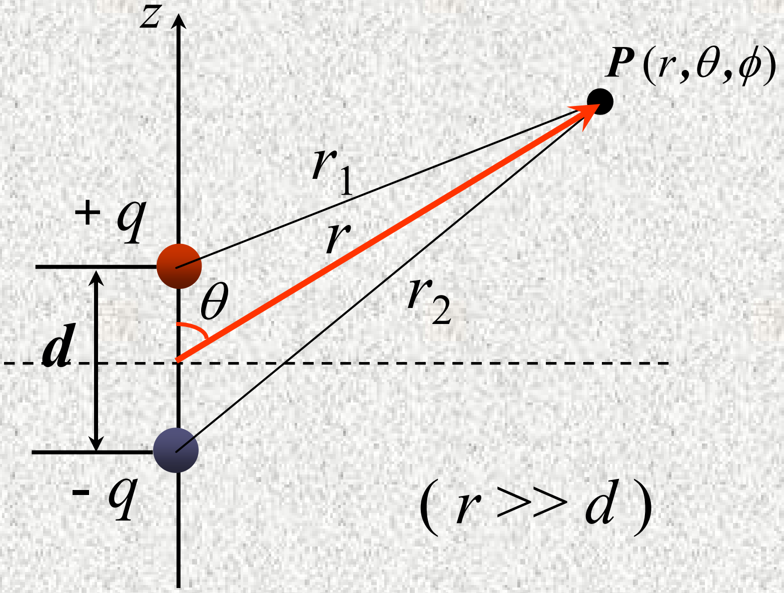
$$\frac{E_x}{\mathrm{d}x}=\frac{E_y}{\mathrm{d}y}=\frac{E_z}{\mathrm{d}z}$$ **微分方程的解即为电力线 *E* 的方程。**

- **在静电场中电位相等的点的曲面称为等位面，即等位线(面)方程:**

$$\varphi(x,y,z)=C$$

当取不同的 *C* 值时，可得到不同的等位线（面）。

例 2-3 两个大小相等，符号相反的点电荷+q和–q，其间拉开一个小位移d，方向由负电荷指向正电荷，由此构成了一个电偶极子。求电偶极子在真空中产生的φ、$\boldsymbol{E}$ 。



解：在球坐标系中：

$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

因为 $r >> d$，得

$$r_2 - r_1 \approx \left(r + \frac{d}{2}\cos\theta\right) - \left(r - \frac{d}{2}\cos\theta\right) = d\cos\theta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

代入上式，得

$$\varphi_p = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi_p = \frac{qd\ \boldsymbol{\cos}\ \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\boldsymbol{p}$表示电偶极矩，方向由负电荷指向正电荷。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)$$

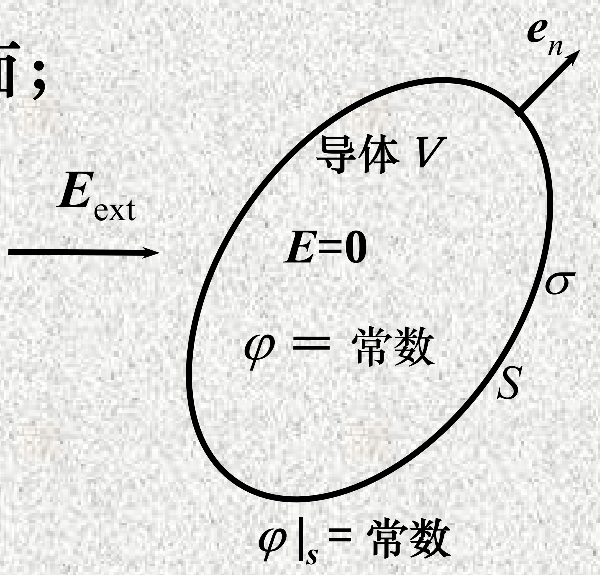
$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)$$

3. 静电场中的导体与电介质

1. 静电场中的导体

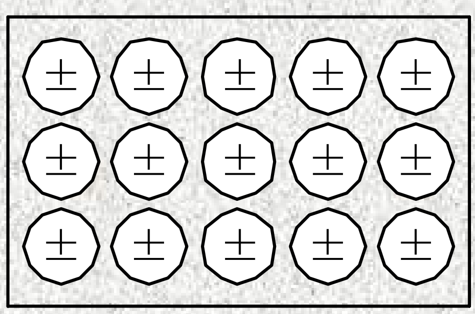
- 导体内电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为零，静电平衡；
- 导体是等位体，导体表面为等位面；
- 电场强度垂直于导体表面；
- 电荷分布在导体表面，且

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



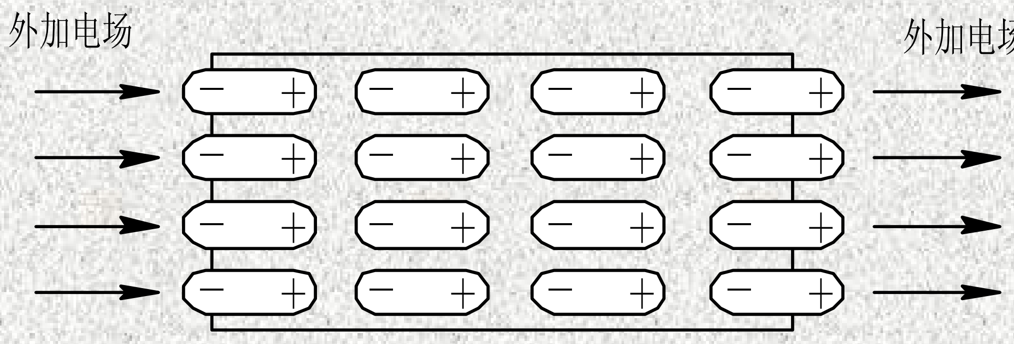
2. 静电场中的电介质

- 电介质在外电场*E*作用下发生极化，形成有向排列的电偶极矩；
- 电介质内部和表面产生极化电荷；
- 极化电荷与自由电荷都是产生电场的源。



(*a*)

(a) 极化前的介质分子



(*b*)

(b) 极化后形成电偶极子

用极化强度$\boldsymbol{P}$ 表示电介质的极化程度，即

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}_{eq}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{p}_{eq}}{\mathrm{d} V} \quad \mathrm{C/m^2}$$

电偶极矩体密度

式中 $\Delta \boldsymbol{p}_{eq} = \sum \boldsymbol{p}_{eq}$ 为体积元 ΔV 内电偶极矩的矢量和，$\boldsymbol{P}$ 的方向从负极化电荷指向正极化电荷。

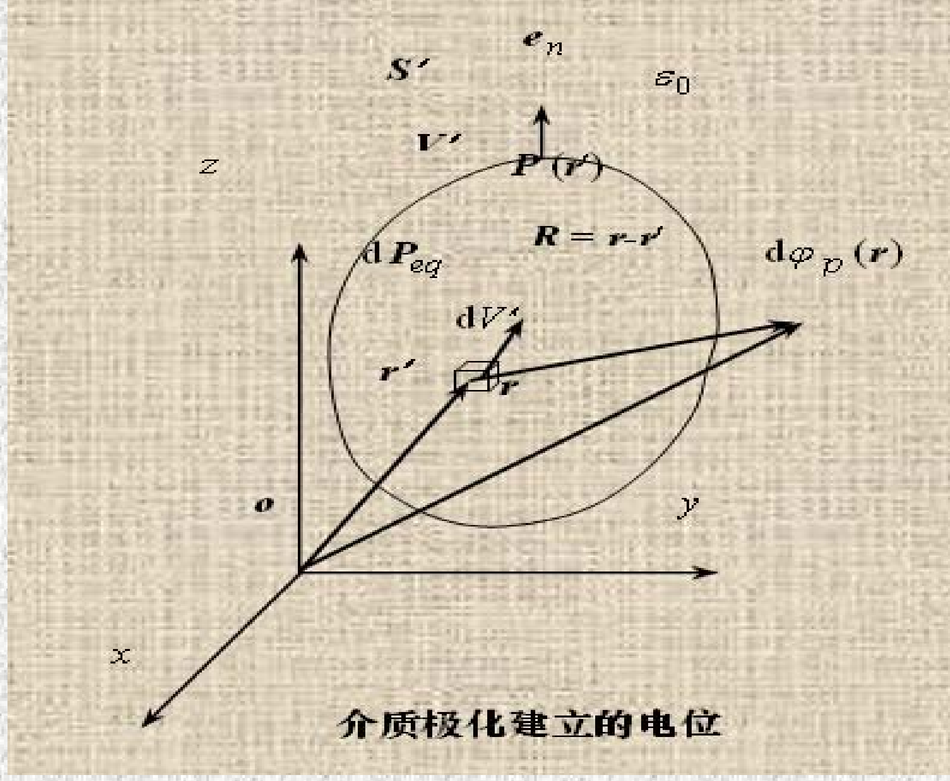
3. 极化介质的附加电场效应

一个电偶极子产生的电位

$$\varphi_p = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

体积元dV的等效元电矩为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{eq} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$



介质极化建立的电位

则 $$\mathrm{d}\varphi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}_{eq}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}V' = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla'\frac{1}{R}$$

$$\therefore \quad \varphi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

上式利用了矢量关系 $$\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2} = \nabla'\frac{1}{R} = -\nabla\frac{1}{R}$$

$$\varphi_p(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V'$$

利用矢量恒等式作变换

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}=\nabla'\cdot\left[\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]-\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

$$\varphi_p(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_{V'}\nabla'\cdot\left[\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\right]\mathrm{d}V'-\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{s'}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_n}{R}\mathrm{d}s'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

定义极化电荷体密度和面密度分别为

$$\rho_p=-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') \qquad \sigma_p=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_n$$

$$\varphi_p(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_p(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\sigma_p(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$

$$\varphi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho_p(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'} \frac{\sigma_p(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$

这就是电介质极化后，由面极化电荷 σ_p **和体极化电荷** ρ_p **共同作用在真空** ε_0 **中产生的电位。**

$$\therefore \quad \boldsymbol{E}_p = -\nabla\varphi_p(\boldsymbol{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho_p(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'} \frac{\sigma_p(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}S'$$

- 根据电荷守恒原理，这两部分极化电荷的总和

$$\int_{V'} -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \mathrm{d} V' + \oint_{S'} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d} S' \equiv 0$$

- 有电介质存在的场域中，任一点的电位及电场强度表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{V'} \frac{(\rho_f + \rho_p)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}V' + \oint_{S'} \frac{(\sigma_f + \sigma_p)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}S'\right]$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{V'} \frac{(\rho_f + \rho_p)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}V' + \oint_{S'} \frac{(\sigma_f + \sigma_p)(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}S'\right]$$

空间任一点的电场为合成场，即 $\boxed{\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{E}_p}$

静电场恒为无旋场 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

实验结果表明，在各向同性、线性、均匀介质中极化强度$\boldsymbol{P}$与该点的电场强度$\boldsymbol{E}$成正比，即

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

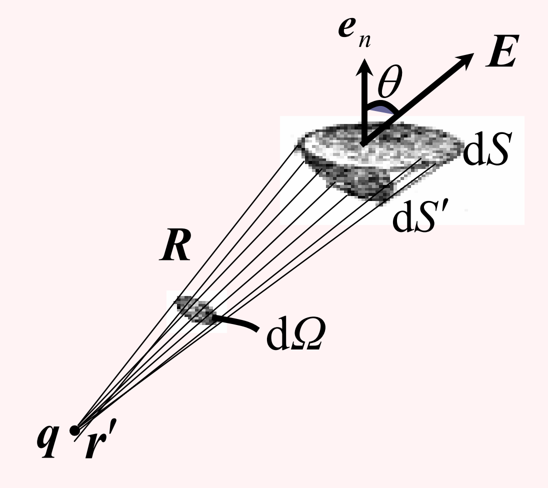
χ称为介质的电极化率，无量纲量。$\boldsymbol{E}$为合成电场

- 各向同性：媒质的特性不随电场的方向而改变,反之称为各向异性;
- 线性：媒质的参数不随电场的值而变化;
- 均匀：媒质参数不随空间坐标（x , y, z）而变化。

4. 高斯定律

1. 真空中的高斯定律

1).高斯定律的积分形式: $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$



$\mathrm{d}S'$ 和 $\mathrm{d}S$ 所张的立体角相等

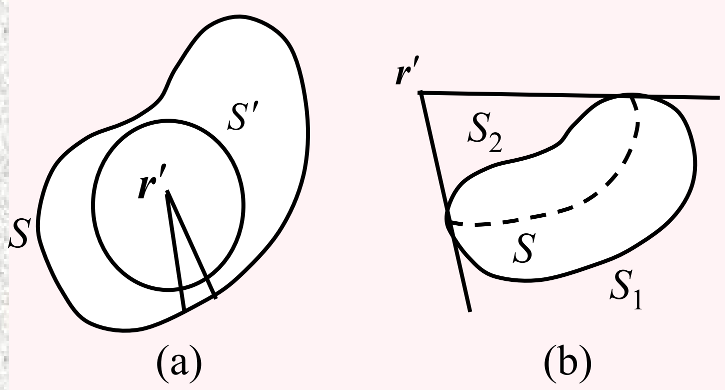
证明：设电场由点电荷产生，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R$$

则 $$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\frac{\boldsymbol{e}_R\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^2} = \frac{\cos\theta\, \mathrm{d}S}{R^2} \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi R^2}$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S'}{R^2} = \frac{\cos\theta\, \mathrm{d}S}{R^2} = \frac{\boldsymbol{e}_R\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^2}$$ 立体角定义式

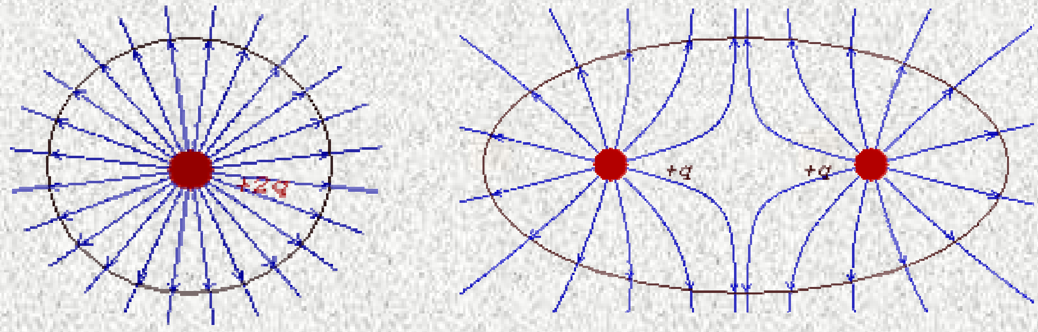


闭合面对空间一点 $\boldsymbol{r}'$ 所张的立体角

$$\therefore \quad \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega \qquad \oint_S \mathrm{d}\Omega = \begin{cases} 4\pi & \boldsymbol{r}'\in S \\ 0 & \boldsymbol{r}'\notin S \end{cases}$$

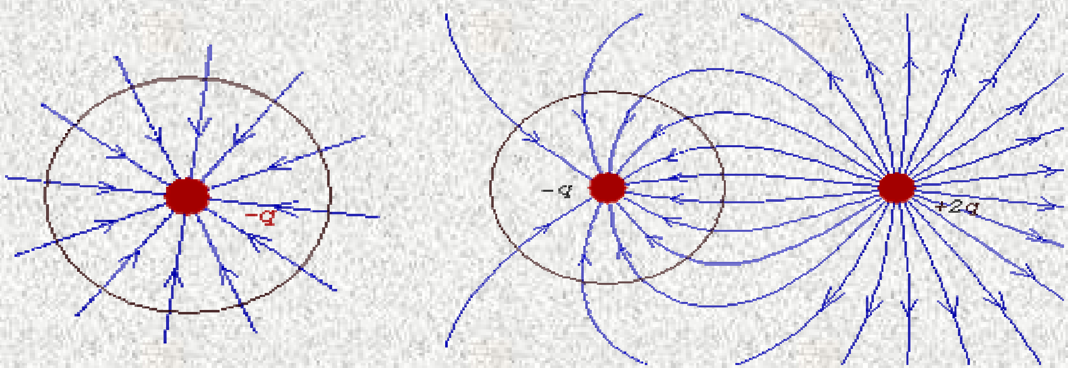
闭合面S 内包围有n个点电荷 $$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

闭合面S 内电荷按体密度分布 $$\oint_S \mathrm{E}\cdot \mathrm{d}\,\mathrm{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'} \rho\, \mathrm{d}V'$$



闭合曲面的电通量

$\boldsymbol{E}$ 的通量仅与闭合面S 所包围的净电荷有关。



闭合面外的电荷对场的影响

S 面上的 $\boldsymbol{E}$ 是由系统中全部电荷产生的。

2.静电场的散度———高斯定律的微分形式

体电荷产生的电场

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V'}\rho\,\mathrm{d}V'$$

对上式等号左端应用散度定理

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\Rightarrow\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

真空中高斯定律的微分形式

2. 真空中的高斯定律

1.高斯定律的积分形式:

$$\oint_s \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2.静电场的散度———高斯定律的微分形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.4.2. 高斯定律的一般形式

1、高斯定律的微分形式

（真空中） $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_f}{\varepsilon_0}$

（电介质中） $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$

代入 $\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$,得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P}) \qquad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_f$$

定义电位移矢量（ Displacement）

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad (\mathrm{C/m^2})$$

则有 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 电介质中高斯定律的微分形式

高斯定律的一般形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

- $\boldsymbol{D}$ 的散度表明 空间某点电场只与该点的电荷密度有关，而与其他点的电荷分布无关。

- $\boldsymbol{D}$ 线从正的自由电荷发出而终止于负的自由电荷。

- 在各向同性介质中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

其中 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ ——相对介电常数；

ε ——介电常数，单位（F/m）

图示平行板电容器中放入一块介质后，其*D* 线、*E* 线和 *P* 线的分布。

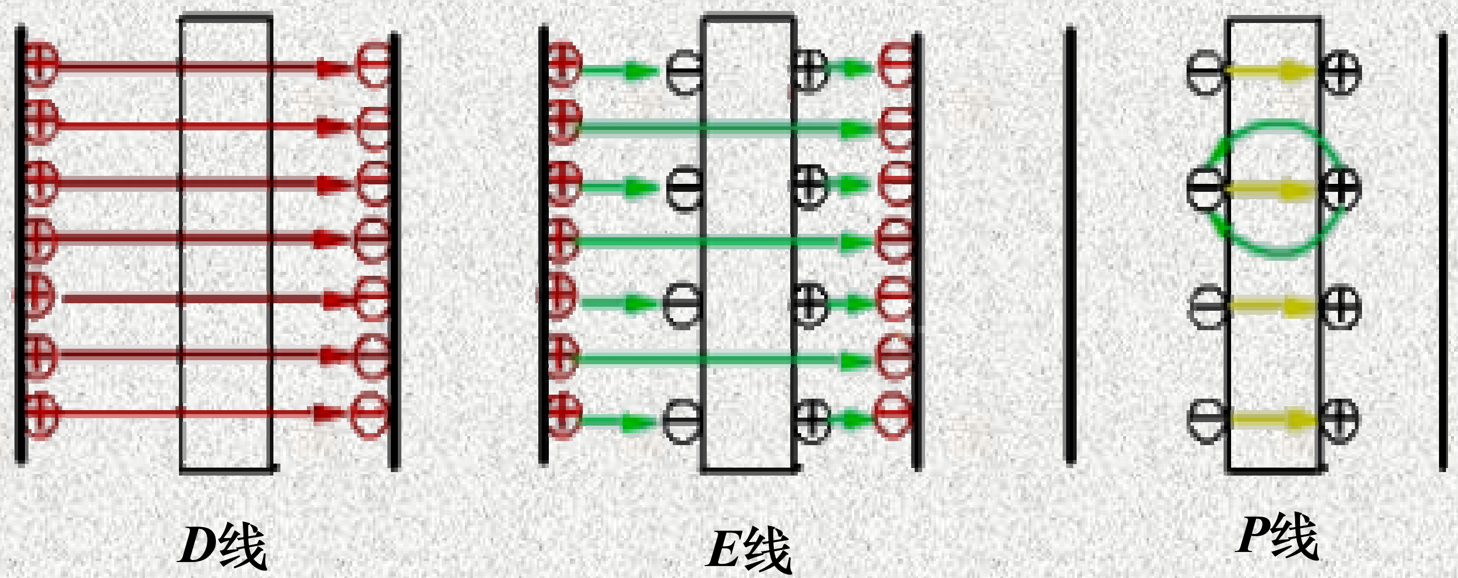


图2.2.17 *D*、*E*与 *P* 三者之间的关系

- *D* 线由正的自由电荷发出，终止于负的自由电荷；
- *E* 线的起点与终点既可以在自由电荷上，又可以在极化电荷上；
- *P* 线由负的极化电荷发出，终止于正的极化电荷。

2、高斯定律的积分形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D}\, dV = \int_V \rho \, dV$$

散度定理

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum q$$

D 的通量与介质无关，但不能认为 ***D*** 的分布与介质无关。

3. 高斯定律的应用

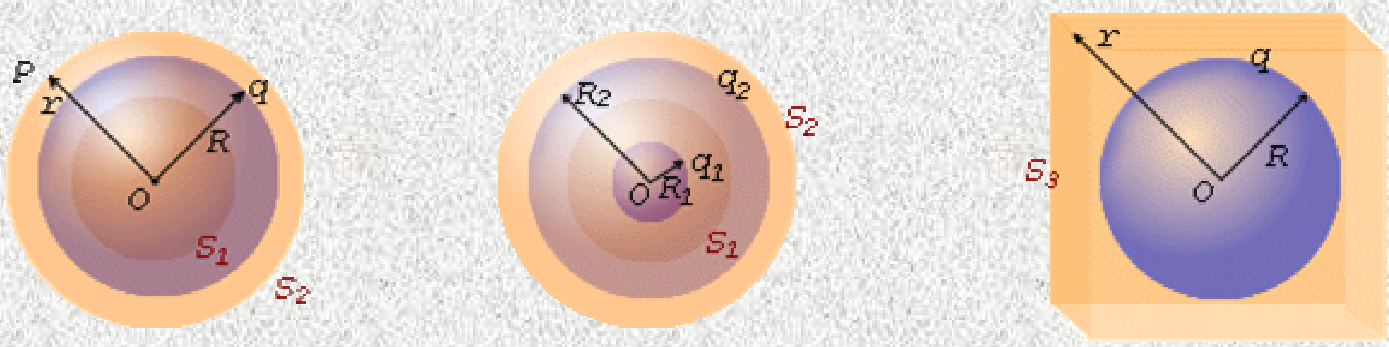
- 高斯定律适用于任何情况，但只有具有一定对称性的场才能得 到解析解。

计算技巧:

a）分析给定场分布的对称性，判断能否用高斯定律求解。

b）选择适当的闭合面作为高斯面，使 $\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$ 容易积分。

- 球对称分布：包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等。



(*a*) (*b*) (*c*)

图1.2.20. 球对称场的高斯面

试问： 能否选取正方形的高斯面求解球对称场

- 轴对称分布：包括无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。

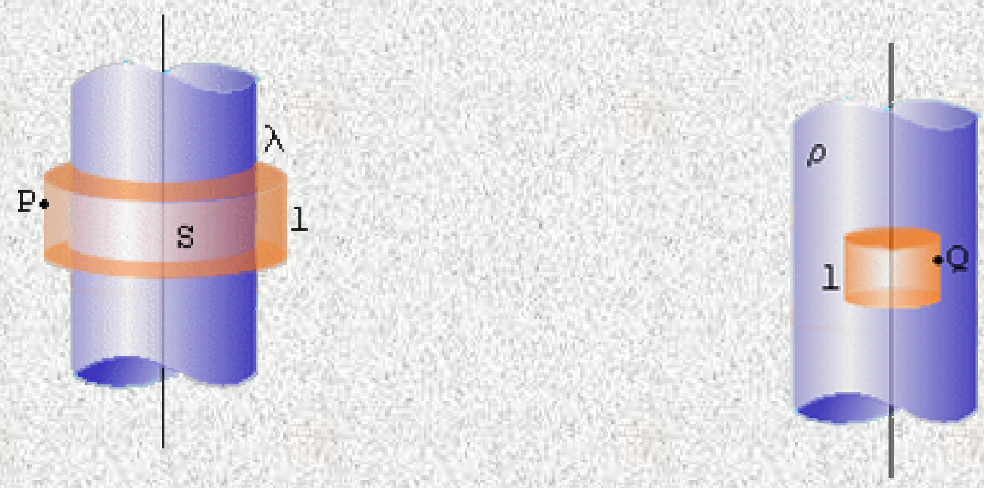


图1.2.21. 轴对称场的高斯面

- 无限大平面电荷：包括无限大的均匀带电平面，平板等。

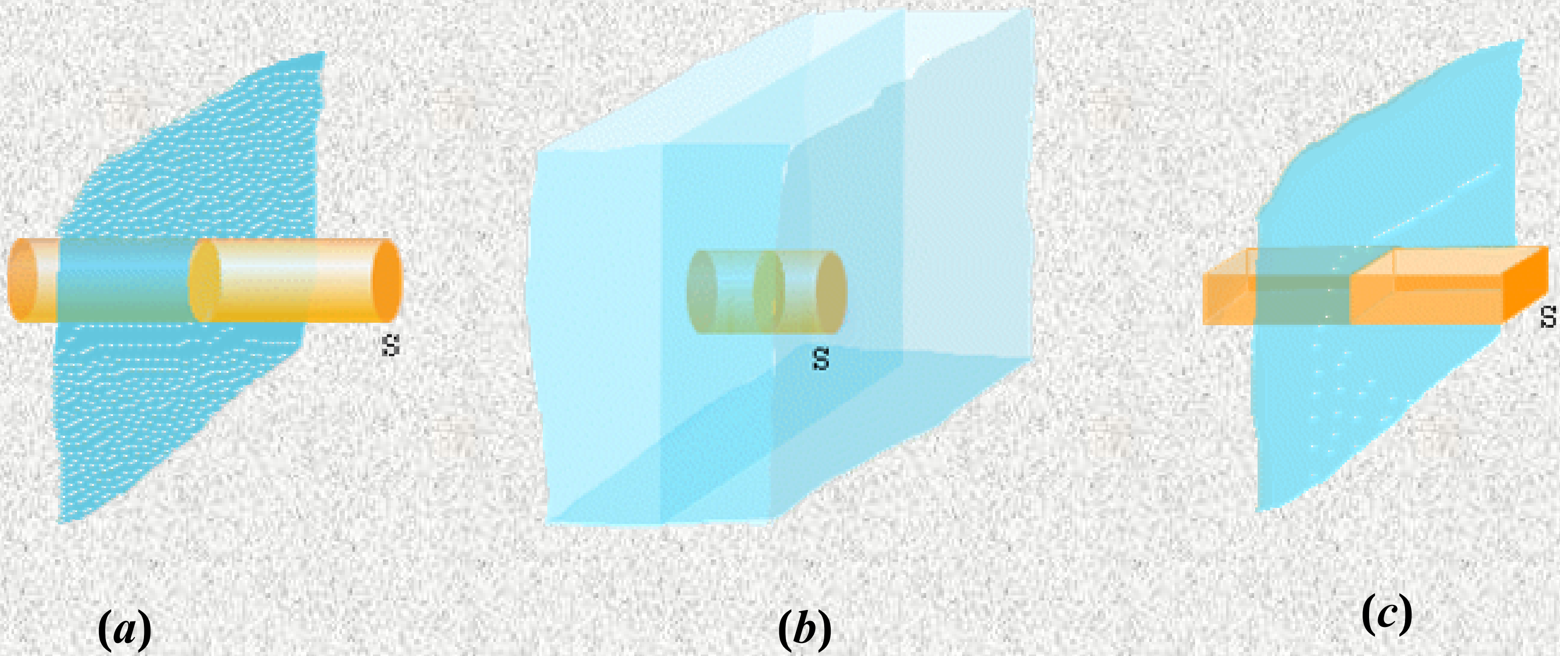


图3. 平行平面场的高斯面

5. 静电场的基本方程 分界面上的衔接条件

1 静电场的基本方程

静电场是无旋、有源场，静止电荷就是静电场的源。

这两个重要特性用简洁的数学形式为:

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=0 & (\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0 \\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q \end{cases}$$

本构关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$

例2.5.1 已知$\boldsymbol{A}=3x\boldsymbol{e}_x+4y\boldsymbol{e}_y+5z\boldsymbol{e}_z$，试判断它能否表示一个静电场?

解：根据静电场的旋度恒等于零的性质，

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z=0$$

对应静电场的基本方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，矢量 A 可以表示一个静电场。

2. 介质分界面上的衔接条件

1、 电位移矢量$\boldsymbol{D}$ 的衔接条件

以分界面上点P 作为观察点，作一小扁圆柱高斯面 $(\Delta L \to 0)$。

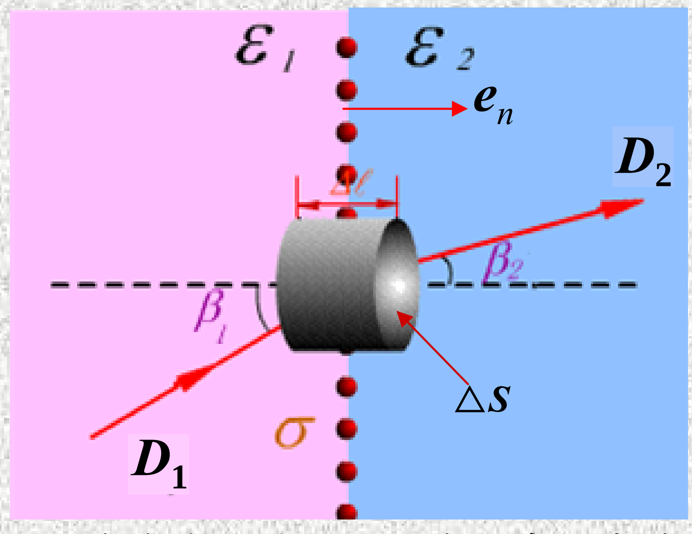


图2.5.1 在电介质分界面上应用高斯定律

根据

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q$$

则有 $$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \qquad \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma$$

分界面两侧的 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量不连续。当 $\sigma = 0$ 时，$\boldsymbol{D}$ 的法向分量连续。

2、电场强度 *E* 的衔接条件

以点*P* 作为观察点，作一小矩形回路（ Δl_2 ）$\to 0$

根据 $\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ 则有

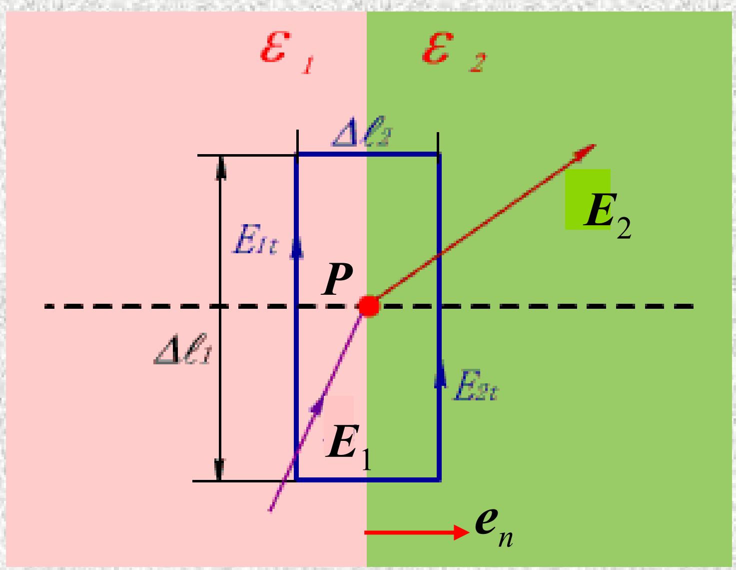


图2.5.2 在电介质分界面上应用环路定律

$$E_{1t}\Delta l_1 - E_{2t}\Delta l_1 = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0$$

分界面两侧 *E* 的切向分量连续。

当分界面为导体与电介质的交界面时，分界面上的衔接条件为：

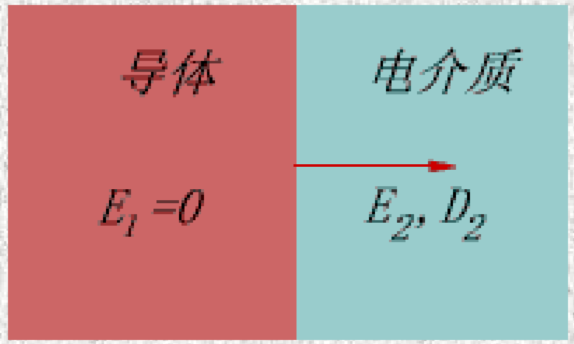


图 2.5.3 导体与电介质分界面

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} D_{2n} = \sigma \\ E_{2t} = 0 \end{matrix}$$

表明：（1）导体表面是一等位面，电力线与导体表面垂直，电场仅有法向分量；（2）导体表面上任一点的***D***就等于该点的自由电荷密度 σ。

折射定律:

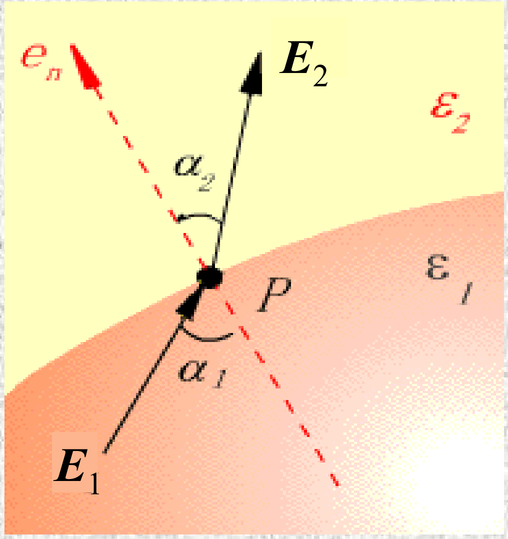


图 2.5.4 分界面上*E* 线的折射

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\alpha_2$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$ 折射定律

对于各向同性线性介质，在交界面上不存在σ时，***E***、***D*** 满足折射定律。

3、用电位函数 φ 表示分界面上的衔接条件

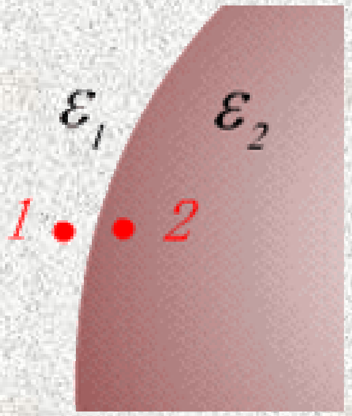


图2.5.5 电位的衔接条件

设点1与点2分别位于分界面的两侧，其间距为d，$d\to 0$，则

$$\varphi_1-\varphi_2 = \lim_{1\to 2}\int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot d\,\boldsymbol{l} = \lim_{d\to 0}\left(E_{1n}\frac{d}{2}+E_{2n}\frac{d}{2}\right)=0$$

因此 $\varphi_1=\varphi_2$

表明：在介质分界面上，电位是连续的。

$$\because \quad D_{1n}=\varepsilon_1 E_{1n}=-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\ , \quad D_{2n}=\varepsilon_2 E_{2n}=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

所以 $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma \quad \Longleftrightarrow \quad D_{2n}-D_{1n}=\sigma$

表明：一般情况下 $(\sigma\neq 0)$，电位的导数是不连续的。

6. 电位微分方程与边值问题

1 泊松方程与拉普拉斯方程

推导微分方程的基本出发点是静电场的基本方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \longrightarrow \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \longrightarrow \nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon=-\varepsilon\nabla\cdot\nabla\varphi=\rho$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$\varepsilon=$ 常数

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$ 泊松方程

当 $\rho=0$ 时

$$\nabla^2\varphi=0$$ 拉普拉斯方程

∇^2 ——拉普拉斯算子 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

注意：泊松方程与拉普拉斯方程只适用于各向同性、线性的均匀媒质。

2 静电场的边值问题

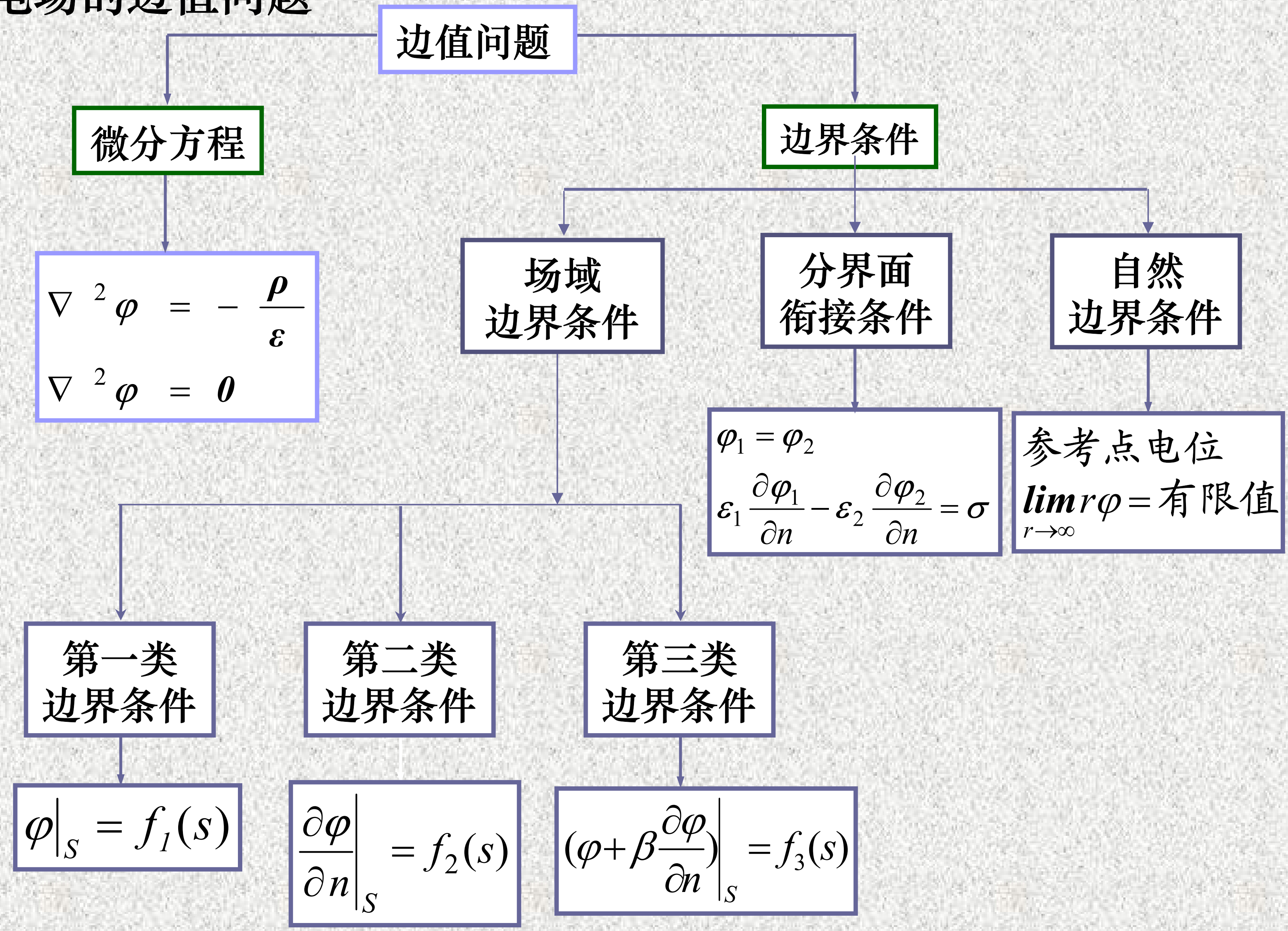


图2.6.2 边值问题框图

例2.6.1 图示长直同轴电缆横截面。已知缆芯截面是一边长为$2b$的正方形，铅皮半径为a，内外导体之间电介质的介电常数为ε，并且在两导体之间接有电源 U_0，试写出该电缆中静电场的边值问题。

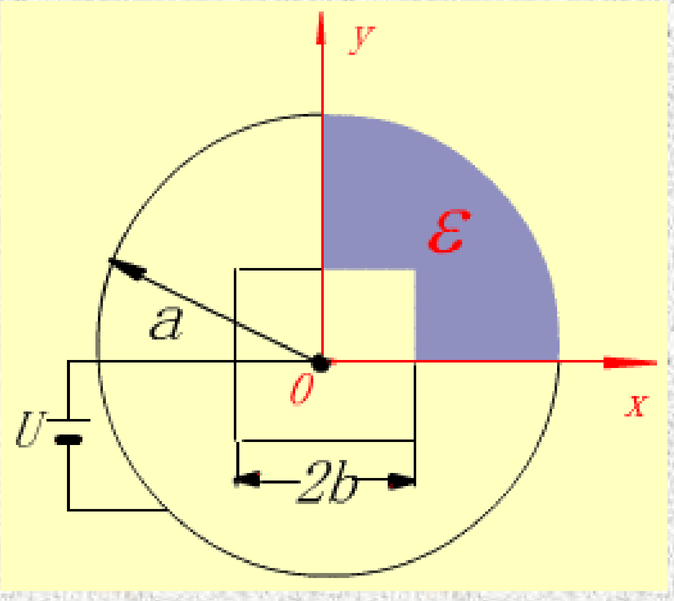


图 2.6.4 缆心为正方形的同轴电缆横截面

解：根据场分布对称性，确定场域。

场的边值问题

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{（阴影区域）}$$

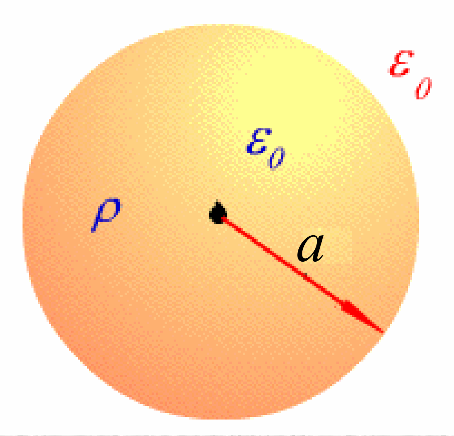
$$\varphi\Big|_{(x=b,0\le y\le b\text{及}y=b,0\le x\le b)} = U_0$$

$$\varphi\Big|_{x^2+y^2=a^2,x\ge 0,y\ge 0} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{(x=0,b\le y\le a)} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{(y=0,b\le x\le a)} = 0$$

例2.6.2 设有电荷均匀分布在半径为a的介质球型区域中，电荷体密度为ρ，试用解微分方程的方法求球体内、外的电位及电场。



解: 采用球坐标系,分区域建立方程

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (0\le r\le a)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right) = 0 \qquad (a\le r\le \infty)$$

图 2.6.5 体电荷分布的球形域电场

积分得通解 $\varphi_1(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_1\dfrac{1}{r} + C_2$ $\qquad \varphi_2(r) = \dfrac{C_3}{r} + C_4$

边界条件 $\varphi_1\big|_{r=a} = \varphi_2\big|_{r=a}$ $\qquad \varphi_1\big|_{r\to 0} \Rightarrow$ 有限值

$$\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

$\varphi_2\big|_{r\to\infty} = 0$ 参考点电位

解得 $C_1 = 0 \quad C_4 = 0$

$$C_3 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, \quad C_2 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$$

电位: $$\varphi_1(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2) \qquad 0 \le r \le a$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad a \le r \le \infty$$

电场强度（球坐标梯度公式）：

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r \qquad 0 \le r \le a$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad a \le r \le \infty$$

对于一维场（场量仅仅是一个坐标变量的函数），只要对二阶常系数微分方程积分两次，得到通解；然后利用边界条件求得积分常数，得到电位的解；再由 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 得到电场强度$\boldsymbol{E}$的分布。

2 唯一性定理

1、唯一性定理

在静电场中满足给定边界条件的电位微分方程（泊松方程或拉普拉斯方程)的解是唯一的，称之为静电场的唯一性定理(Uniqueness theorem)。

证明：（反证法）

2. 唯一性定理的重要意义

- 可判断静电场问题的解的正确性:
- 唯一性定理为静电场问题的多种解法(试探解、数值解、解析解等）提供了思路及理论根据。

证明 (反证法):

设场中任一点有两个电位函数 φ_1与φ_2均满足泊松方程,则其差值 $u=\varphi_1-\varphi_2$必满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2 u=\nabla^2\varphi_1-\nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho}{\varepsilon}+\frac{\rho}{\varepsilon}=0$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(u\nabla u)=u\nabla^2 u+(\nabla u)^2=(\nabla u)^2$

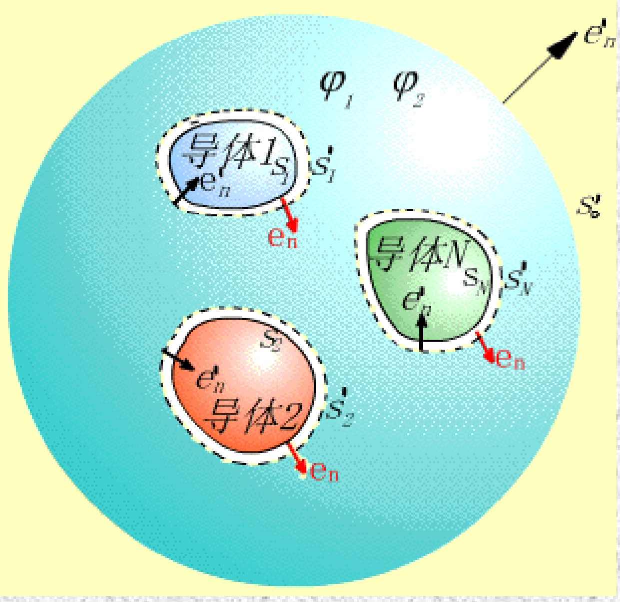


图2.6.6 证明唯一性定理用图

对场域求体积分,并利用高斯散度定理

$$\int_V\nabla\cdot(u\nabla u)dV=\oint_s u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla u)^2 dV$$

S为体积 V的边界面,即$S=S_0+S',S'=S_1+S_2+\cdots+S_n$,由于在无穷远 S_0处电位为零,因此有

$$\oint_s u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_{S'}u\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V(\nabla u)^2 dV$$

$$\oint_{s} u\nabla u\cdot dS=\int_{S'} u\frac{\partial u}{\partial n}dS'=\int_{V}(\nabla u)^2 dV \qquad (1)$$

若导体边界为第一类边 界条件,即$u=\varphi_1-\varphi_2=0$,则式(1)右边也为零,即

$$\nabla u=\nabla(\varphi_1-\varphi_2)=0$$

积分后,$\varphi_1-\varphi_2=C$,该式既满足场域,又满足边界,故 $C=0,\varphi_1=\varphi_2$,得证。

若导体边界为第二类边 界条件,即已知电荷面密度

$$\sigma=\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \qquad \text{即} \qquad \varepsilon\frac{\partial(\varphi_1-\varphi_2)}{\partial n}=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}=0$$

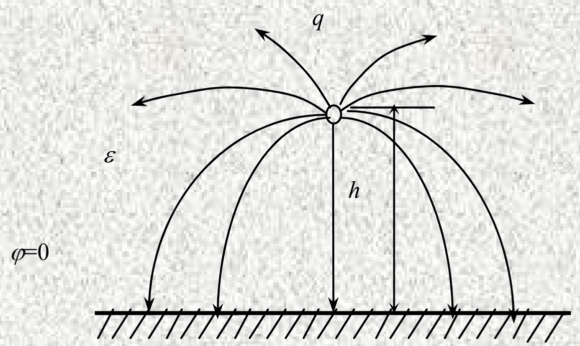
则式(1)右边也为零, 同上分析，必有$\varphi_1=\varphi_2$, 证毕。

由此,在场域V中各点, $u\equiv 0$, 即$\varphi_1=\varphi_2$, 也就是说有两个不同解 都满足微分方程和边界条 件的假设是不成立的，故唯一性定理得证。

返回

7. 静电场的间接求解方法

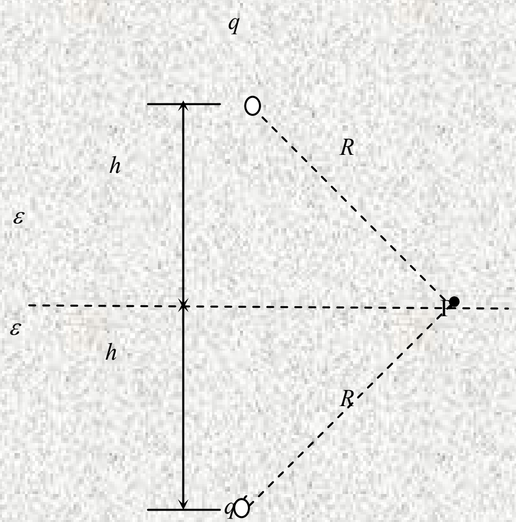
1. 镜像法



1.平面导体的镜像

边值问题:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \text{（除 } q \text{ 所在点外的区域）} \\ \varphi = 0 & \text{（导板及无穷远处）} \\ \oint_s \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = q & \text{（} S \text{ 为包围 } q \text{ 的闭合面）} \end{cases}$$



上半场域边值问题:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 & \text{（除 } q \text{ 所在点外的区域）} \\ \varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0 & \text{（导板及无穷远处）} \\ \oint_s \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = q & \text{（} S \text{ 为包围} q \text{ 的闭合面）} \end{cases}$$

镜像法: 用虚设的电荷分布等效替代媒质分界面上复杂电荷分布,虚设电荷的个数、大小与位置使场的解答满足唯一性定理。

例1.7.1 求空气中一个点电荷 q 在地面引起的感应电荷分布情况。

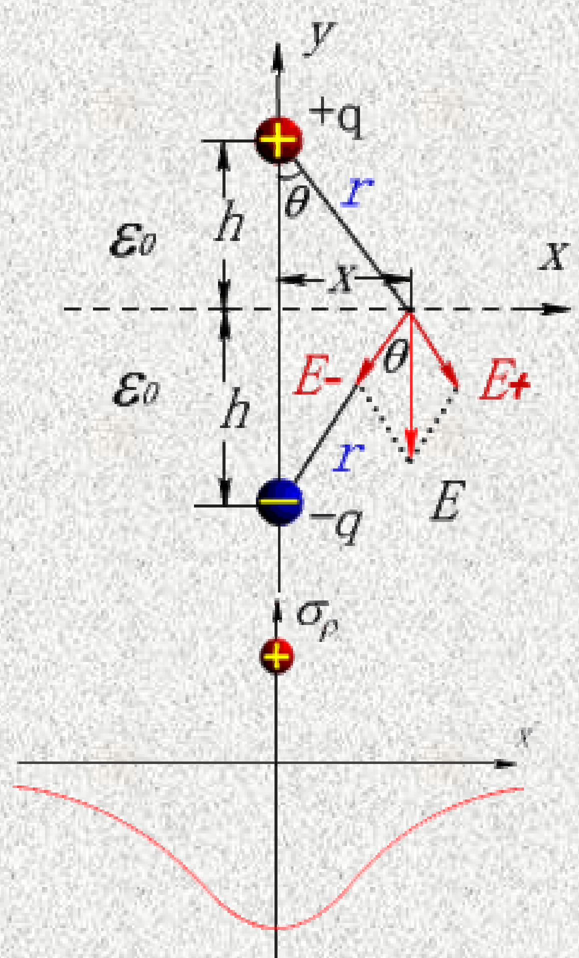


图1.7.2 点电荷 q 对地面引起的感应电荷的分布

解: 设点电荷 q 离地面高度为h，则

$$\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \qquad \text{（方向指向地面）}$$

$$E_p = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$= \frac{qh}{2\pi\varepsilon_0 (h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\sigma_p = -\varepsilon_0 E_p = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

整个地面上感应电荷的总量为

$$\int_S \sigma_p dS = \int_0^\infty \frac{-qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi x dx$$

$$= qh\left[\frac{1}{(h^2 + x^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -q$$

2. 导体球面镜像

设在点电荷附近有一接地导体球，求导体球外空间的电位及电场分布。

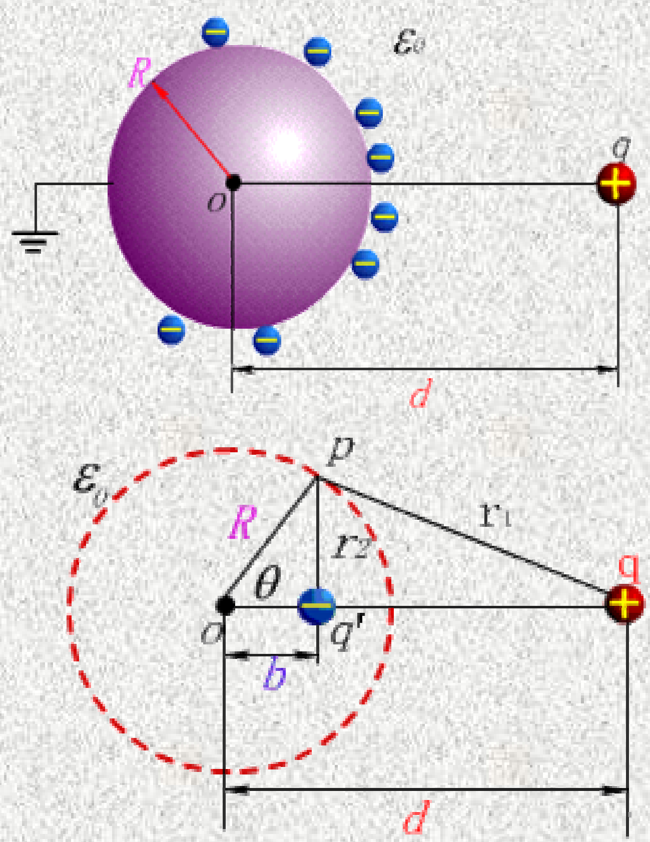


图1.7.3 点电荷对接地导体球面的镜像

1) 边值问题：

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad \text{(除}q\text{点外的导体球外空间)}$$

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$$

$$\varphi\big|_{\text{导球面}} = 0$$

2) 设镜像电荷 $-q'$ 位于球内,球面上任一点电位为

$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 0$$

$$r_1 = d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta$$

$$r_2 = b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta$$

$$[q^2(b^2+R^2) - q'^2(d^2+R^2)] + 2R(q'^2 d - q^2 b)\cos\theta = 0$$

$$q^2(b^2+R^2) - q'^2(d^2+R^2) = 0$$

$$q'^2 d - q^2 b = 0$$

$$\longrightarrow$$

$$b = \frac{R^2}{d}$$

$$q' = \sqrt{\frac{b}{d}}\,q = \frac{R}{d}\,q$$

由叠加原理，接地导体球外任一点P的电位与电场分别为

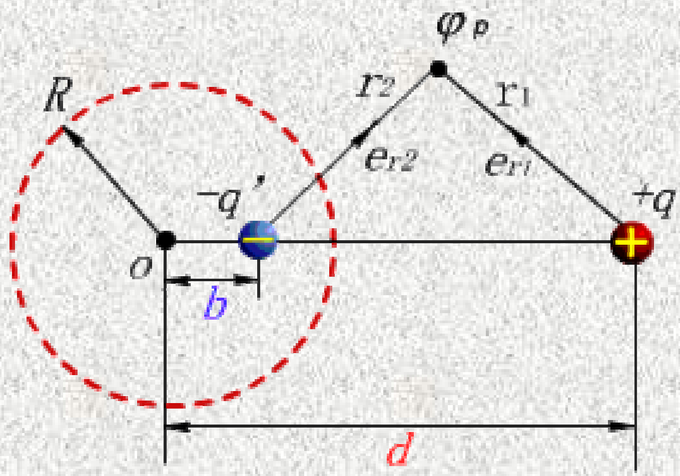


图1.7.4 接地导体球外的电场计算

$$\varphi_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{d}\cdot\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{e}_{r_1} - \frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 d r_2^2}\boldsymbol{e}_{r_2}$$

注意！

镜像电荷等于负的感应电荷

镜像电荷不能放在当前求解的场域内。

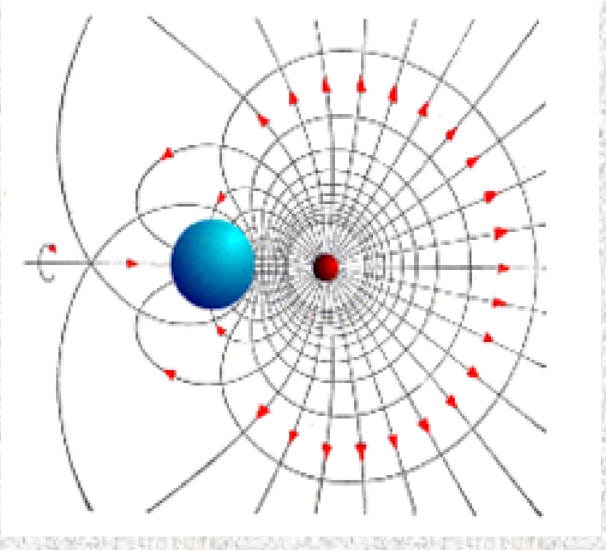
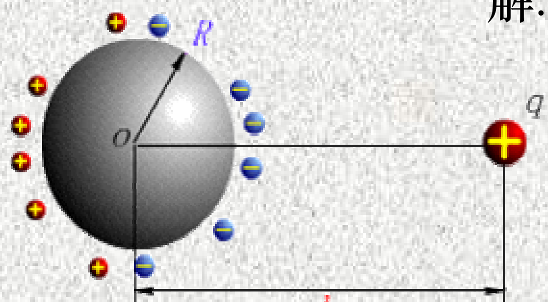


图1.7.5 点电荷位于接地导体球附近的场图

例1.7.2 试计算不接地金属球附近放置一点电荷 时的电场分布。



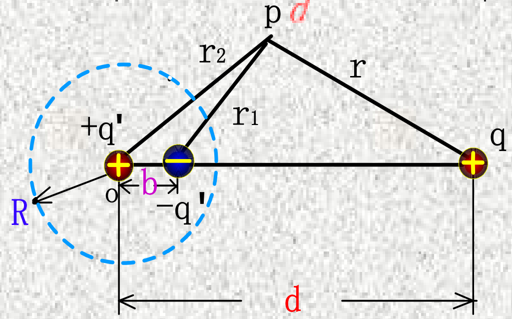


图1.7.6 点电荷对不接地金属球的镜像

解: 边值问题:

$$\nabla^2\varphi = 0$$ （除 q 点外的导体球外空间）

$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0$$

$$\varphi\big|_{\text{球面}\ s} = \text{常数} \neq 0$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$ （S 为球面面积）

在接地球的基础上判断镜像电荷的个数、大小与位置

- 感应电荷分布及球对称性，在球内有两个等效电荷。
- $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$，正负镜像电荷绝对值相等。
- $\varphi\big|_S = \text{const} \neq 0$，正镜像电荷只能位于球心。

任一点电位及电场强度为:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q'}{r_1}+\frac{q'}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{dr_1}+\frac{R}{dr_2}\right)$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r-\frac{R}{dr_1^{\,2}}\boldsymbol{e}_{r_1}+\frac{R}{dr_2^{\,2}}\boldsymbol{e}_{r_2}\right)$$

3. 不同介质分界面的镜像

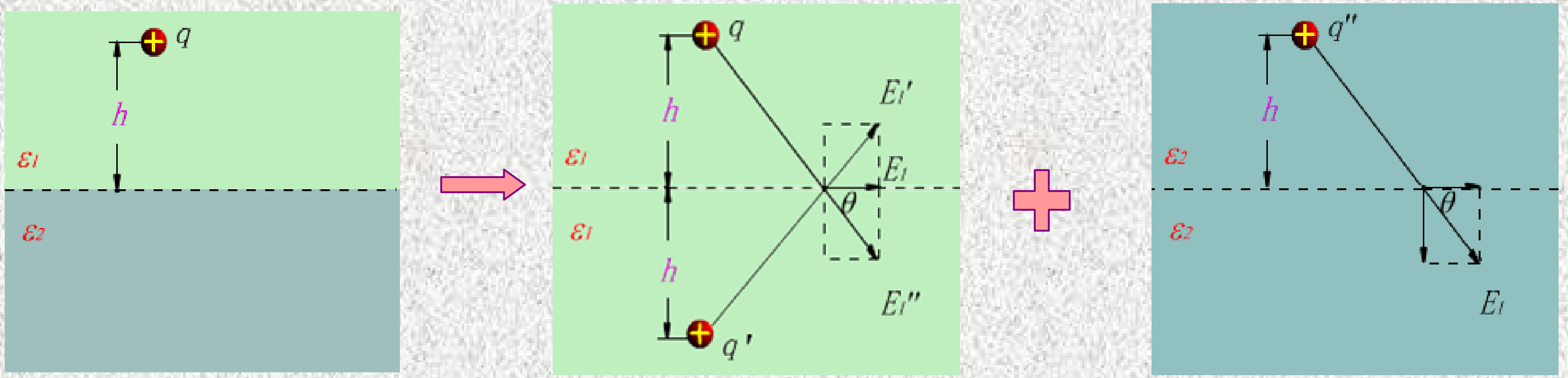


图1.7.9 点电荷对无限大介质分界面的镜像

边值问题:

$\nabla^2 \varphi_1 = 0$ (除 q点外的上半空间) $\nabla^2 \varphi_2 = 0$ (下半空间)

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\cos\theta = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\cos\theta$$

$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\sin\theta - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\sin\theta = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\sin\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_1} + \dfrac{q'}{\varepsilon_1} = \dfrac{q''}{\varepsilon_2} \\ q - q' = q'' \end{cases} \longrightarrow \boxed{q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q} \text{ 和 } \boxed{q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q}$$

- ε_1 中的电场是由 q 与 q' 共同产生，其有效区在上半空间，q' 是等效替代极化电荷的影响。

- ε_2 中的电场是由 q'' 决定，其有效区在下半空间，q'' 是等效替代自由电荷与极化电荷的作用。

即 $$q''=q-q'=q-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}q$$

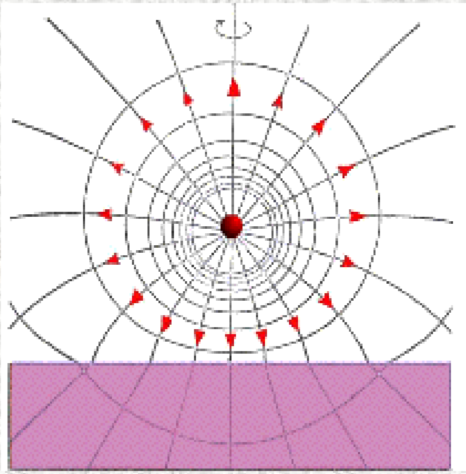
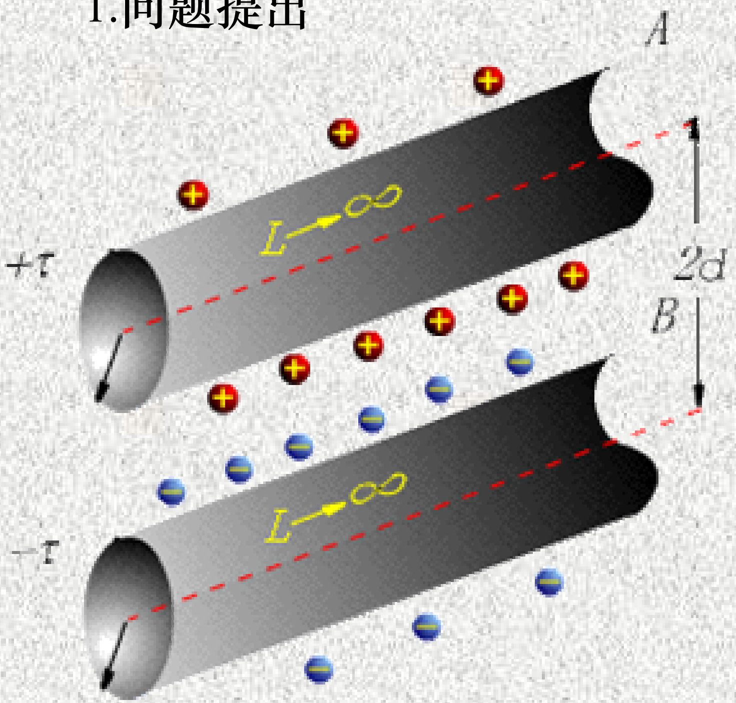


图1.7.10 点电荷 位于不同介质平面上方的场图

1.7.2　电轴法

1.问题提出



1.7.12　长直平行圆柱导体传输线

边值问题：

$\nabla^2\varphi=0$　　（导线以外的空间）

$$\begin{cases} \varphi\big|_{\text{导体A}} = \text{常数} \\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \tau, \quad \text{电荷分布不均匀} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi\big|_{\text{导体B}} = \text{常数} \\ \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = -\tau, \quad \text{电荷分布不均匀} \end{cases}$$

根据唯一性定理，寻找等效线电荷——电轴。

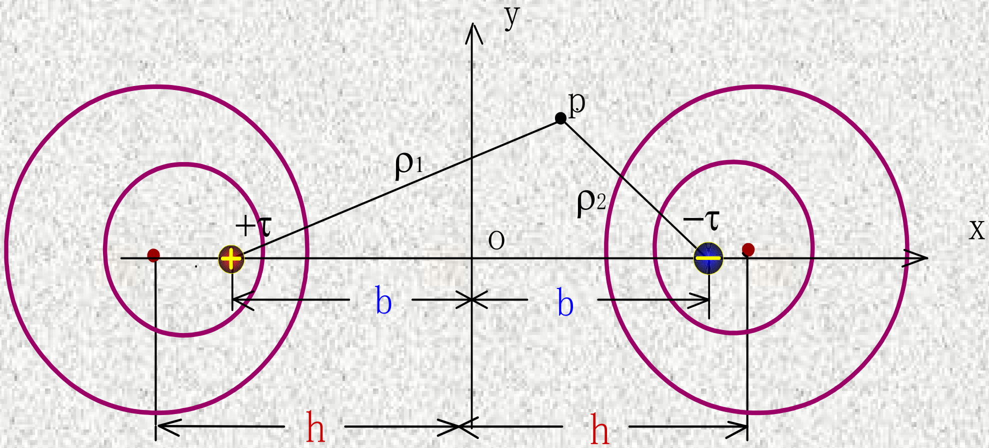


图1. 7. 13　两根细导线的电场计算

2. 两根细导线产生的电场

$$\varphi_1 = \int_{\rho_1}^{Q} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho} d\rho = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\,\rho_1 + C_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\,\rho_2 + C_2$$

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + C$$

以y轴为参考点, $C=0$, 则

$$\varphi_P = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{\sqrt{(x+b)^2+y^2}}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}$$

令：$\varphi_P =$ 常数

$$\frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = K^2$$

等位线方程为:

$$(x-\frac{K^2+1}{K^2-1}b)^2 + y^2 = (\frac{2bK}{K^2-1})^2$$

圆心坐标 $\left[h(=\frac{K^2+1}{K^2-1}b),\ 0\right]$, **圆半径** $a = \left|\frac{2bK}{K^2-1}\right|$

当K取不同数值时,就得到一族偏心圆。

a、h、b三者之间的关系满足

$$a^2 + b^2 = (\frac{2bK}{K^2-1})^2 + b^2 = (\frac{K^2+1}{K^2-1}b)^2 = h^2$$

3. 电轴法

用置于电轴上的等效线电荷,来代替圆柱导体面上分布电荷,从而求得电场的方法,称为电轴法。

例1.7.3 试求图示两带电长直平行圆柱导体传输线的电场及电位分布。

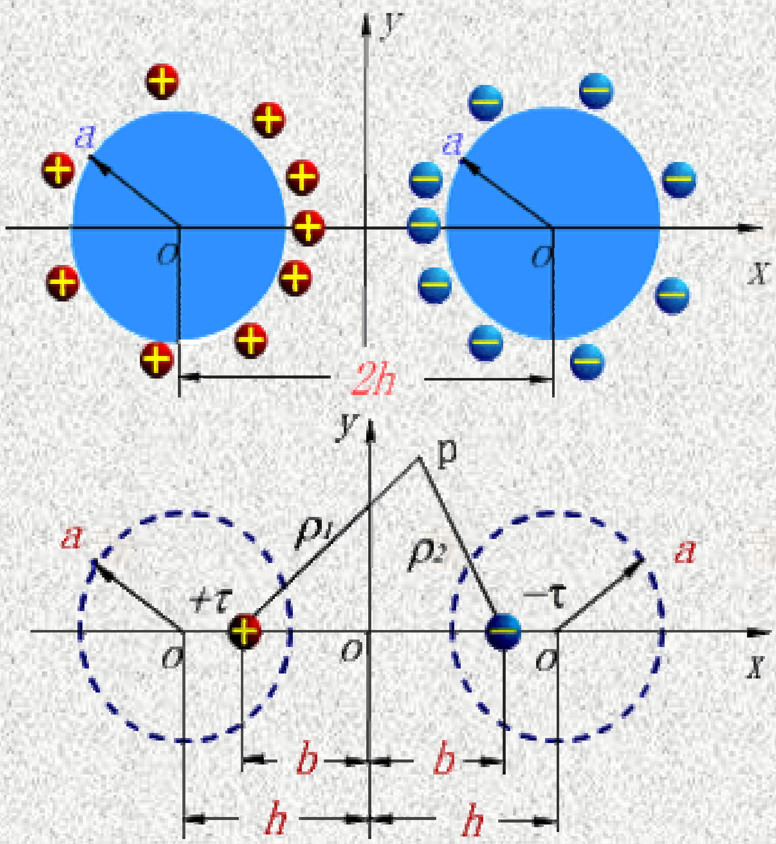


图1.7.15 平行圆柱导体传输线电场的计算

解:

a) 建立坐标系, 确定电轴位置:

$$b=\sqrt{h^2-a^2}$$

b) 圆柱导线间的电场与电位:

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{e}_{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\boldsymbol{e}_{\rho_2}\right)$$

$$\varphi_p=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

(以 y 轴为电位为参考点)

例1.7.4 已知两根不同半径,相互平行,轴线距离为d 的带电长直圆柱导体。试决定电轴位置。

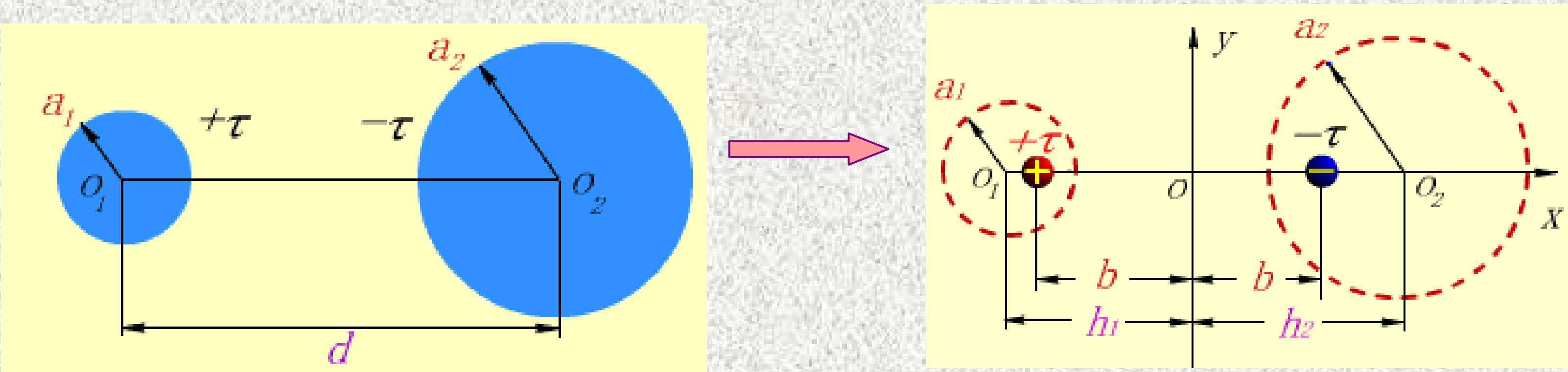


图1.7.16 不同半径传输线的电轴位置

解：

$$\begin{cases} b^2 = h_1^2 - a_1^2 \\ b^2 = h_2^2 - a_2^2 \\ d = h_1 + h_2 \end{cases} \Rightarrow \quad 确定 \quad b, h_1, h_2$$

例1.7.5 试确定图示偏心电缆的电轴位置。

解：

$$\begin{cases} h_1^{\ 2} = a_1^2 + b^2 \\ h_2^2 = a_2^2 + b^2 \\ h_2 - h_1 = d \end{cases} \Rightarrow \quad 确定 \ b, h_1, h_2$$

注意：1）参考电位的位置；2）适用区域。

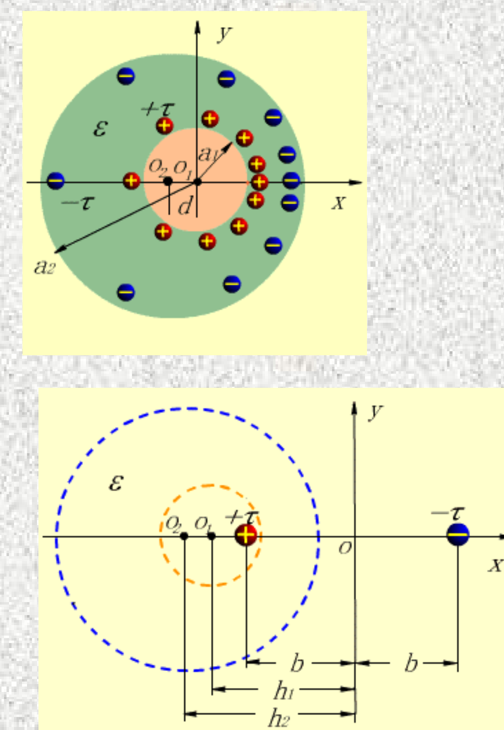


图1.7.17 偏心电缆电轴位置

例1.7.6 已知一对半径为a,相距为d的长直圆柱导体传输线之间电压为U_0，试求圆柱导体间电位的分布。

解： a)确定电轴的位置

$$\begin{cases} b^2 = h^2 - a^2 \\ d^2 = 2h \end{cases} \qquad \text{解得} \qquad b = \sqrt{(\frac{d}{2})^2 - a^2}$$

b）设电轴线电荷为 $\pm\tau$,场中任一点电位为

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

由 $U_0 = \varphi_A - \varphi_B$ 解出τ：

$$U_0 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b-(h-a)}{b+(h-a)}$$

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{U_0}{2\ln \dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}$$

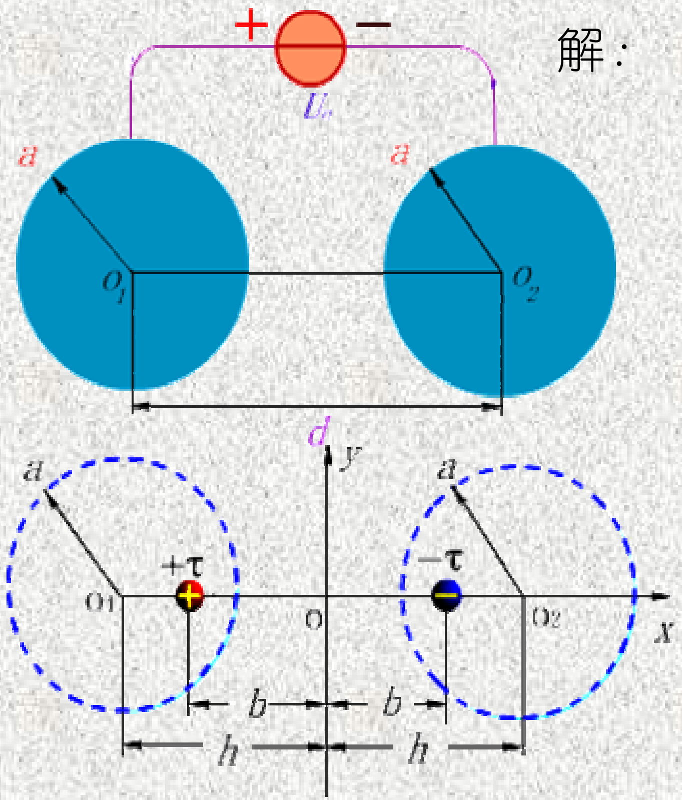


图1.7.18 电压为U_0的传输线电场的计算

c）场中任一点P的电位

$$\varphi_P = \frac{U_0}{2\,ln \dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}} ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

镜像法（电轴法）小结

- 镜像法（电轴法）的理论基础是静电场唯一性定理；

- 镜像法（电轴法）的实质是用虚设的镜像电荷（电轴）替代未知电荷的分布，使计算场域为无限大均匀介质；

- 镜像法（电轴法）的关键是确定镜像电荷（电轴）的个数（根数），大小及位置；

应用镜像法（电轴法）解题时，注意：镜像电荷（电轴）只能放在待求场域以外的区域。叠加时，要注意场的适用区域。

8. 电容与部分电容

1 电容

定义: $\boxed{C = \dfrac{Q}{U}}$ 单位: (F 法拉), μF , pF

电容只与两导体的几何形状、尺寸、相互位置及导体周围的介质有关。

工程上的实际电容: 电力电容器，电子线路用的各种小电容器。

电容的计算思路:

a.设 $Q(-Q) \xrightarrow{\text{高斯定律}} \boldsymbol{E} \xrightarrow{\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}} U = U(Q) \longrightarrow C = \dfrac{Q}{U}$

b.设 $U \xrightarrow{\text{解边值问题}} \varphi \xrightarrow{\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi} \boldsymbol{E} \xrightarrow{\text{边界条件}} \sigma \xrightarrow{\int_S \sigma ds} Q = Q(U) \longrightarrow C$

例2.8.1 试求球形电容器的电容。

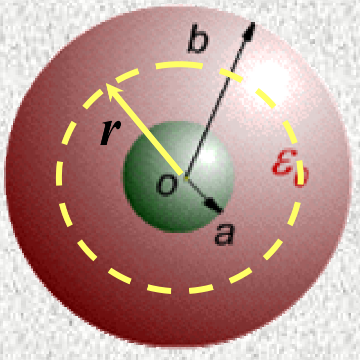


图2.8.1 球形电容器

解：设内导体的电荷为 q，则 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$，

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r\,, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

同心导体间的电压

$$U = \int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b-a}{ab}$$

球形电容器的电容

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

当 $b\to\infty$ 时 $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ （孤立导体球的电容）

2 多导体系统、部分电容

1 多导体系统

• 线性、多导体(三个以上导体)组成的系统；

• 静电独立系统——*D*线从这个系统中的带电体发出，并终止于该系统中的其余带电体，与外界无任何联系，即

$$\sum_{k=0}^{n} q_k = 0 .$$

2 部分电容概念

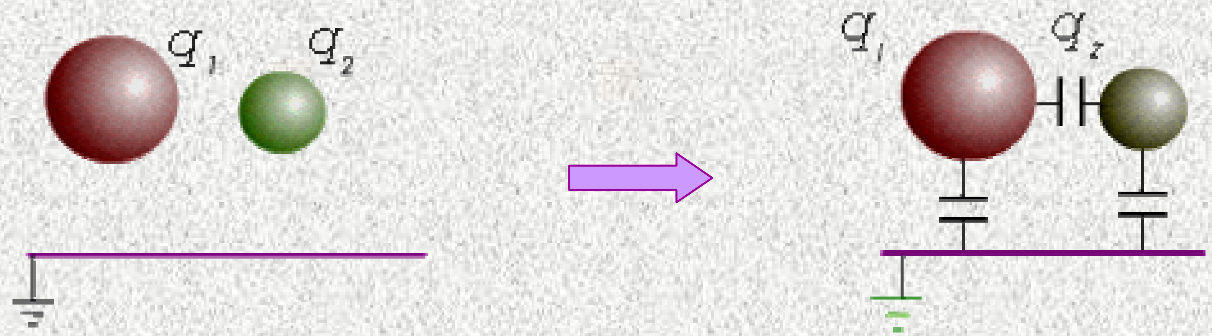


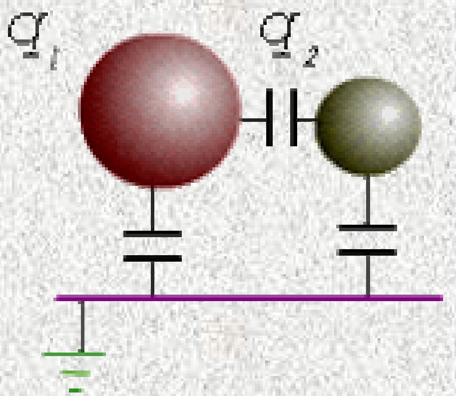
图2.8.2 三导体静电独立系统

Ⅰ.已知导体的电荷，求电位和电位系数

以接地导体为电位参考点,导体的电位与各导体上的电荷的关系为

$$\varphi_{10} = a_0 q_0 + a_1 q_1 + a_2 q_2 \qquad \varphi_{20} = b_0 q_0 + b_1 q_1 + b_2 q_2$$

$$\because \quad q_0 = -(q_1 + q_2)$$



$$\therefore \quad \varphi_{10} = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2$$

$$\varphi_{20} = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2$$

以此类推（**n**+1)个多导体系统只有 **n** 个电位线性独立方程，即

$$\varphi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1i}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{1N}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1}q_1 + \alpha_{i2}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{ii}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{iN}q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_N = \alpha_{N1}q_1 + \alpha_{N2}q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{Ni}q_i + \cdots\cdots + \alpha_{NN}q_N$$

$$q_0 = -(q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_i + \cdots + q_N)$$ （非独立方程）

写成矩阵形式为 $[\varphi] = [\alpha]\,[q]$

α —— 电位系数，表明导体电荷对导体电位的贡献；

$\alpha_{i,i}$——自有电位系数，表明导体 i 上电荷对导体 i 电位的贡献；

$\alpha_{i,j}$——互有电位系数，表明导体 j 上的电荷对导体 i 电位的贡献；

α 的性质；

1. $\alpha > 0$； 2. $\alpha_{ij} < \alpha_{ii} > \alpha_{ji}$； 3. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

α 的值可以通过给定各导体电荷 q ,计算各导体的电位 φ 而得。

$$\varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{1i} q_i + \cdots\cdots + \alpha_{1N} q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_i = \alpha_{i1} q_1 + \alpha_{i2} q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{ii} q_i + \cdots\cdots + \alpha_{iN} q_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_N = \alpha_{N1} q_1 + \alpha_{N2} q_2 + \cdots\cdots + \alpha_{Ni} q_i + \cdots\cdots + \alpha_{NN} q_N$$

$$\alpha_{ii} = \left.\frac{\varphi_i}{q_i}\right|_{q_1 = q_2 = \cdots = q_{i-1} = q_{i+1} = \cdots = q_N = 0,\, q_i = -q_0}$$

$$\alpha_{ij} = \left.\frac{\varphi_i}{q_j}\right|_{q_1 = q_2 = \cdots = q_{j-1} = q_{j+1} = \cdots = q_N = 0,\, q_j = -q_0}$$

Ⅱ 已知带电导体的电位，求电荷和感应系数

$$[q]=[\alpha]^{-1}[\varphi]=[\beta][\varphi] \qquad [\beta]=[\alpha]^{-1}$$

$$q_1=\beta_{11}\varphi_1+\beta_{12}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{1i}\varphi_i+\cdots+\beta_{1N}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_i=\beta_{i1}\varphi_1+\beta_{i2}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{ii}\varphi_i+\cdots+\beta_{iN}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_N=\beta_{N1}\varphi_1+\beta_{N2}\varphi_2+\cdots\cdots+\beta_{Ni}\varphi_i+\cdots+\beta_{NN}\varphi_N$$

β（单位：库/伏）：静电感应系数，表示导体电位对导体电荷的贡献；

β_{ii}：自有感应系数，表示导体 i 电位对导体 i 电荷的贡献；

$\beta_{i,j}$：互有感应系数，表示导体 j 电位对导体 i 电荷的贡献。

β 的性质;

1. $\beta_{ii} > 0$;

2. $\beta_{ij} < 0$;

3. $\beta_{ij} = \beta_{ji}$;

4. $\left|\beta_{ij}\right| < \beta_{ii} > \left|\beta_{ji}\right|$

通常，β的值可以通过给定各导体的电位 φ，测量各导体的电荷 $\boldsymbol{q}$ 而得。

$$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{1i}\varphi_i + \cdots + \beta_{1N}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_i = \beta_{i1}\varphi_1 + \beta_{i2}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{ii}\varphi_i + \cdots + \beta_{iN}\varphi_N$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_N = \beta_{N1}\varphi_1 + \beta_{N2}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{Ni}\varphi_i + \cdots + \beta_{NN}\varphi_N$$

$$\beta_{ii} = \left.\frac{q_i}{\varphi_i}\right|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{i-1} = \varphi_{i+1} = \cdots = \varphi_N = 0}$$

$$\beta_{ij} = \left.\frac{q_i}{\varphi_j}\right|_{\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{j-1} = \varphi_{j+1} = \cdots = \varphi_N = 0}$$

Ⅲ 已知带电导体间的电压，求电荷和部分电容

$$q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots\cdots + \beta_{1i}\varphi_i + \cdots + \beta_{1N}\varphi_N$$

如果将电荷与电位的关系表示成电荷与电压的关系，有

$$q_1 = (\beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1N})(\varphi_1 - 0) - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$- \beta_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) - \cdots - \beta_{1N}(\varphi_1 - \varphi_N)$$

$(\varphi_1 - 0)$ 是1号导体与大地之间的电压。令

$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1N}$　　$C_{12} = -\beta_{12}$，$C_{13} = -\beta_{13}$，…，　$C_{1N} = -\beta_{1N}$

则　$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \cdots + C_{1N}U_{1N}$

得方程组

$$q_1 = C_{10}U_{10} + \cdots + C_{1i}U_{1i} + \cdots + C_{1N}U_{1N}$$

q_{1i}

$$\cdots\cdots$$

q_{i1}

$$q_i = C_{i1}U_{i1} + \cdots + C_{i0}U_{i0} + \cdots + C_{iN}U_{iN}$$

$$\cdots\cdots$$

$$q_N = C_{N1}U_{N1} + \cdots + C_{Ni}U_{Ni} + \cdots + C_{N0}U_{N0}$$

$$[q]=[C][U]$$ （矩阵形式）

式中： C —— 部分电容，它表明各导体间电压对各导体电荷的贡献；

$$C_{i1}=-\beta_{i1}, C_{i2}=-\beta_{i2}, \cdots\cdots, C_{iN}=-\beta_{iN}$$ （互有部分电容）；

$$C_{i0}=(\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots\cdots+\beta_{ii}+\cdots+\beta_{iN})$$ （自有部分电容）。

部分电容性质:

- 所有部分电容都是正值，且仅与导体的形状、尺寸、相互位置及介质的 ε 值有关；
- 互有部分电容 $C_{ij}=C_{ji}$，即 $[C]$ 为对称阵；
- $(n+1)$ 个导体静电独立系统中，共应有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个部分电容；
- 部分电容是否为零,取决于两导体之间有否电力线相连。

静电网络与等效电容

例2.8.2 试计算考虑大地影响时，二线传输线的各部分电容及二线输电线的等效电容。已知 $d \gg a,\ d \ll h$ 如图示

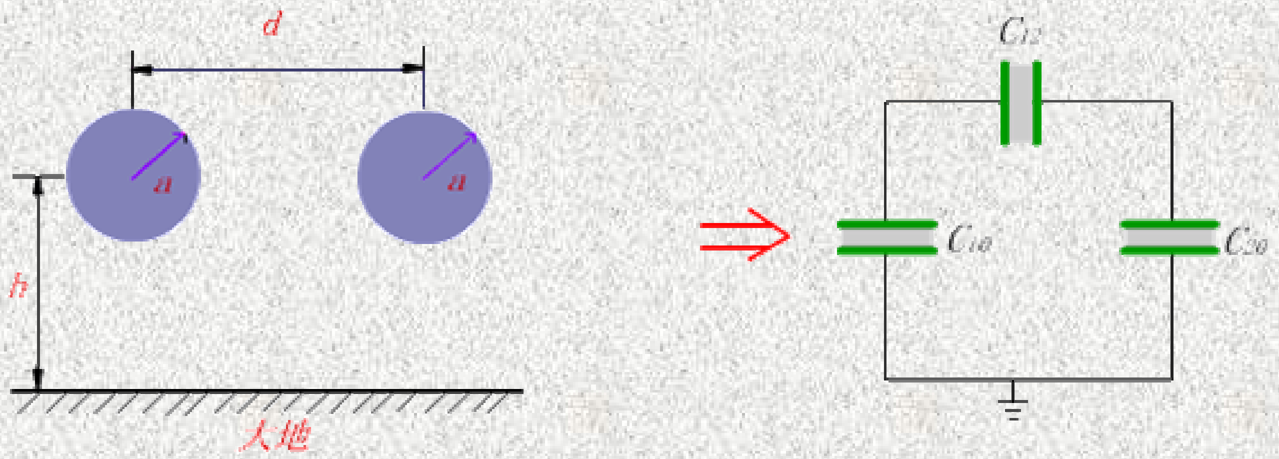


图2.8.3　两线输电线及其电容网络

解：部分电容个数 $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$ ，如图所示 。

由对称性得　$C_{10} = C_{20}$，　$C_{12} = C_{21}$

线电荷与电位的关系为

$$\tau_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\tau_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2$$

令 $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0,$ 则
$$\begin{cases} 1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 = C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{20}\varphi_2 \end{cases} \qquad (2)$$

利用镜像法，输电线两导体的电位 $(\varphi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{ln}\dfrac{r_2}{r_1}\ ,d >> a)$ 为

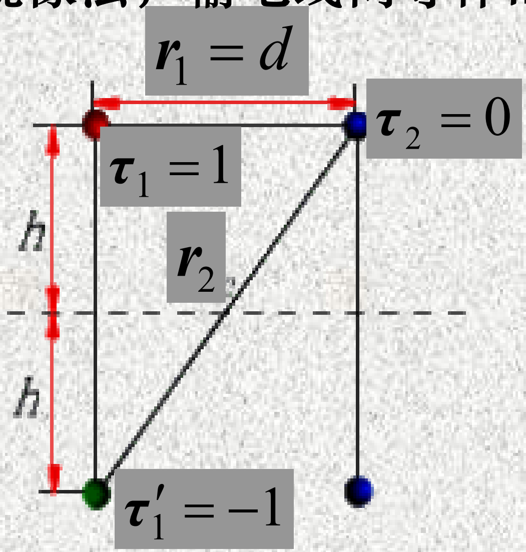


图2.8.4 两线输电线对大地的镜像

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} \end{cases} \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式得

$$\begin{cases} 1 = C_{10}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2h}{a} + C_{12}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2hd}{a\sqrt{4h^2+d^2}} \\ 0 = C_{21}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a\sqrt{4h^2+d^2}}{2hd} + C_{20}\cdot\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d} \end{cases}$$

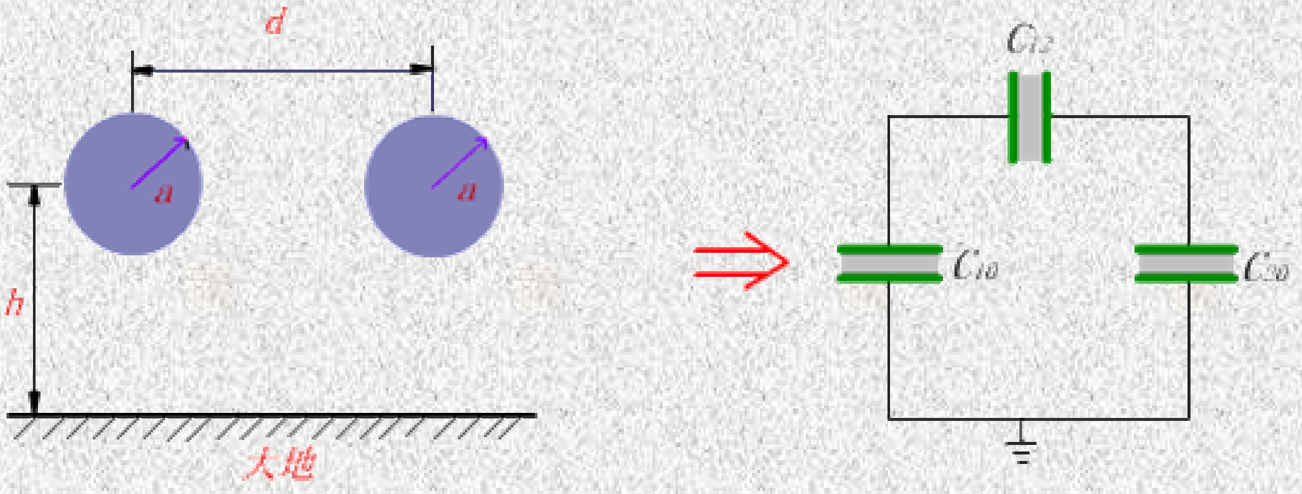


图2.8.5 两线输电线及其电容网络

联立解之得

$$C_{10}=C_{20}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\sqrt{4h^2+d^2}}{ad}}\qquad C_{12}=C_{21}=\frac{2\pi\varepsilon_0\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}{(\ln\dfrac{2h}{a})^2-(\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d})^2}$$

二线间的等效电容:

$$C_{eq}=C_{12}+\frac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\dfrac{2h}{d}\cdot\dfrac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}})}$$

综上所述，多导体系统电荷与电位间关系，可以通过三套系数，即来表示$[\alpha],[\beta],[C]$。三者相比，α易于计算，β便于测量，C可通过α计算，也可直接测定，其主要优点是可以将场的概念和路的概念联系起来，

即　静电场问题 → 静电电容的网络问题。

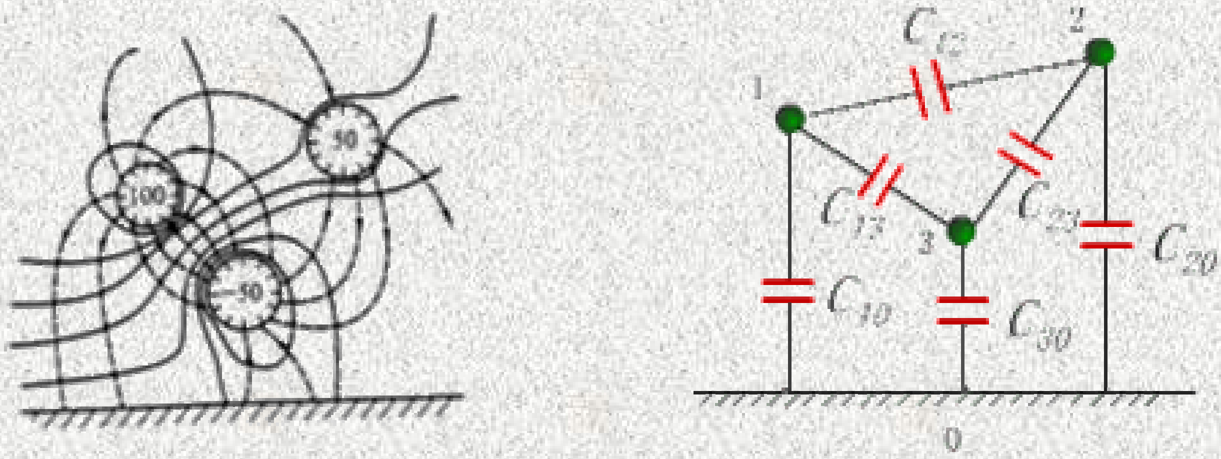


图2.8.7 部分电容与电容网络

工程上，常引入 等效电容的概念，它是指在多导体静电独立系统中，把两导体作为电容器的两个极板，设在这两个电极间加上已知电压U,极板上所带电荷为$\pm q$,则把比值q/U叫做这两导体的等效电容或工作电容。

9. 静电能量与力

1 静电能量

1. 带电体系统中的静电能量

静电能量是在电场的建立过程中，由外力作功转化而来的。

1) 连续分布电荷系统的静电能量

假设:

- 电荷系统中的介质是线性的;
- 建立电场过程缓慢（忽略动能与能量辐射）。
- 电场的建立与充电过程无关,导体上电荷与电位的最终值为q、φ，在充电过程中，q 与φ 的增长比例为m，且 $0 \le m \le 1$ 。

因此，在充电过程中外力所作的功将全部转化为静电能量，并且在充电过程的任一时刻的电场均可视为静电场。

t' 时刻，场中P点的电位为 $\varphi'(x,y,z)$，若将电荷增量 dq 从无穷远处移至该点，

外力作功 $$\delta A = \varphi'(x,y,z)dq$$

这个功转化为静电能量储存在电场中。 t' 时刻电荷密度与电荷增量为

$$d\rho' = d\left[m\rho(x,y,z)\right] = \rho(x,y,z)d\,m\,, \qquad dq = d\rho' dV = \rho dmdV$$

电位为 $$\varphi'(x,y,z) = \boldsymbol{m}\,\varphi(x,y,z)$$

所以，t' 时刻外力做的元功转化为电场能量的增量为

$$dW_e = dA = \int_V \varphi' dq = \int_V m\,\varphi\cdot\rho\,dmdV$$

故 $$W_e = A = \int \varphi' dq = \int_0^1 mdm \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,dV$$

体电荷系统的静电能量 $$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV}$$

面电荷系统 $\boxed{W_e = \dfrac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS}$ 线电荷系统 $\boxed{W_e = \dfrac{1}{2}\int_L \tau\varphi\, dl}$

2) 带电导体系统

$$\mathrm{W_e} = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS \quad = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_K\int_{S_K}\sigma_k dS \quad = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_K q_K$$

即 $$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_K q_K}$$

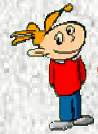
特例：带等值异号的两导体（电容器），设 $q_2 = -q_1$

有 $$W_e = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{2}\varphi_K q_K = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}q_1\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{1}{2}q_1 U_{12} = \frac{1}{2}qU$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{C}U^2 = \frac{q^2}{2\mathrm{C}}$$

所以 $$C = \frac{q^2}{2W_e} = \frac{2W_e}{U^2}$$



讨论与引伸

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{S}\varphi dq \qquad W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_{K}q_{K}$$

- 式中φ 是元电荷所在处的电位，积分对源进行。
- φ_k 是所有导体（含k号导体）表面上的电荷在k号导体产生的电位。
- 自有能与互有能的概念 $W_e=W_{自}+W_{互}$

自有能是将许多元电荷 dq “压紧”构成 q 所需作的功。互有能是由于多个带电体之间的相互作用引起的能量。

例如空间中有两带电体，单独存在时，导体的电位、电荷分别为φ_1, q_1和φ_2, q_2。将带电体2放入带电体1的电场中，两导体的电位会发生变化，如图所示。

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\varphi_K q_K = \frac{1}{2}\left[q_1(\varphi_1+\Delta\varphi_1)+q_2(\varphi_2+\Delta\varphi_2)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2)}_{\text{自有能}}+\underbrace{\frac{1}{2}(q_1\Delta\varphi_1+q_2\Delta\varphi_2)}_{\text{互有能}}$$

点电荷的自有能为无穷大。

图2.9.1 推导能量用图

2. 静电能量的分布及能量体密度

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}\varphi\rho\,dV'+\frac{1}{2}\int_{S'}\varphi\sigma\,dS$$

V'——扩大到无限空间V，S'——所有带电体表面。

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V}\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}dV+\frac{1}{2}\int_{S'}\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$$

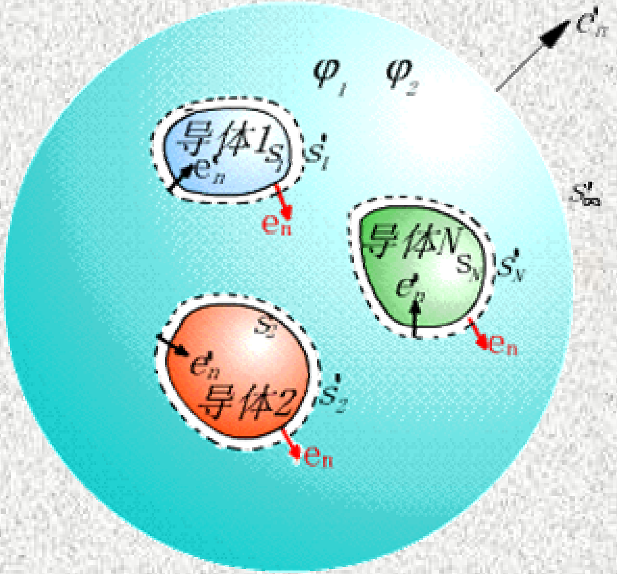


图2.9.2 推导能量密度用图

由矢量恒等式 $\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})-\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$ 得

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV+\frac{1}{2}\int_S\varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_n dS$$

对上式第一项应用散度定理 (1)

$$\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})dV=\frac{1}{2}\oint_{S+S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\int_{S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}'_n dS'+\frac{1}{2}\int_S\varphi\boldsymbol{D}\cdot(-\boldsymbol{e}_n)dS \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1),得

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{S'_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}'_n\,dS'+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV=\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV$$

注 $\varphi\propto\frac{1}{r}$, $D\propto\frac{1}{r^2}$, $dS\propto r^2$

静电能量

$$\boxed{W_e = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_V w_e dV}$$ J(焦耳)

能量密度定义为

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}$$ $\mathrm{J/m^3}$

结论：凡是静电场不为零的空间都储存着静电能量。

例2.9.1 试求真空中体电荷密度为 ρ，半径为 a 的介质球产生的静电能量。

解法一 应用高斯定理，

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho\, dV \quad \Longrightarrow \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

得:

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & r < a \\[2ex] \dfrac{\rho\, a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & r > a \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\varepsilon_0^{\,2}}\cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0^{\,2} r^4}\cdot 4\pi r^2 dr\right) = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

例2.9.1 试求真空中体电荷密度为 ρ，半径为 a 的介质球产生的静电能量。

解法二 由微分方程法得

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\begin{cases}-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & r\le a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

$\varphi\big|_{r\to\infty}=0$, $\varphi\big|_{r\to 0}=$ 有限 $\qquad \varphi_1=\varphi_2$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r} \qquad r=a$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & r\ge a\\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2-\dfrac{r^2}{3}\right) & r\le a\end{cases}$$

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V\varphi\rho dV=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}\int_0^a\left(a^2-\frac{r^2}{3}\right)4\pi r^2dr=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2a^5$$

2.9.2 静电力

一个点电荷在电场中受的力

1. 由电场强度E的定义求静电力，即

$$\boldsymbol{f} = q\boldsymbol{E} \qquad d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{E}dq \qquad \boldsymbol{f} = \int \boldsymbol{E}dq$$

2.虚位移法 (Virtual Displacement Method)

虚位移法是基于虚功原理计算静电力的方法。

- 广义坐标：距离、面积、体积、角度。
- 广义力：企图改变某一个广义坐标的力。广义力的正方向为广义坐标增加的方向。

二者关系：$\boxed{\text{广义力} \times \text{广义坐标} = \text{功}}$

广义坐标	距 离	面 积	体 积	角 度
广义力	机械力	表面张力	压强	转矩
（单位）	（N）	（N/m）	（N/m²）	N•m

设(n+1)个导体组成的系统,只有P 号导体发生位移 dg，此时系统中带电体的电压或电荷将发生变化，其功能关系为

$$dW = dW_e + fdg = \sum \varphi_k dq_k$$

外源提供能量 = 静电能量增量 + 电场力所作功

I 、常电荷系统（K 打开）：

$$0 = dW_e + fdg$$

$$-fdg = dW_e$$

$$\boxed{f = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k = const.}}$$

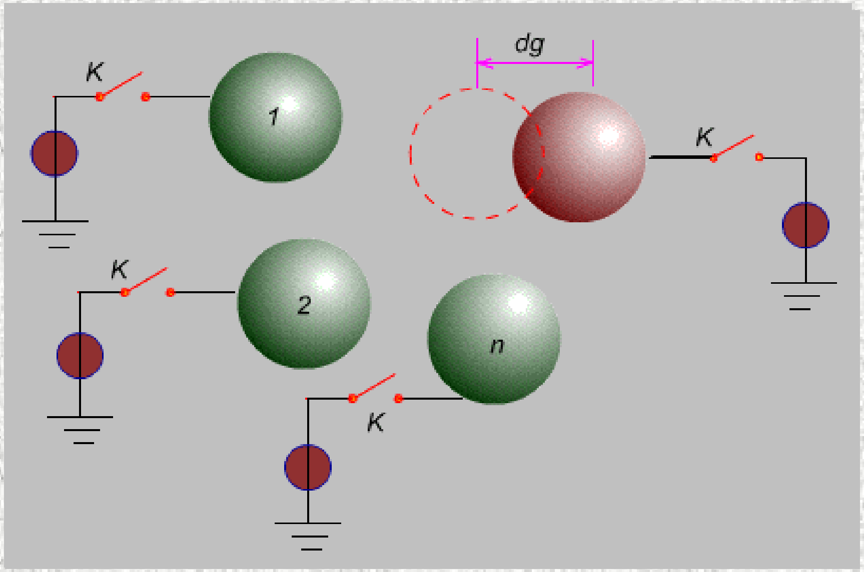


图2.9.4　多导体系统

它表示取消外源后，电场力做功必须靠减少电场中静电能量来实现。

Ⅱ、常电位系统（*K*合上）：

外源提供能量的增量

$$dW = \sum \varphi_k dq_k$$

静电能量的增量 $dW_e = \dfrac{1}{2}\sum \varphi_k dq_k$

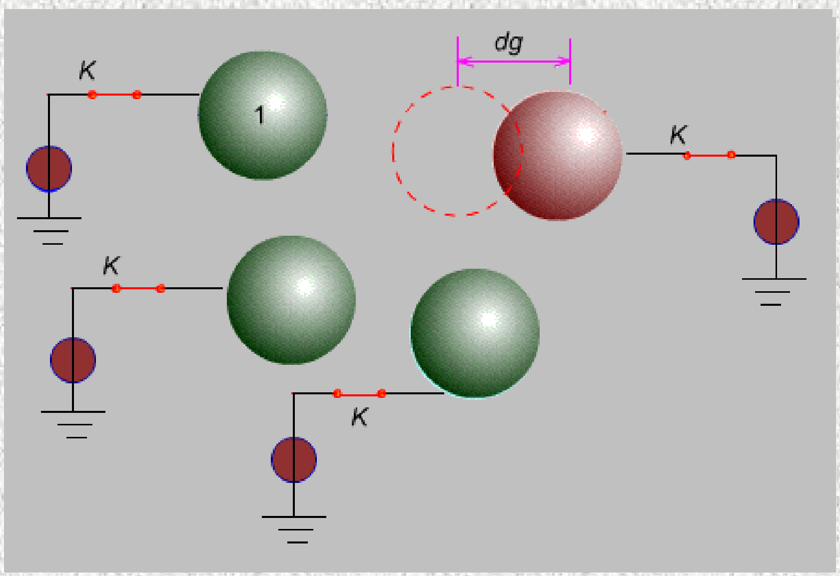


图2.9.4 多导体系统

$$\sum \varphi_k dq_k = \frac{1}{2}\sum \varphi_k dq_k + fdg$$

外源提供的能量有一半用于静电能量的增量，另一半用于电场力做功。

$$\boxed{f = +\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k = const}.}$$

例2.6.3 试求图示平行板电容器的电场力。

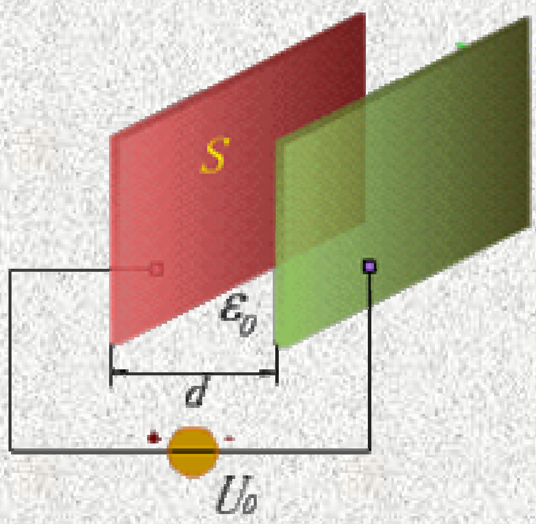


图2.9.5　平行板电容器

解法一：常电位系统

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2 \qquad C=\frac{\varepsilon_0 s}{d}$$

$$f=+\frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{\varphi_k=const}=\frac{U^2}{2}\cdot\frac{\partial C}{\partial d}=-\frac{U^2\varepsilon_0 S}{d^2}<0$$

解法二：常电荷系统

$$W_e=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} \qquad C=\frac{\varepsilon_0 s}{d}$$

$$f=-\frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{q_k=const}=-\frac{\partial}{\partial g}\left[\frac{q^2}{2C}\right]=\frac{q^2}{2C^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial d}=-\frac{U^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}<0$$

可见，两种方法计算结果相同，电场力有使 **d** 减小的趋势，即电容增大的趋势。

例2.9.4 图示一球形薄膜带电表面，半径为 a，其上带电荷为q，试求薄膜单位面积所受的电场力。

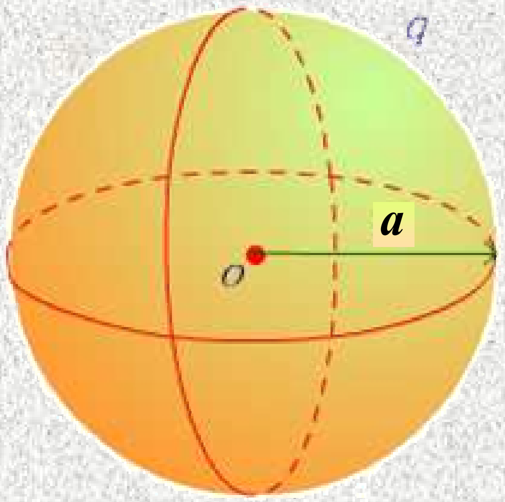


图2.9.6 球形薄膜

解: $W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 a$

$$\boldsymbol{f} = -\left.\frac{\partial \boldsymbol{W}_e}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{q=const} = -\frac{\partial W_e}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial a}$$

$$= \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{q^2}{8\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 a^2} > 0$$

表示广义力 $\boldsymbol{f}$ 的方向是广义坐标 $\boldsymbol{a}$ 增大的方向，即为膨胀力。

单位面积上的力:

$$f' = f/4\boldsymbol{\pi}a^2 = (\frac{q}{4\boldsymbol{\pi}a^2})^2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \qquad (\mathrm{N/m^2})$$