

中国科学技术大学

2015 年硕士学位研究生入学考试试题

(统计学)

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

■需使用计算器

一、单项选择题 (本题包含 1-10 题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. 连续独立的抛掷一枚均匀硬币 10 次, 以 X 和 Y 表示出现正面和反面出现的次数, 则 X 和 Y 的相关系数为_____①_____.

- (A) -1 (B) 0 (C) 1/2 (D) 1

2. 设随机事件 $0 < P(B) < 1$, 则 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ 成立的充分必要条件是_____②_____.

- (A) $P(A) = P(B)$ (B) $P(A) = P(\bar{B})$
(C) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (D) $P(AB) = P(A)P(B)$

3. 设 $Var(X) = Var(Z)$, $Var(Y) = 4Var(X)$, 且 X 和 Y 相关系数为 -1, X 和 Z 相关系数为 1/2, 则 X 和 $(Y + Z)$ 相关系数为_____③_____.

- (A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{-3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 从 $\{1, 2, 3\}$ 这 3 个数中随机取一个数, 记为 X , 再从 $\{1, \dots, X\}$ 中随机取一个数, 记为 Y , 则 $E(Y) =$ _____④_____.

- (A) 0.5 (B) 1.0 (C) 1.5 (D) 2.0

5. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(2, p)$, 随机变量 Y 服从二项分布 $B(3, p)$, 而且 $P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$, 那么 $P(Y = 1) =$ _____⑤_____.

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$

6. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且 X_1 服从指数分布, 其密度函数为:

$$f(t) = e^{-t} I(t \geq 0)$$

记 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, 则 $E(X_{(1)}) =$ _____ ⑥.

- (A) 0.25 (B) 0.5 (C) 0.75 (D) 1

7. 若随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且 X_1 服从正态分布 $N(0,1)$, 令

$T = a(X_1 + 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$, 则 $(a, b) =$ _____ ⑦ 时, 统计量 T 服

从卡方分布 χ^2 .

- (A) (0.2, 0.4) (B) (0.02, 0.4) (C) (0.02, 0.04) (D) (0, 0.04)

8. 设统计量 T_n 是参数 β 的无偏估计, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(T_n) = 0$, 则 $\frac{n}{n+1} T_n$ 是参数 β 的

_____ ⑧.

- (A) 无偏估计 (B) 最小方差无偏估计
(C) 相合估计 (D) 以上都不对

9. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 X^2 和 Y^2 _____ ⑨.

- (A) 独立 (B) 不独立 (C) 不确定

10. 对于一元线性回归模型, $y_i = a + b(X_i - \bar{X}) + e_i, i = 1, 2, \dots, n$, 其中

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, e_1, \dots, e_n 独立同分布, e_1 期望为 0, 方差有界, 那么 a 的最小

二乘估计 \hat{a} 和 b 的最小二乘估计 \hat{b} _____ ⑩.

- (A) 独立 (B) 不独立 (C) 关系不确定

二、简答题 (每小题 15 分, 共 30 分)

1. 假设某地重男轻女现象非常严重, 所有父母都非要生男孩为止. 但政府又怕这样会导致人口膨胀. 所以有人提议: “每对夫妇可以生育, 直至有一名男孩, 之后必须绝育”. 假设每对父母生男孩和女孩是随机的. 这个提议引起激烈辩论:

- (1) (10 分) 通过该提议会不会导致人口膨胀?
(2) (5 分) 通过该提议会不会导致男多于女?

2. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 取自正态分布 $N(\mu, 1)$, 且相互独立, 考虑如下假设检验问题:

$$H_0: \mu = 2 \leftrightarrow H_1: \mu = 2.679,$$

若检验的拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 2.329\}$, 试

- (1) (4 分) 给出检验的两类错误的定义.
(2) (6 分) 当 $n = 25$ 时, 求检验的两类错误的概率.
(3) (5 分) 若要是检验犯第二类错误的概率不大于 0.01, 则样本量最小应取多少?

三、计算分析题 (共 80 分)

1. (10 分) 某工厂为了保证设备正常工作, 需配备适量的维修工人 (工人配备多了就浪费, 配备少了又要影响生产), 现有同类型设备 300 台, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是 0.01. 在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理 (我们也只考虑这种情况), 问至少需配备多少工人, 才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01?

2. 某公司为了调查消费者对于新推出产品的支持程度, 设计问卷调查, 随机抽取 $n = 100$ 个人中, 其中有 $n_1 = 45$ 人认为新产品好, $n_2 = 35$ 人认为标准产品好, 其余 $n_3 = 20$ 人认为新产品与标准产品没有区别. 记 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 为消费者对产品支持态度的概率, 即 π_1 表示新产品好的概率, π_2 表示标

准产品好的概率, π_3 表示新产品与标准产品没有区别的概率.

(1) (6 分) 试给出 π 的对数似然函数和极大似然估计量 $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \hat{\pi}_3)$, 并计算出其估计值.

(2) (6 分) 试给出 $\hat{\pi}_1$ 和 $\hat{\pi}_2$ 的方差以及它们的协方差, 并计算出其估计值.

(3) (6 分) 分别给出 π_3 的置信水平为 95% 的置信区间.

(4) (6 分) 为调查消费者对于新推出的产品的支持程度, 试设计一个检验问题, 并给出所提检验问题的 Pearson 检验统计量, 并在显著水平 0.05 下, 给出检验结果. (提示: 检验消费者是否认为新产品与标准产品有差异)

3. 为比较甲和乙两处矿石的含灰率(%), 分别从甲、乙两处随机抽取矿石 6 块, 甲处矿石含灰率数据是: 17, 14, 18, 13, 19 和 15; 而乙处矿石含灰率数据为: 16, 19, 20, 22, 18 和 19. 假设两处矿石含灰率分别服从正态分布, 且总体独立, 均值和方差未知. 试根据以上数据判断:

(1) (6 分) 在显著水平 0.05 下, 甲、乙两处矿石含灰率的方差是否相等?

(2) (6 分) 在显著水平 0.05 下, 乙处矿石含灰率的平均量是否显著地高于甲处矿石含灰率的平均量?

4. 为研究政党认同与种族之间关联性, 通过综合社会调查, 得到如下表格,

表格 1: 政党认同与种族.

种族	政党认同		
	民主党	中立	共和党
白人	73	31	76
黑人	70	20	30

(1) (6 分) 假设政党认同与种族是相互独立的, 试计算出表格中各个元素的期望频数.

(2) (6 分) 在显著水平 0.05 下, 政党认同与种族之间是否有显著的关联?

(3) (6 分) 基于 (1) 和 (2) 中的结论, 试解释白人, 黑人和民主党, 共和党之间的关系.

5. 设 (X_1, \dots, X_n) 为抽自总体 X 的简单随机样本, 其中 X 的密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)}{\sigma}}, & x > \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 是一个已知常数, 而 θ 未知.

(1) (6 分) 试求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 和极大似然估计 θ^* .

(2) (6 分) 讨论 $\hat{\theta}$ 和 θ^* 是否为 θ 的无偏估计, 并证明你的结论. 如果不是无偏估计, 请修正为无偏估计.

(3) (4 分) 试比较修正后的无偏估计的方差.

附: 可能用到的上分位数

$$u_{0.05} = 1.645, \quad u_{0.04} = 1.750, \quad u_{0.03} = 1.880, \quad u_{0.025} = 1.96, \quad u_{0.01} = 2.326,$$

$$t_{0.05}(9) = 1.83, \quad t_{0.025}(9) = 2.26, \quad t_{0.05}(10) = 1.812, \quad t_{0.025}(10) = 2.228,$$

$$\chi_{0.05}^2(1) = 3.841, \quad \chi_{0.05}^2(2) = 5.991, \quad \chi_{0.05}^2(4) = 9.488, \quad \chi_{0.025}^2(4) = 11.143,$$

$$\chi_{0.05}^2(5) = 11.07, \quad F_{0.025}(5,5) = 7.146, \quad F_{0.025}(6,6) = 7.146$$