

文章编号: 1000-4750(2015)11-0228-08

基于 ICM 方法的层合板结构 流固耦合频率约束拓扑优化

叶红玲, 李耀明, 陈 宁

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘 要: 该文基于独立、连续、映射(independent continuous mapping, ICM)的拓扑优化方法, 针对层合板结构频率约束下流固耦合的拓扑优化问题进行了建模与求解。利用格林公式与瑞利商, 进行了优化模型频率约束的显式化, 并基于泰勒线性近似的方法推导了设计灵敏公式, 同时采用对偶序列二次规划求解了该模型。另外, 通过引入修正的 Heaviside 函数对拓扑变量进行了离散化处理。利用 PCL(Patran Command Language)二次开发平台对现有 MSC.Patran 软件进行二次开发, 并通过 MSC.Nastran 软件求解器, 实现了优化算法。数值算例证明了该程序与算法的有效性与可行性。

关键词: 拓扑优化; 流固耦合; 层合板; ICM 方法; 二次开发

中图分类号: O343.1; TB114.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.03.0148

TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF LAMINATED PLATE SUBJECT TO FLUID-STRUCTURE INTERACTION WITH FREQUENCY CONSTRAINT BASED ON ICM METHOD

YE Hong-ling, LI Yao-ming, CHEN Ning

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: A topology optimization model for a laminated plate subjected to fluid-structure interactions with frequency constraints is established and solved based on ICM (Independent Continuous Mapping) method. An explicit expression of the frequency-constraint(s) with respect to the topological variables is obtained by using Green formula and Rayleigh quotient. The design sensitivity formula is deduced by taking the advantage of Taylor linear approximation. The mathematical model of this optimization is solved by dual sequential quadratic programming. In addition, a modified Heaviside function is introduced to deal with the discretization of topology variables. The optimal model and its algorithm have been implemented by using the development language of MSC. Patran and MSC. Nastran software. Numerical examples show the reliability and validity of the program and algorithm.

Key words: topology optimization; fluid-structure interaction; laminated plate; ICM method; secondary development

流固耦合下频率约束拓扑优化问题是目前结构拓扑优化领域研究的一个难点所在。对于大多数储液容器来说, 结构的功能限制是制约拓扑优化在

流固耦合领域中应用的一个因素, 而利用复合材料模型, 对板壳结构进行加强筋或增强材料设计, 是将拓扑优化引入到流固耦合拓扑优化的一个方向。

收稿日期: 2014-03-04; 修改日期: 2015-07-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072009, 11172013)

通讯作者: 叶红玲(1972—), 女, 河北东光人, 副教授, 博士, 从事多学科分析优化、动力学分析与控制研究(E-mail: yehongl@bjut.edu.cn).

作者简介: 李耀明(1988—), 男, 北京人, 硕士生, 从事动力学连续体结构拓扑优化研究(E-mail: liyaoming@emails.bjut.edu.cn);

陈 宁(1988—), 女, 山东潍坊人, 硕士生, 从事动力学连续体结构拓扑优化研究(E-mail: xiaoning198807@emails.bjut.edu.cn).

对于频率特征值拓扑优化问题的研究,目前有学者利用均匀化方法^[1]、变密度法^[2]、渐近结合优化(evolutionary structure optimization, ESO)法^[3]、水平集方法^[4]、ICM 方法^[5]等,实现了基频最大或频率间隔最大等优化问题。主要的研究有 Pedersen^[6]等采用 SIMP 法进行了最大化结构基频的研究,运用分段惩罚函数处理了局部模态现象。Jianbin D 等^[7]研究了以结构固有频率及相邻固有频率间的间隔最大化为目标的拓扑优化问题。杨振兴等^[8]采用进化方法策略,推导了 ESO 的最大频率间隔为目标的三维连续体拓扑优化问题的研究,薛开等^[9]研究了结构阻尼频率的拓扑优化过程和进化结构优化中棋盘格式的抑制方法。叶红玲、邱海等^[10-11]采用 ICM 方法对连续体结构的频率约束拓扑优化问题进行了研究。

研究流固耦合下液体对固体的特征值影响属于湿模态求解问题。目前,中外学者对于该问题已进行了相关研究工作,常见的方法为附加质量法,如侣晓辉^[12]等对比了湿模态和干模态的差异,其采用格林函数对流体单元进行边界元积分,导出流体的附加质量,再利用 Rayleigh-Ritz 求解湿模态特征值问题。另外还有 Amabili M^[13]、Zhou Ding^[14]等势函数分解法求解了液体表面有小幅波动的湿模态问题。

在实际的工程应用中,对有限元软件进行二次开发,通过借助其精确度较高的求解器来实现软件本身没有的功能,是一个省时且可靠性高的方法。本文基于 ICM 拓扑优化方法,通过调用 MSC.Patran 的层合材料建模与 MSC.Nastran 的复合材料求解模块,利用 PCL (Patran Command Language)语言,开发出了流固耦合频率优化的拓扑优化的软件,并通过数值算例验证了该方法的可行性与平台的适用性。

1 基本理论方法

1.1 ICM 方法概述

ICM(Independent Continuous and Mapping)方法即独立、连续、映射的拓扑优化方法^[5],以一种独立于单元具体物理参数的拓扑变量 t 来表征单元的有与无,然后利用过滤函数将 0-1 离散变量映射为[0,1]区间的连续变量。其通过“磨光函数”与“过滤函数”完成从“离散-光滑”的映射和从“光滑-离散”的逆映射。在建立优化模型时,过滤函数对

相应的单元的物理量起到了识别作用。在连续体结构动力拓扑优化中,引入了单元重量、单元质量阵及单元刚度阵的过滤函数,其表达式为:

$$w = \bar{w}f_w(t_i), \mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}f_m(t_i), \mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}f_k(t_i) \quad (1)$$

式中: \bar{w} 、 $\bar{\mathbf{M}}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}$ 为单元的初始重量、初始质量矩阵、初始刚度矩阵; w 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 为 i 单元所对应的单元重量、质量矩阵及刚度矩阵; $f_w(t_i)$ 为重量过滤函数; $f_k(t_i)$ 为刚度阵过滤函数; $f_m(t_i)$ 为质量阵过滤函数。

本文选取幂函数^[5]作为过滤函数:

$$f_w(t_i) = t_i^{\alpha_w}, f_k(t_i) = t_i^{\alpha_k}, f_m(t_i) = t_i^{\alpha_m} \quad (2)$$

其中, α_w 、 α_k 、 α_m 分别为上述各过滤函数的给定参数。为避免局部模态的发生,通过数值实验验证,本文给定刚度阵与质量阵过滤函数的参数相等,为 $\alpha_k = \alpha_m = 4$ 。

1.2 流体接触下结构频率的求解

若无外界激振力,流固耦合的振动形式为结构受液体压力作用的强迫振动:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3)$$

式中: \mathbf{K} 为刚度矩阵; \mathbf{M} 为质量矩阵; \mathbf{f} 为液体压力。

本文讨论液体表面无晃动,不可压缩的牛顿流体,引入格林函数来求解流固交界面上的速度势,设界面上有 P 、 Q 两点,则由流体力学方程和拉普拉斯方程知格林方程 G 为:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(P, Q)} - \frac{1}{r_1(P, Q')} \right] \quad (4)$$

式中, r 为 P 、 Q 两点距离。由格林积分可知速度势为:

$$\phi(x, y, z) = \iint_{S_i} \sigma(x, y, z) G(x, y, z, x_s, y_s, z_s) ds_i \quad (5)$$

式中 σ 为压力,因此流固交界面上法向速度为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \iint_{S_i} \sigma \mathbf{n} \nabla G ds_i \quad (6)$$

式中 \mathbf{n} 为法向单位向量。则 P 点的方向速度为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_P = -\frac{1}{2} \sigma(P) + \iint_{S_i} \sigma(Q) \mathbf{n} \nabla G(P, Q) ds_i \quad (7)$$

式中 S 为作用面积,将式(7)离散为:

$$-\varphi_n^{(r)}(P_i) = \frac{\partial \phi_r}{\partial n} \Big|_{P_i} = -\frac{1}{2} \sigma(P_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sigma(Q_j) \iint_{S_i} n_i \nabla G(P_i, Q_j) ds_j \quad (8)$$

式中 $\varphi_n^{(r)}$ 为法向速度。设矩阵为:

$$C_{ij} = - \begin{cases} \iint_{S_j} n_i \nabla G(P_i, Q_i) dS_j, & j \neq i \\ \frac{1}{2}, & j = i \end{cases} \quad (9)$$

则

$$\varphi_n^{(r)} = C\sigma \quad (10)$$

那么 P 点的速度势可表示为:

$$\phi(P_i) = \sum_{j=1}^M \sigma_j(Q_j) \iint_{S_j} G(P_i, Q_i) dS_j \quad (11)$$

设

$$\begin{cases} \theta = D\sigma \\ D_{ij} = \iint_{S_j} G(P, Q_j) dS_j \end{cases} \quad (12)$$

由流体力学压强公式, 有:

$$f = \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho DC^{-1} \frac{\partial \theta^{(r)}}{\partial t} \approx \rho DC^{-1} \ddot{u} \quad (13)$$

由虚功原理, 将压强转化为节点矢量 f :

$$f = -\rho SCD^{-1} \ddot{u} \quad (14)$$

式中 S 为面积矩阵, 代入流固耦合振动方程, 有:

$$M\ddot{u} + Ku = -\rho SCD^{-1} \ddot{u} \quad (15)$$

将式(15)移项, 为:

$$(M + \rho SCD^{-1})\ddot{u} + Ku = 0 \quad (16)$$

式(16)和结构在真空中的自由振动相似, 可将其等效为流体给了结构一个附加质量。将 $M + M_a$ 记作 M_s , 因此有:

$$(K - \lambda M_s)\varphi = 0 \quad (17)$$

式中: φ 为求解频率问题的特征向量, 其与位移 u 的关系为 $u = \varphi \sin \omega t$; λ 为特征值, 定义为 $\lambda = \omega^2$ 。

2 优化模型的建立与求解

2.1 约束方程显式化处理

求解拓扑优化问题需要导出式(17)与设计变量的关系, 由能量原理, 可以得到瑞利商为:

$$\lambda_j = \frac{u_i^T K u_i}{u_i^T M_s u_i} \quad (18)$$

对式(18)求导, 可得到耦合特征值对设计变量的导数:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = \varphi_j^T \frac{\partial K}{\partial x_i} \varphi_j - \lambda_j \varphi_j^T \frac{\partial M_s}{\partial x_i} \varphi_j \quad (19)$$

采用刚度过滤函数的倒变量作为设计变量, 即:

$$f_k(t_i) = 1/x_i, \quad t_i = f_k^{-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) \quad (20)$$

引入幂函数过滤函数可得到:

$$\begin{cases} K = \sum_{i=1}^N k_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} k_i^0 \\ M = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i} m_i^0 \end{cases} \quad (21)$$

于是可得到约束敏感度值:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} &= \gamma_j^T \frac{\partial K}{\partial x_i} \gamma_j - \lambda_j \gamma_j^T \frac{\partial M}{\partial x_i} \gamma_j = \\ &= -\gamma_j^T \frac{2k_i}{2x_i} \gamma_j + \lambda_j \gamma_j^T \frac{2m_i}{2x_i} \gamma_j = \frac{-2}{x_i} (U_{ij} - V_{ij}) \end{aligned} \quad (22)$$

其中: γ 为特征向量; U_{ij} 为结构的应变能; V_{ij} 为动能; x 为设计变量。

对特征值进行线性近似, 可得到特征值对设计变量的显式表达式为:

$$\lambda_j(x^0 + \Delta x) \approx \lambda(x^0) + \sum \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \Big|_{x^0} \cdot \Delta x_i \quad (23)$$

定义:

$$\begin{cases} \bar{c}_{ij} = -\frac{2}{x_i^0} (U_{ij}^0 - V_{ij}^0) \\ \bar{d}_j = -\lambda_j(x^0) - 2 \sum_{i=1}^N (U_{ij}^0 - V_{ij}^0) \end{cases} \quad (24)$$

由式(23), 可得到:

$$\lambda_j(x) \approx \sum_{i=1}^N \bar{c}_{ij} x_i - \bar{d}_j \quad (25)$$

2.2 目标函数的建立

取结构重量作为目标函数^[5], 根据式(2), 则幂函数型单元重量过滤函数为:

$$f_w(t_i) = f_w \left[f_k^{-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) \right] = F(x_i) \quad (26)$$

将式(26)进行二次泰勒展开, 则有:

$$\begin{aligned} F(x_i) &= F(x_i^{(v)}) + F'(x_i^{(v)})(x_i - x_i^{(v)}) + \\ &= \frac{1}{2} F''(x_i^{(v)})(x_i - x_i^{(v)})^2 + \dots \approx \\ &= \frac{1}{2} F''(x_i^{(v)})x_i^2 + [F'(x_i^{(v)}) - x_i^{(v)} F''(x_i^{(v)})]x_i \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)中 v 表示优化迭代次数。略去常数项, 结构重量可以表示为:

$$w = \sum_{i=1}^N F(x_i) w_i^0 = \sum_{i=1}^N (b_i x_i^2 + a_i x_i) \quad (28)$$

令 $\alpha = \alpha_w / \alpha_k$ ，则：

$$\begin{cases} a_i = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2x_i^{\alpha+2}} w_i^0 \\ b_i = \frac{-\alpha(\alpha+2)}{x_i^{\alpha+1}} w_i^0 \end{cases} \quad (29)$$

2.3 优化模型的建立与求解

基于约束方程的显式化处理和目标函数的建立，利用式(25)、式(28)，关于流固耦合下频率约束的拓扑优化模型可以简化为标准模型：

$$\begin{cases} \text{求} & \mathbf{x} \in E^N \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^N (b_i x_i^2 + a_i x_i) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^N c_{ij} x_i - d_j \leq 0, \quad j=1,2,\dots,J \\ & 1 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i=1,2,\dots,N \end{cases} \quad (30)$$

为了防止棋盘格式等数值不稳定现象发生，对拓扑变量进行加权过滤^[15]。

式(30)的设计变量数目随单元的增多而增加，较大的模型会严重制约优化问题的求解效率，因此上述优化模型的求解采用对偶序列二次规划的方法进行求解^[5]。原模型的对偶模型为：

$$\begin{cases} \text{求} & \mathbf{z} \in E^J \\ \text{使} & -\Phi(\mathbf{z}) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \mathbf{z}_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,J \end{cases} \quad (31)$$

式中 \mathbf{z} 为对偶模型中设计变量向量，对偶模型中的目标函数为：

$$\Phi(\mathbf{z}) = \min_{1 \leq i \leq \bar{x}} (L(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \quad (32)$$

其中 Lagrange 增广函数为：

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N (a_i x_i^2 + b_i x_i) + \sum_{j=1}^J \left(z_j \left(\sum_{i=1}^N c_{ij} x_i - d_j \right) \right)$$

利用对偶序列二次规划进行模型求解的收敛准则为：

$$\Delta W = \left| (W^{(v+1)} - W^{(v)}) / W^{(v+1)} \right| \leq \varepsilon \quad (33)$$

式中 ε 为收敛精度，取 $\varepsilon=0.001$ 。

3 拓扑变量的离散化处理

ICM 方法经典的反演过程是将独立连续拓扑变量应用在整个优化迭代过程中，直到迭代过程结束后将连续拓扑变量离散为 0 或 1。这个过程中仍存在着离散误差，如何精确地消除中间变量是 ICM 方法一个有待解决的问题。本文的思路是将磨光函

数^[5]引入到反演过程中，通过逐步调高磨光函数的参数，使得连续的拓扑变量逐步向 0 或 1 靠拢，并最终达到精确、完全地消除中间变量的目的。

对于中间变量离散及过滤的方法，Guest 提出了将所谓的修正的 Heaviside 函数^[16]引入到图形过滤中去，其函数形式为：

$$H_\beta(x) = 1 - e^{-\beta x} + x e^{-\beta} \quad (34)$$

式中： $H(x)$ 为 Heaviside 函数； β 是参数。

实际上，Heaviside 函数就是阶跃函数的另一种形式，而修正的意义就在于将阶跃函数连续化，与 ICM 方法的磨光函数意义一致。因此本文以式(34)作为磨光函数，以 β 作为变参数， β 值越大 Heaviside 函数值就越接近于 0 或 1，在整个的迭代过程中，采用分步改变 β 值的办法，其流程是：

- 1) 优化开始时，设 $\beta_0=1$ ，将相关材料值通过式(34)映射成新的材料值。
- 2) 将新的材料值代入到 Nastran 计算，反馈到优化模块中求解优化模型。
- 3) 收敛判断，当收敛条件 $\varepsilon=0.001$ 时，置 $\beta_1=2$ ，修改优化模型，进行第二回合迭代，若迭代再次收敛后 ($\varepsilon=0.001$)，置 $\beta_{n+1} = \beta_n \times 2$ 。
- 4) 重复上面的步骤，直到 β 达到最大值或完全消除中间变量时迭代停止。

不同 β 的变参数磨光函数图线如图 2 所示。

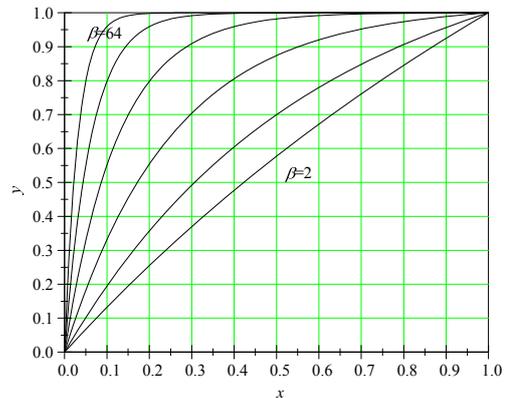


图 2 变参数磨光函数曲线

Fig.2 Smoothing functions with variable parameter curves

上述过程只能让设计变量最大限度靠近 0 或 1，为了使最优拓扑能够完全离散，我们还需对目标函数进行修正，将式(34)引入式(28)中，有：

$$w = \sum_{i=1}^N \frac{w^0}{(H(x_i))^\alpha} \quad (35)$$

式中 $H(x)$ 为变参数磨光函数。

将式(35)求一阶和二阶偏导，得：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum_{i=1}^N \frac{-\alpha Z}{xB^{(\alpha+1)}} w^0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{-\alpha(\alpha+1)Z^2}{B^{(\alpha+2)} + A} w^0 \\ A &= \frac{\alpha\beta^2 e^{-\beta x}}{(1 + xe^{-\beta} - \beta e^{-\beta x})^{(\alpha+1)}} \\ B &= 1 + xe^{-\beta} - \beta e^{-\beta x} \\ Z &= e^{-\beta} + \beta e^{-\beta x} \end{aligned} \right. \quad (36)$$

由此,将式(36)代入到式(30)可得到修正的优化模型。

上述方法在优化过程中进行,通过式(36)得到的修正模型求解出了最优拓扑变量,再经磨光函数式(34)映射得到最终拓扑变量值,并返回 Nastran 进行有限元计算,从而消除反演误差。

4 优化模块二次开发及程序流程

本文优化模块程序的核心为:数学模型的建立与求解、有限元信息的对接与拓扑优化的软件实现。在优化模型求解中,本文采用 Fortran 语言编写的对偶序列二次规划数学算法^[5],数据对接与模块实现遵循以下思路:

1) 提取前处理信息。提取单元和节点的信息,如节点总数、节点坐标、单元总数、单元的节点编号、单元的材料属性等;提取材料信息,如弹性模量、泊松比、密度、厚度等;提取载荷信息,如工况、荷载(集中力、面力、体力、位移载荷和位移约束等)。

2) 运用 PCL 程序设计语言实现优化模型的建立与求解。将优化模型的初始化模块和拓扑优化求解模块及后处理模块等封装成不同的子函数,进行程序的调用和优化流程的实现。

3) 优化模型参数修改的实现。运用软件的库函数或直接引用 PCL 命令根据优化求解模块反馈信息进行模型参数修改或有限元网络的修改。

4) 进行有限元结果的后处理。将计算结果进行可视化显示查看。根据所需的研究结果进行编辑导入,如结点位移、结点应力、单元应力、单元位移等常见结果,还可定义新的结果,如拓扑云图显示等。

5) 利用 PCL 提供的一系列界面函数设计用户界面,使用户界面操作简单,美观大方。

对于层合材料而言,MSC.Patran 提供了完善的

建模方法,如图 3 所示。



图 3 MSC.Patran 的层合材料建模

Fig.3 MSC.Patran for laminated material modeling

本文通过 `mat_create_lam3` 命令关联 `material.create` 所建立的材料,而后通过修改 `material.create` 所建立的材料值,更新 `mat_create_lam3` 建立的层合材料属性,通过每轮迭代修改材料属性值来达到拓扑优化的目的。

整个优化程序的流程如下:

步骤 1. 提取有限元模型数据;DB 路径及名称;单元数及 ID 号;材料属性等。

步骤 2. 初始化数据;包括拓扑变量,设计灵敏度加权矩阵等。

步骤 3. 将有限元模型提交 Nastran 分析。

步骤 4. 提取分析有限元结果,得到单元应变能及单元动能等。

步骤 5. 进行准有效约束的初选。

步骤 6. 形成优化模型数据,提交 Fortran 子程序计算对偶二次规划模型。

步骤 7. 计算拓扑变量,输出拓扑图形。

步骤 8. 依据式(33)判断结果是否收敛。若不收敛,更改拓扑变量值,修改有限元模型,返回步骤 3,若收敛,则程序结束。

5 数值算例与讨论

算例 1: 基结构由两种材料组成(如图 4 所示),材料 1 弹性模量为 150 GPa,泊松比为 0.28,密度为 7.8 kg/cm³,材料 2 弹性模量为 70 GPa,泊松比为 0.3,密度为 2.5 kg/cm³。结构中心有一集中质量,为基结构重量的十分之一。四边固定支撑,设流体为水,密度为 1.0×10³ kg/m³,液面高度为 3 mm,液体作用于材料二的整个区域。结构划分 900 个网格。Nastran 求解的基频为 53500 Hz,设频率约束为 40000 Hz,水面与结构距离 100 mm,对材料 1 进行拓扑优化。

采用近似反演的方式,将上述模型代入到优化模块中求解,设反演阈值为 0.5,得到反演前后的拓扑图形如图 5 所示。

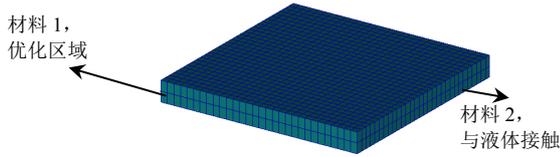
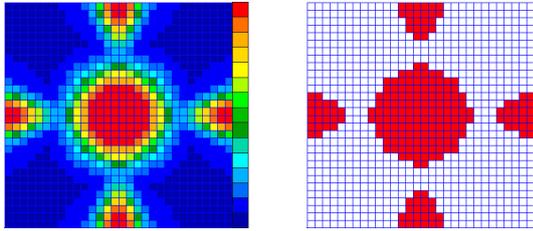


图 4 基结构

Fig 4 Base structure



(a) 反演前最优拓扑图 (b) 反演后最优拓扑图

图 5 拓扑优化结果

Fig.5 The topology optimization

本文优化模块只对层合板的上层材料进行拓扑优化，因此最优拓扑结果并不是常见的连通结构。下面我们对反演结果的有效性进行讨论。

将灰色区域进行统计，本算例共有 900 个拓扑单元，统计结果如图 6 所示。其中拓扑变量在 0.5~1.0 的单元共计 65 个，所以对单元质量阵和刚度阵有影响的单元在 7.2% 以内。我们认为拓扑变量在 0.5~1.0 的拓扑变量会产生离散误差，这是因为根据式(1)和图 1 可知，当拓扑变量小于 0.5 时，相应式(1)中的各物理量变化将在 0.05 以下，因此我们选择反演阈值为 0.5。

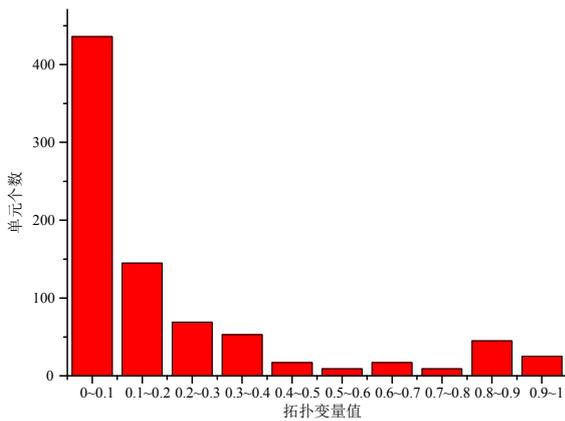


图 6 灰色区域统计

Fig.6 Grey area statistics

若以变参数磨光函数进行精确离散，将图 4 模型代入到求解模块中计算，得到的迭代状态如表 1 所示。

本算例总共迭代 172 次，收敛时的拓扑图已经完全离散，不含有中间变量。每次 β 改变时的拓扑图形如图 7 所示。统计近似反演和精确滤波的数据

如表 2 所示。

表 1 拓扑优化中间过程

Table 1 The topology optimization process

总迭代步 n	β
$n=1\sim 46$	1
$n=47\sim 94$	2
$n=95\sim 142$	4
$n=143\sim 162$	8
$n=163\sim 168$	16
$n=169\sim 170$	32
$n=171\sim 172$	64

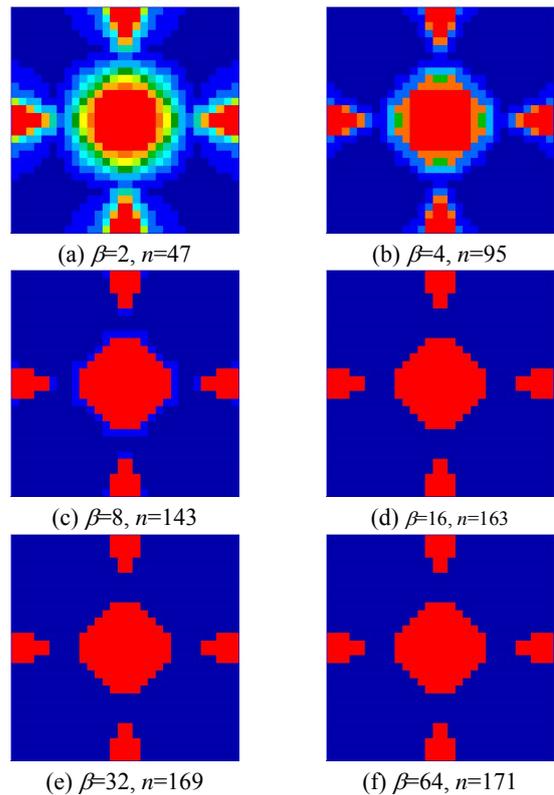


图 7 离散过程中的拓扑图收敛图像

Fig.7 Topology graph in discrete process

表 2 近似反演与精确离散技术对比

Table 2 Comparison of the precise discrete approximation and inversion

	近似反演	精确离散技术
目标函数/g	219	152
约束频率/Hz	40071	40251
迭代步	47	172

从表 2 和图 8 可以看出，精确离散技术不仅消除了中间变量，其目标函数比近似反演要减少很多，结果也消除了反演误差。但是总的迭代步却比近似反演有所增加，其求解效率还有待提高，因此，实际工程应用中，需要根据需求的不同综合考虑选取离散技术。

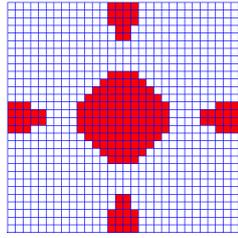
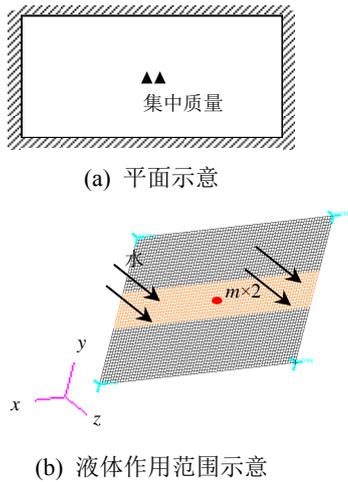


图 8 完全离散的拓扑图

Fig.8 The fully discrete topology

需要指出的是，过滤函数与磨光函数的选择并不局限于幂函数的形式，文献[5]也列举了3种不同形式的函数供选择，且指出高精度 ICM 方法的过滤函数与磨光函数可以不是严格的互为反函数的关系，因此通过过滤函数与磨光函数的分析与建立，改善图形离散技术的效率，也是下一步研究的重点。

算例 2: 基结构为 100 mm×150 mm，材料属性与算例 1 类似，有两个集中质量在结构的中心，如图 9(a) 所示，液体为水，其与结构的接触范围为 y 轴向 38 mm~62 mm 处，面积范围为 24 mm×150 mm，如图 9(b)所示。



(a) 平面示意

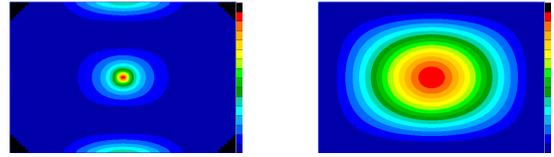
(b) 液体作用范围示意

图 9 基结构

Fig.9 Base structure

若无液体作用，结构的基频为 5921 Hz，其振型(特征向量)云图与应变能的分布如图 10 所示。设液体表面到结构的距离为 30 mm，应用本文的附加质量方法得到流固耦合结构作用下的基频为 3909 Hz，其振型(特征向量)云图与应变能的分布如图 11 所示。

对比图 10 与图 11，流体对结构的附加质量极大地改变了结构的基频与单元应变能，其各自的最优拓扑势必会有两种不同的形态，因此对于与液体有接触的板壳类结构优化，引入流固耦合条件是非常必要的。

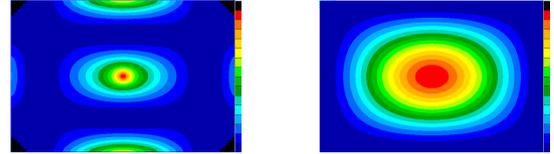


(a) 单元应变能分布

(b) 振型云图

图 10 无液体的频率分析

Fig.10 Frequency analysis with no liquid



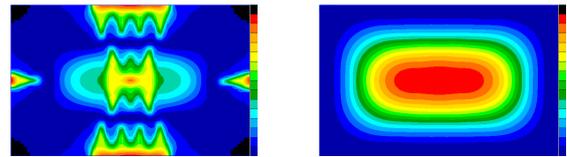
(a) 单元应变能分布

(b) 振型云图

图 11 流固耦合频率分析

Fig.11 Frequency analysis with FSI

设本算例频率的约束值为 2700 Hz，经拓扑优化分析，得到的最优频率为 2723 Hz，最优质量为 9127 g，优化后的应变能、振型云图与最优拓扑如图 12 所示。



(a) 单元应变能分布

(b) 振型云图

(c) 最优拓扑

图 12 最优拓扑结构

Fig.12 The optimal topology

本算例共迭代 230 步，提取 $\beta=1$ 收敛时 75 步迭代数据绘制迭代历程曲线图(如图 13~图 14 所示)。

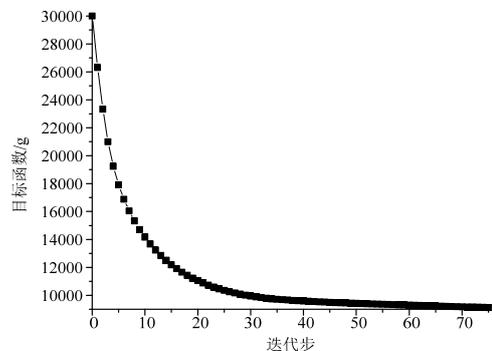


图 13 目标函数迭代曲线

Fig.13 Objective function iterative curve

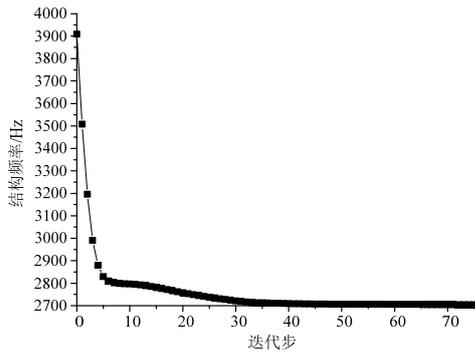


图 14 频率迭代曲线

Fig.14 Frequency iterative curve

由迭代的历程曲线可知,本算例在迭代过程中未产生目标函数或约束值的震荡,得到了有效的收敛。

6 结论

本文应用附加质量法求解了受到流固耦合影响的结构湿模态问题,基于 ICM 方法,建立了层合材料流固耦合频率约束拓扑优化优化模型,采用泰勒近似的方法,引入瑞利商对隐式约束方程进行了显式化处理,然后对拓扑优化模型进行了求解。此外,本文还对 ICM 方法图形离散技术做了改进。另一方面,利用 PCL 语言平台,开发了流固耦合下层合频率约束的拓扑优化软件模块,数值算例证明了本文程序平台的有效性与可行性。

参考文献:

[1] Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(1): 197-224.

[2] Mlejnek H P, Schirmacher R. An engineer's approach to optimal distribution and shape finding [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 106(1/2): 1-26.

[3] Xie Y M, Steven G P. *Evolutionary structural optimization* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997: 77-103.

[4] Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods [J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 163(2): 489-528.

[5] 隋允康, 叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法 [M]. 北京: 科学工业出版社, 2013: 133-196.
Sui Yunkang, Ye Hongling. *Continuum topology optimization methods ICM* [M]. Beijing: Science Press, 2013: 133-196. (in Chinese)

[6] Pedersen N L. Maximization of eigenvalues using topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2000, 20(1): 2-11.

[7] Jianbin D, Olhoff N. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2007, 34(2): 91-110.

[8] 杨振兴, 荣见华, 傅建林. 三维结构的频率拓扑优化设计 [J]. *振动与冲击*, 2006, 25(3): 44-47.
Yang Zhengxing, Rong Jianhua, Fu Jianlin. Frequency topology optimal design of three-dimensional structures [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(3): 44-47 (in Chinese).

[9] 薛开, 雷震兴, 王威远. 一种新的周长约束方法在阻尼频率拓扑优化中的应用 [J]. *工程力学*, 2013, 30(6): 275-280.
Xue Kai, Lei Huanxing, Wang Weiyuan. An application of a new perimeter constraint method in topology optimization for damped frequency [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(6): 275-280. (in Chinese)

[10] 叶红玲, 沈静娴, 隋允康. 频率约束的三维连续体结构动力拓扑优化设计 [J]. *力学学报*, 2012, 44(6): 1037-1045.
Ye Hongling, Shen Jingxian, Sui Yunkang. Dynamic to logical optimal design of three-dimensional continuum structures with frequencies constraints [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(6): 1037-1045. (in Chinese)

[11] 邱海, 隋允康, 叶红玲. 频率约束板结构拓扑优化 [J]. *固体力学学报*, 2012, 33(2): 189-198.
Qiu Hai, Sui Yunkang, Ye Hongling. Topological optimization of the plate structure subjected to the frequency constraints *Acta mechanica solida sinica*, 2012, 33(2): 189-198. (in Chinese)

[12] 侣晓辉, 卢文秀, 褚福磊. 带有边缘径向裂纹的固支圆板湿模态分析 [J]. *振动工程学报*, 2011, 24(6): 595-599.
Si Xiaohui, Lu Wenxiu, Chu Fulei. Wetmode analysis of completely clamped circular plate with a side radial crack [J]. *Journal of vibration engineering*, 2011, 24(6): 595-599. (in Chinese)

[13] Amabili M. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(2): 259-299.

[14] Zhou Ding, Liu Weiqing. Bending-torsion vibration of a partially submerged cylinder with an arbitrary cross-section [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2007, 31(10): 2249-2265.

[15] Sigmund O, Maute K. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2012, 46(4): 471-475.

[16] Guest J K, Prevost J H, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(2): 238-254.