

第4章 线性规划：建模与应用

目录

- ※超级食品公司的广告混合问题（4.1）
- ※资源分配问题和梦大公司资金预算问题（4.2）
- ※策划能够本收益平衡问题及联合航空公司问题（4.3）
- ※网络配送问题（4.4）
- ※超级食品公司案例的再研究（4.5）
- ※混合问题及回收固体废弃物问题（4.6）
- ※线性规划在电子表格上的应用

超级食品公司的广告混合问题

- ◆ 目标：为“脆始”食品制定促销活动。
- ◆ 公司为这一产品确定了三种最有效的广告媒介：
 - 星期六上午儿童节目的电视广告。
 - 食品与家庭导向的杂志上的广告。
 - 主要报纸星期天增刊上的广告。
- ◆ 该问题的三种有限资源分别为：
 - 广告预算（400万美元）
 - 计划预算（1000万美元）
 - 可获得的电视广告时段（5）
- ◆ 用广告的浏览量来衡量广告的受众数量。
问题：如何确定个广告活动的使用水平以取得最有效的广告组合？

成本和广告受众数据

成本分类	成本		
	每次 电视广告	每份 杂志广告	每份星期天 增刊广告
广告预算	\$300,000	\$150,000	\$100,000
规划预算	90,000	30,000	40,000
广告受众期望 量	1,300,000	600,000	500,000

电子表格表述

	B	C	D	E	F	G	H
3		TV Spots	Magazine Ads	SS Ads			
4	Exposures per Ad	1,300	600	500			
5	(thousands)						
6					Budget		Budget
7		Cost per Ad (\$thousands)			Spent		Available
8	Ad Budget	300	150	100	4,000	<=	4,000
9	Planning Budget	90	30	40	1,000	<=	1,000
10							
11							Total Exposures
12		TV Spots	Magazine Ads	SS Ads			(thousands)
13	Number of Ads	0	20	10			17,000
14		<=					
15	Max TV Spots	5					

数学公式表达

令 TV = 电视上的广告时段数量

M = 杂志上的广告数目

SS = 星期天增刊上的广告数目

最大受众数量 = $1,300TV + 600M + 500SS$

约束条件

广告总费用: $300TV + 150M + 100SS \leq 4,000$ (千美元)

计划总成本: $90TV + 30M + 30SS \leq 1,000$ (千美元)

电视广告时段数: $TV \leq 5$

且

$TV \geq 0, M \geq 0, SS \geq 0.$

梦大公司资金预算问题

- ◆ 梦大发展公司商务房地产开发项目的主要投资商。
- ◆ 该公司考虑在以下三个项目中投资：
 - 建造高层办公楼
 - 建造宾馆
 - 建造购物中心
- ◆ 每一个项目都要求投资者在四个不同的时期投资：在当前预付定金，以及一年、两年、三年后分别追加投资。

问题：梦大公司在每个项目中的投资多少百分比才能使其投资组合获得最大的收益？

梦大公司资源数据表

Investment Capital Requirements			
Year	Office Building	Hotel	Shopping Center
0	\$40 million	\$80 million	\$90 million
1	60 million	80 million	50 million
2	90 million	80 million	20 million
3	10 million	70 million	60 million
Net present value	\$45 million	\$70 million	\$50 million

电子表格表述

	B	C	D	E	F	G	H
3		Office		Shopping			
4		Building	Hotel	Center			
5	Net Present Value	45	70	50			
6	(\$millions)				Cumulative		Cumulative
7					Capital		Capital
8		Cumulative Capital Required (\$millions)			Spent		Available
9	Now	40	80	90	25	<=	25
10	End of Year 1	100	160	140	44.757	<=	45
11	End of Year 2	190	240	160	60.583	<=	65
12	End of Year 3	200	310	220	80	<=	80
13							
14		Office		Shopping			Total NPV
15		Building	Hotel	Center			(\$millions)
16	Participation Share	0.00%	16.50%	13.11%			18.11

数学公式表达

令 OB = 办公楼项目中的投资比例

H = 宾馆项目中的投资比例

SC = 购物中心项目中的投资比例

$$\text{Max } NPV = 45OB + 70H + 50SC$$

约束条件

$$\text{现期的总投资（百万美元）：} \quad 40OB + 80H + 90SC \leq 25$$

$$\text{一年后的总投资（百万美元）：} \quad 100OB + 160H + 140SC \leq 45$$

$$\text{两年后的总投资（百万美元）：} \quad 190OB + 240H + 160SC \leq 65$$

$$\text{三年后的总投资（百万美元）：} \quad 200OB + 310H + 220SC \leq 80$$

且

$$OB \geq 0, H \geq 0, SC \geq 0.$$

资源分配问题建模程序

1. 确定问题的活动水平。
2. 确定活动的绩效评估（通常为利润）。
3. 评估每种活动对总的绩效测度的单位贡献。
4. 确定被分配的资源。
5. 对每种资源，确定可用数量，然后确定每种活动所用的资源数量。
6. 在数据单元格中输入3及5中的数据。
7. 确定可变单元格。
8. 用SUMPRODUCT为每种资源计算总的使用量。在相邻的两行单元格中输入 \leq 以及计算出的数据。
9. 确定目标单元格。使用SUMPRODUCT计算目标函数。

联邦航空公司人员排程问题

- ◆ 联邦航空公司正准备增加其中心机场的往来航班，因此需要雇佣更多的客户服务代理商。
- ◆ 五个权威认定的八小时轮换如下：
 - 轮班1： 6:00 AM ~ 2:00 PM
 - 轮班2： 8:00 AM ~ 4:00 PM
 - 轮班3： 中午 ~ 8:00 PM
 - 轮班4： 4:00 PM ~ 午夜
 - 轮班5： 10:00 PM ~ 6:00 AM

问题： 每天的各个轮班需要分配多少代理商才能使人员费用最小？

排程数据

Time Period	Time Periods Covered by Shift					最少需要 代理商的数量
	1	2	3	4	5	
6 AM to 8 AM	✓					48
8 AM to 10 AM	✓	✓				79
10 AM to noon	✓	✓				65
Noon to 2 PM	✓	✓	✓			87
2 PM to 4 PM		✓	✓			64
4 PM to 6 PM			✓	✓		73
6 PM to 8 PM			✓	✓		82
8 PM to 10 PM				✓		43
10 PM to midnight				✓	✓	52
Midnight to 6 AM					✓	15
Daily cost per agent	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195	

电子表格描述

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
3		6am-2pm	8am-4pm	Noon-8pm	4pm-midnight	10pm-6am				
4		Shift	Shift	Shift	Shift	Shift				
5	Cost per Shift	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195				
6							Total		Minimum	
7	Time Period	Shift Works Time Period? (1=yes, 0=no)						Working		Needed
8	6am-8am	1	0	0	0	0	48	>=	48	
9	8am-10am	1	1	0	0	0	79	>=	79	
10	10am- 12pm	1	1	0	0	0	79	>=	65	
11	12pm-2pm	1	1	1	0	0	118	>=	87	
12	2pm-4pm	0	1	1	0	0	70	>=	64	
13	4pm-6pm	0	0	1	1	0	82	>=	73	
14	6pm-8pm	0	0	1	1	0	82	>=	82	
15	8pm-10pm	0	0	0	1	0	43	>=	43	
16	10pm-12am	0	0	0	1	1	58	>=	52	
17	12am-6am	0	0	0	0	1	15	>=	15	
18										
19		6am-2pm	8am-4pm	Noon-8pm	4pm-midnight	10pm-6am				
20		Shift	Shift	Shift	Shift	Shift			Total Cost	
21	Number Working	48	31	39	43	15			\$30,610	

数学公式表达

令 S_i = 分配到轮班 i 的代理商（其中 $i = 1, 2, \dots, 5$ ），

$$\text{Min Cost} = \$170S_1 + \$160S_2 + \$175S_3 + \$180S_4 + \$195S_5$$

约束

6AM–8AM之间总的代理商数：	$S_1 \geq 48$
8AM–10AM之间总的代理商数：	$S_1 + S_2 \geq 79$
10AM–12PM之间总的代理商数：	$S_1 + S_2 \geq 65$
12PM–2PM之间总的代理商数：	$S_1 + S_2 + S_3 \geq 87$
2PM–4PM之间总的代理商数：	$S_2 + S_3 \geq 64$
4PM–6PM之间总的代理商数：	$S_3 + S_4 \geq 73$
6PM–8PM之间总的代理商数：	$S_3 + S_4 \geq 82$
8PM–10PM之间总的代理商数：	$S_4 \geq 43$
10PM–12AM之间总的代理商数：	$S_4 + S_5 \geq 52$
12AM–6AM之间总的代理商数：	$S_5 \geq 15$

且

$$S_i \geq 0 \quad (\text{其中 } i = 1, 2, \dots, 5)$$

成本收益平衡问题建模程序

1. 确定问题的活动水平。
2. 确定活动的绩效评估（通常为成本）。
3. 评估每种活动对总的绩效测度的单位贡献。
4. 确定必须实现的利润。
5. 对每种利润，确定最小可接受的水平，然后为每种利润分配活动。
6. 在数据单元格中输入3及5中的数据。
7. 确定可变单元格。
8. 用SUMPRODUCT 计算活动水平。在相邻的两行单元格中输入 \leq 以及最小可接受水平。
9. 确定目标单元格。使用 SUMPRODUCT 计算目标函数。

大M公司网络配送问题

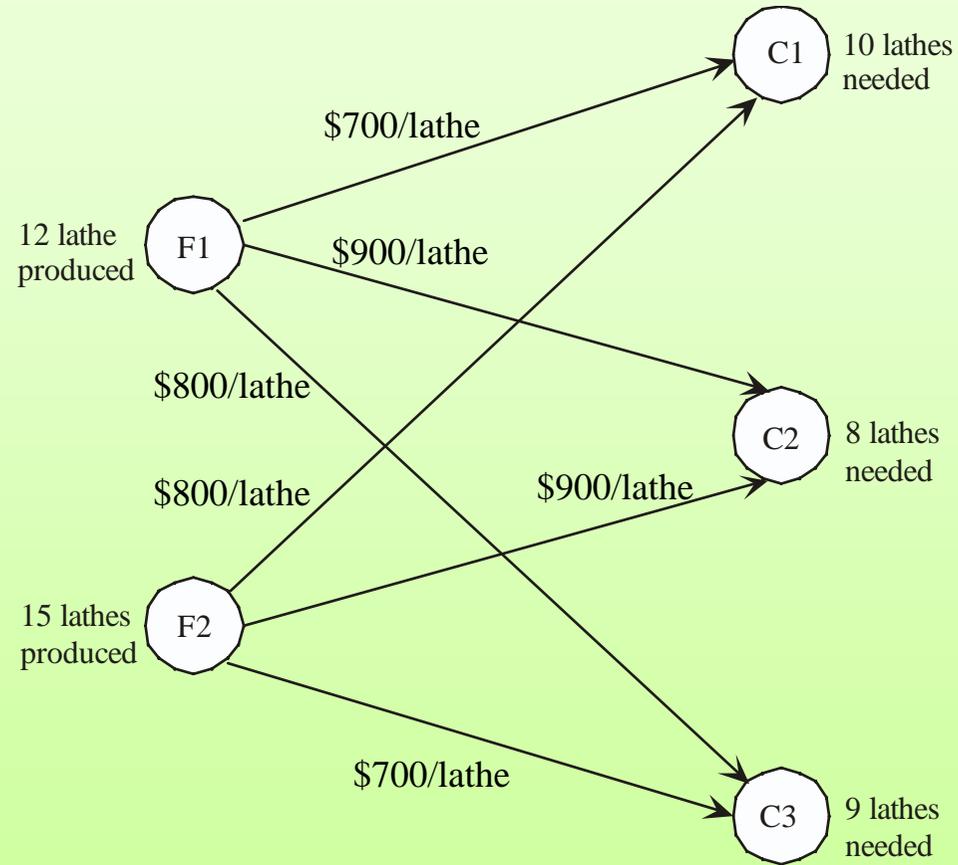
- ◆ 大M公司在两个工厂生产一系列重型机器，产品之一是大型车床。
- ◆ 公司现收到三个顾客的下月订单要购买大型车床。

问题：每个工厂运送多少台车床到每个顾客那里才能使总成本最小？

一些数据

单位运输成本（美元）				
To	顾客1	顾客2	顾客3	
From				运出
Factory 1	\$700	\$900	\$800	12 lathes
Factory 2	800	900	700	15 lathes
订货量	10 lathes	8 lathes	9 lathes	

配送网络



电子表格描述

	B	C	D	E	F	G	H
3	Shipping Cost						
4	(per Lathe)	Customer 1	Customer 2	Customer 3			
5	Factory 1	\$700	\$900	\$800			
6	Factory 2	\$800	\$900	\$700			
7							
8					Total		
9					Shipped		
10	Units Shipped	Customer 1	Customer 2	Customer 3	Out		Output
11	Factory 1	10	2	0	12	=	12
12	Factory 2	0	6	9	15	=	15
13	Total To Customer	10	8	9			
14		=	=	=			Total Cost
15	Order Size	10	8	9			\$20,500

数学公式表达

令 S_{ij} = 从工厂 i 到顾客 j 运送的车床数量 ($i = F1, F2; j = C1, C2, C3$)

$$\begin{aligned} \text{Min Cost} = & \$700S_{F1-C1} + \$900S_{F1-C2} + \$800S_{F1-C3} \\ & + \$800S_{F2-C1} + \$900S_{F2-C2} + \$700S_{F2-C3} \end{aligned}$$

约束

$$\text{工厂1: } S_{F1-C1} + S_{F1-C2} + S_{F1-C3} = 12$$

$$\text{工厂2: } S_{F2-C1} + S_{F2-C2} + S_{F2-C3} = 15$$

$$\text{顾客1: } S_{F1-C1} + S_{F2-C1} = 10$$

$$\text{顾客2: } S_{F1-C2} + S_{F2-C2} = 8$$

$$\text{顾客3: } S_{F1-C3} + S_{F2-C3} = 9$$

且

$$S_{ij} \geq 0 \quad (\text{其中 } i = F1, F2; j = C1, C2, C3) .$$

超级食品公司案例的再研究

- ◆ 大卫与克莱略认为电子表格模型必须增加一些考虑事项。
- ◆ 特殊的，他们认为必须将目标观众定位为儿童及他们的家长。
- ◆ 两个新的目标：
 - 必须至少有500万儿童看到该广告
 - 必须至少有500万儿童的家长看到该广告
- ◆ 另外，今年分配给优惠券的预算还有1,490,000 美元的剩余。

收益及约束修正数据

Number Reached in Target Category (millions)

	Each TV Commercial	Each Magazine Ad	Each Sunday Ad	Minimum Acceptable Level
Young children	1.2	0.1	0	5
Parents of young children	0.5	0.2	0.2	5

Contribution Toward Required Amount

	Each TV Commercial	Each Magazine Ad	Each Sunday Ad	Required Amount
Coupon redemption	0	\$40,000	\$120,000	\$1,490,000

电子表格表述

	B	C	D	E	F	G	H
3		TV Spots	Magazine Ads	SS Ads			
4	Exposures per Ad	1,300	600	500			
5	(thousands)						
6		Cost per Ad (\$thousands)			Budget Spent		Budget Available
7	Ad Budget	300	150	100	3,775	<=	4,000
8	Planning Budget	90	30	40	1,000	<=	1,000
9							
10		Number Reached per Ad (millions)			Total Reached		Minimum Acceptable
11	Young Children	1.2	0.1	0	5	>=	5
12	Parents of Young Children	0.5	0.2	0.2	5.85	>=	5
13							
14		TV Spots	Magazine Ads	SS Ads	Total Redeemed		Required Amount
15	Coupon Redemption per Ad	0	40	120	1,490	=	1,490
16	(\$thousands)						
17							Total Exposures
18		TV Spots	Magazine Ads	SS Ads			(thousands)
19	Number of Ads	3	14	7.75			16,175
20		<=					
21	Maximum TV Spots	5					

数学公式表示

令 TV = 电视上的广告时段数目
 M = 杂志上的广告数目
 SS = 星期天增刊上的广告数目

Max 广告受众量 = $1,300TV + 600M + 500SS$

约束

广告预算: $300TV + 150M + 100SS \leq 4,000$ (千美元)

规划预算: $90TV + 30M + 30SS \leq 1,000$ (千美元)

可获得TV广告时段: $TV \leq 5$

儿童总量: $1.2TV + 0.1M \geq 5$ (百万)

家长总量: $0.5TV + 0.2M + 0.2SS \geq 5$ (百万)

优惠券总资金: $40M + 120SS = 1,490$ (千美元)

且

$TV \geq 0, M \geq 0, SS \geq 0.$

各类函数约束

类型	形式*	解释	主要用于
资源约束	$LHS \leq RHS$	对于特定资源，使用数量 \leq 可获得的数量	资源分配问题 混合问题
收益约束	$LHS \geq RHS$	对于特定的收益，达到的水平 \geq 最低可接受水平	成本收益平衡问题 混合问题
确定需求约束	$LHS = RHS$	对于一些数量，提供的数量=需求的数量	网络配送问题 混合问题

* LHS = 左式（一个SUMPRODUCT函数）
RHS = 右式（常数）

塞维特公司固体废弃物回收问题

- ◆ 塞维特公司经营一个回收中心，专门从事四种固体废弃物的回收，并将回收物处理、混合成可销售的产品。
- ◆ 可以合成三种不同等级的产品A、B和C（依赖于固体废弃物的混合）。

问题：如何有效的将各种材料分配到各等级的产品中
去，以实现每周的总利润最大？

塞维特公司产品数据

等级	规格说明	每磅的混合成本	每磅的售价
A	材料1: 不超过总量的30% 材料2: 不少于总量的40% 材料3: 不超过总量的50% 材料4: 总量的20%	\$3.00	\$8.50
B	材料1: 不超过总量的50% 材料2: 不少于总量的10% 材料4: 总量的10%	2.50	7.00
C	材料1: 不超过总量的70%	2.00	5.50

塞维特公司固体废弃物的有关数据

材料	每周可获得的 数量（磅）	每磅处理成 本（美元）	附加约束
1	3,000	\$3.00	1. 对于每种材料， 每周必须至少收集 并处理一半以上的 数量 2. 每周有30000美元 可用于处理这些材 料
2	2,000	6.00	
3	4,000	4.00	
4	1,000	5.00	

电子表格表述

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
3		Grade A	Grade B	Grade C								
4	Unit Amalg. Cost	\$3.00	\$2.50	\$2.00				Total Treatment Cost		\$30,000		
5	Unit Selling Price	\$8.50	\$7.00	\$5.50						=		
6	Unit Profit	\$5.50	\$4.50	\$3.50				Treatment Funds Available		\$30,000		
7												
8												
9		Material Allocation				Unit				Total		
10		(pounds of material used for each product grade)				Treatment		Minimum		Material		Amount
11		Grade A	Grade B	Grade C		Cost		to Treat		Treated		Available
12	Material 1	412.3	2,587.7	0		\$3		1,500	<=	3,000	<=	3,000
13	Material 2	859.6	517.5	0		\$6		1,000	<=	1,377	<=	2,000
14	Material 3	447.4	1,552.6	0		\$4		2,000	<=	2,000	<=	4,000
15	Material 4	429.8	517.5	0		\$5		500	<=	947	<=	1,000
16	Total Products	2,149.1	5,175.4	0								
17											Mixture	
18						Mixture Specifications					Percents	
19						Grade A, Material 1		412.3	<=	644.7	30%	of Grade A
20		Total Profit	\$35,110			Grade A, Material 2		859.6	>=	859.6	40%	of Grade A
21						Grade A, Material 3		447.4	<=	1,074.6	50%	of Grade A
22						Grade A, Material 4		429.8	=	429.8	20%	of Grade A
23												
24						Grade B, Material 1		2,587.7	<=	2,587.7	50%	of Grade B
25						Grade B, Material 2		517.5	>=	517.5	10%	of Grade B
26						Grade B, Material 4		517.5	=	517.5	10%	of Grade B
27												
28						Grade C, Material 1		0.0	<=	0.0	70%	of Grade C

数学公式表示

令 x_{ij} = 第 i 种产品中含有第 j 种产品的数量 ($i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4$) .

$$\text{Max 利润} = 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

约束 混合物比例规定:

$$x_{A1} \leq 0.3 (x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

$$x_{A2} \geq 0.4 (x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

$$x_{A3} \leq 0.5 (x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

$$x_{A4} = 0.2 (x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

$$x_{B1} \leq 0.5 (x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$$

$$x_{B2} \geq 0.1 (x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$$

$$x_{B4} = 0.1 (x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4})$$

$$x_{C1} \leq 0.7 (x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

可获得的材料:

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 3,000$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 2,000$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 4,000$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \leq 1,000$$

要处理的材料的约束:

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 1,500$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 1,000$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \geq 2,000$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \geq 500$$

处理成本的约束:

$$3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2})$$

$$+ 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30,000$$

且 $x_{ij} \geq 0$ ($i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4$).

明确表述一个线性规划模型

- ◆ 在电子表格上输入所有的数据（蓝色）。
- ◆ 需要做什么样的决策？在旁边为决策变量设定电子表格（黄色）。
- ◆ 为目标单元格确定等式方程（橙色）。
- ◆ 在电子表格上输入所有的约束条件（LHS, \leq / $=$ / \geq , RHS）。
- ◆ 一些案例：
 - 生产计划问题
 - 混合问题问题
 - 员工日程安排问题
 - 运输/分配问题
 - 指派问题

案例1 产品组合问题

家具公司的产品是长椅子和野餐用的桌子，公司有两个资源约束：员工和木材。在生产期间最大的可用工时为1,600；公司的可用木材量为9,000块。每个长椅子需要3个工时和12块木料，每个桌子需要6个工时和38块木料。椅子和桌子的边际收益分别为8美元、18美元。

问题：什么样的产品组合能使公司利润最大化？

数学公式表述

令 B = 生产上椅子的数量,
 T = 生产桌子的数量。

$$\text{Max 利润} = \$8B + \$18T$$

约束

$$\text{工时: } 3B + 6T \leq 1,600 \text{ 小时}$$

$$\text{木材: } 12B + 38T \leq 9,000 \text{ 磅}$$

且

$$B \geq 0, T \geq 0.$$

电子表格描述

	B	C	D	E	F	G
3		Benches	Tables			
4	Profit	\$8	\$18			
5						
6						
7	Resources	Used per Unit Produced		Total		Available
8	Labor	3	6	1,600	<=	1,600
9	Wood	12	38	9,000	<=	9,000
10						
11						Total Cost
12	Units Produced	161.90	185.71			\$4,638.10

案例2 食品问题

一个监狱想确定给犯人什么样的食物。他们想提供牛奶、豆制品和橙汁的组合物，目标是使成本最小，并且满足法律规定的最小营养需求。

成本、每种食品的营养组成以及最小的营养需求如下：

	Milk (gallons)	Navy Beans (cups)	Oranges (large Calif. Valencia)	Minimum Daily Requirement
Niacin (mg)	3.2	4.9	0.8	13.0
Thiamin (mg)	1.12	1.3	0.19	1.5
Vitamin C (mg)	32	0	93	45
Cost (\$)	2.00	0.20	0.25	

问题：犯人的饮食组合应该是什么样的？

数学公式表达

令 x_1 = 犯人食物中的牛奶数量（加仑），
 x_2 = 豆制品数量（杯），
 x_3 = 橙汁的数量。

$$\text{Min 成本} = \$2.00x_1 + \$0.20x_2 + \$0.25x_3$$

约束

$$\text{Niacin: } 3.2x_1 + 4.9x_2 + 0.8x_3 \geq 13$$

mg

$$\text{Thiamin: } 1.12x_1 + 1.3x_2 + 0.19x_3 \geq 1.5$$

mg

$$\text{Vitamin C: } 32x_1 + 93x_3 \geq 45 \text{ mg}$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

电子表格描述

	B	C	D	E	F	G	H
3		Milk	Beans				
4		(gal.)	(cups)	Oranges			
5	Cost	\$2.00	\$0.20	\$0.25			
6							Minimum
7		Nutritional Contents (mg)			Total		Requirement
8	Niacin (mg)	3.2	4.9	0.8	13	>=	13
9	Thiamin (mg)	1.12	1.3	0.19	3.438	>=	1.5
10	Vitamin C (mg)	32	0	93	45	>=	45
11							
12	Quantity						Total Cost
13	(per prisoner)	0	2.574	0.484			\$0.64

George Dantzig's 的饮食

- ◆ Stigler (1945) “生存的成本”
 - 启发式解决方案。 Cost = \$39.93.
- ◆ Dantzig 发明了单纯形法 (1947)
 - Stigler's 问题在120天内解决。 Cost = \$39.69.
- ◆ Dantzig 参加一个会议 (early 1950's), 应用饮食模型:
 - $\leq 1,500$ 卡
 - 目标：最大化（体重减去水份）
 - 500 种食物类型
- ◆ 问题初始解决方案：
 - 500 加仑的醋
 - 200 立方米的牛肉汤

在食物管理系统中最小花费菜单计划模型

- ◆ 在许多公共机构中应用的食物供给规划：医院、看护所、学校、监狱等。
- ◆ 菜单计划经常扩展到进餐次序或周期上。
- ◆ 变化种类非常重要（分离约束）。
- ◆ 偏爱等级（与服务频率有关）。
- ◆ 附加约束（颜色、种类等）。
- ◆ 与传统模型相比，通常的模型已经使成本降低了10%，更好的满足了营养需求，并且增加了顾客的满意度。
- ◆ USDA 使用这个模型制定食物供给规划。

案例3 时间安排问题

航空预定机构通常设定从星期一到星期五的24小时热线，各时间段预定机构代理商的需求数量如下所示，合同规定员工为8小时工作日。

Time Period	Number of Agents Needed
12am – 4am	11
4am – 8am	15
8am – 12pm	31
12pm – 4pm	17
4pm – 8pm	25
8pm – 12am	19

问题：每个8小时轮换制中需要多少个代理商？

数学公式表达

令 $x_1 = 12\text{am} - 8\text{am}$ 之间的代理商数量,
 $x_2 = 4\text{am} - 12\text{pm}$ 之间的代理商数量,
 $x_3 = 8\text{am} - 4\text{pm}$ 之间的代理商数量,
 $x_4 = 12\text{pm} - 8\text{pm}$ 之间的代理商数量,
 $x_5 = 4\text{pm} - 12\text{am}$ 之间的代理商数量,
 $x_6 = 8\text{pm} - 4\text{am}$ 之间的代理商数量。

Min 代理商总数量 = $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

约束

$$12\text{am}-4\text{am}: x_1 + x_6 \geq 11$$

$$4\text{am}-8\text{am}: x_1 + x_2 \geq 15$$

$$8\text{am}-12\text{pm}: x_2 + x_3 \geq 31$$

$$12\text{pm}-4\text{pm}: x_3 + x_4 \geq 17$$

$$4\text{pm}-8\text{pm}: x_4 + x_5 \geq 25$$

$$8\text{pm}-12\text{am}: x_5 + x_6 \geq 19$$

且

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

电子表格描述

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Reservation Agents Scheduling Problem							
2								
3		Time	Number		Minimum			Number
4		Period	Working		Required		Shift	Working
5		12am Š 4am	11	>=	11		12am - 8am	0
6		4am Š 8am	15	>=	15		4am - 12pm	15
7		8am Š 12pm	31	>=	31		8am - 4pm	16
8		12pm Š 4pm	33	>=	17		12pm - 8pm	17
9		4pm Š 8pm	25	>=	25		4pm - 12am	8
10		8pm Š 12am	19	>=	19		8pm - 4am	11
11							Total	67

联合航空公司工作人员排程

- ◆ 联合航空公司雇佣5,000家代理商。
- ◆ 一些是兼职（2-8小时轮换），一些为全职（8-10小时轮换）。
- ◆ 每天的工作量变化很大。
- ◆ 此问题的线性规划模型：
 - 决策变量：每个轮换的时间段需要多少员工开始工作（半小时的时间间隔）。
 - 约束：每半小时最少需要的员工数量。
 - 目标：成本最小化。
- ◆ 每年为联合航空公司节省600万美元、改进了客户服务并且至今还在应用此模型。

案例4 运输问题

一个公司有两个生产车间生产产品，并把产品运到三个分配中心。两个车间的生产成本相同，运输成本如下表所示。每星期运输一次货物，每个车间一星期生产60单位产品，每个分配中心每周需要40单位产品。

		分配中心		
		1	2	3
车间	A	\$4	\$6	\$4
	B	\$6	\$5	\$2

问题：每个车间运往每个分配中心的产品是多少才能使成本最小？

数学公式表达

令 x_{ij} = 从 i 车间运到 j 中心的产品数量 ($i = A, B; j = 1, 2, 3$) ,

$$\text{Min 成本} = \$4x_{A1} + \$6x_{A2} + \$4x_{A3} + \$6x_{B1} + \$5x_{B2} + \$2x_{B3}$$

约束

$$\text{车间A:} \quad x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 60$$

$$\text{车间 B:} \quad x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 60$$

$$\text{分配中心1:} \quad x_{A1} + x_{B1} \geq 40$$

$$\text{分配中心2:} \quad x_{A2} + x_{B2} \geq 40$$

$$\text{分配中心3:} \quad x_{A3} + x_{B3} \geq 40$$

且

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = A, B; j = 1, 2, 3).$$

电子表格描述

	B	C	D	E	F	G	H
3		Distribution	Distribution	Distribution			
4	Cost	Center 1	Center 2	Center 3			
5	Plant A	\$4	\$6	\$4			
6	Plant B	\$6	\$5	\$2			
7							
8							
9	Shipment	Distribution	Distribution	Distribution			
10	Quantities	Center 1	Center 2	Center 3	Shipped		Available
11	Plant A	40	20	0	60	<=	60
12	Plant B	0	20	40	60	<=	60
13	Shipped	40	40	40	Cost	=	\$460
14		>=	>=	>=			
15	Needed	40	40	40			

Proctor and Gamble中的配送系统

- ◆ Proctor and Gamble 在90年代早期需要巩固并重新设计他们的北美配送系统。
 - 50 个产品种类
 - 60 车间
 - 15 配送中心
 - 1000 消费区
- ◆ 解决了很多运输问题（一种产品）。
- ◆ 目标：寻找最优的配送计划。
- ◆ 关闭一些车间以及配送中心，使他们的产品来源及配送区域达到最优。
- ◆ 在1996年实现，每年节省20000美元的成本。

案例5 指派问题

一个游泳队教练需要指派运动员参加 200-yard 游泳比赛（四个运动员，每人游50 yards）。由于大多数运动员在不到一个赛程的距离内游的最快，所以不清楚在四个赛程中应分别指派哪个运动员。五个最优秀的运动员以及他们在每个赛程中（50 yards）的最佳时间如下：

	仰泳	蛙泳	蝶泳	自由泳
Carl	37.7	43.4	33.3	29.2
Chris	32.9	33.1	28.5	26.4
David	33.8	42.2	38.9	29.6
Tony	37.0	34.7	30.4	28.5
Ken	35.4	41.8	33.6	31.1

问题：应怎样指派运动员使比赛成绩最佳？

数学公式表达

令 $x_{ij} = 1$ 如果运动员 i 游第 j 赛程, 否则 0
 t_{ij} = 运动员 i 在赛程 j 中的最佳游泳时间

$$\text{Min 时间} = \sum_i \sum_j t_{ij} x_{ij}$$

约束

$$\text{每个赛程需要的运动员: } \sum_i x_{ij} = 1$$

$$\text{每个运动员游一个赛程: } \sum_j x_{ij} \leq 1$$

$$\text{且 } x_{ij} \geq 0$$

电子表格描述

	B	C	D	E	F	G	H	I
3	Best Times	Backstroke	Breastroke	Butterfly	Freestyle			
4	Carl	37.7	43.4	33.3	29.2			
5	Chris	32.9	33.1	28.5	26.4			
6	David	33.8	42.2	38.9	29.6			
7	Tony	37.0	34.7	30.4	28.5			
8	Ken	35.4	41.8	33.6	31.1			
9								
10								
11	Assignment	Backstroke	Breastroke	Butterfly	Freestyle			
12	Carl	0	0	0	1	1	<=	1
13	Chris	0	0	1	0	1	<=	1
14	David	1	0	0	0	1	<=	1
15	Tony	0	1	0	0	1	<=	1
16	Ken	0	0	0	0	0	<=	1
17		1	1	1	1	Time =		126.2
18		=	=	=	=			
19		1	1	1	1			