中 山 大 学

二○一四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：622

科目名称：一元微积分

考试时间： 1 月 5 日 上 午

(一) 填空题(每小题 5 分, 共 35 分)请将答案写在答题纸上, 并表明题号。

(1) 已知$f(x)=\begin{cases} x^2+x+7,\ 0\le x\le 1 \\ sinx, 1<x\le 2 \end{cases}$, $f(x\text{-}2)$=( ).

(2) “$f(x)$在x_0点以A为极限” 的 $\varepsilon-\delta$ 定义为( ).

(3) 设$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x>0 \\ ax+b,\ x\le 0 \end{cases}$在$x=0$处可导，则$a=(\ ),b=(\ )$.

(4) 函数$f(x)=2x\text{-}\cos x$在区间（ ）单调增加.

(5) 已知$f'(e^x)=xe^{-x}$, 且$f(1)=0$, 则$f(x)=(\ )$.

(6) 方程$x^5+x+1=0$在区间（$-1,0$）内有（ ）个实根.

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}=(\ )$.

(二) 选择题(每题只有一个选择项正确，每小题 5 分，共 30 分) 请将答案写在答题纸上，并表明题号。

(1) 若数列$\{x_n\}$收敛a，则下列命题错误的是（ ）.

(A) $\forall\varepsilon>0$, 集合$\{n|x_n\notin(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\}$是有限集。

(B) 如果a的任意ε ($\varepsilon>0$)邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$都含有数列$\{x_n\}$的无限多个项;

(C) $\exists N\in N^+,\forall\varepsilon>0,\forall n>N$,有$|x_n-a|<\varepsilon$;

(D) $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+,\forall n\ge N$,有$|x_n-a|\le\varepsilon$.

(2) 若函数$f(x)=\begin{cases} |x|^n\sin\dfrac{1}{|x|^m}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ($m>0$)在条件（ ）下满足在原点邻域内存在有界导数。

(A) $n\ge 1+m$; （B）$1<n<1+m$; （C）$n<1+m$; （D）$n<1$.

(3) 下列命题叙述正确的是（　）。

(A) 可积函数 $f(x)$ 必存在原函数;

(B) 可积的单调函数没有无限多个不连续点;

(C) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处不存在切线;

(D) 导函数一定没有第一类间断点;

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$ 的值为（　）。

(A) 1;　　(B) $\dfrac{32}{9}$;　　(C) 0;　　(D) $\dfrac{112}{27}$.

(5) 设 $f(x)$ 有连续的导数，则 $\int f'(2x)dx=$（　）。

(A) $f(x)+C$,　(B) $f(2x)+C$,　(C) $\dfrac{1}{2}f(2x)+C$,　(D) $\dfrac{1}{2}f(x)+C$.

(6) 当 $x\to -1$ 时，与 $(2+x)^{\frac{1}{3}}-1$ 等价的无穷小量是（ ）。

(A) $\dfrac{\sin(x+1)}{3}$, (B) $\dfrac{x-1}{3}$, (C) $x+1$, (D) $\sin(x+1)$.

(三) 计算题(每小题 10 分, 共 40 分)请将答案写在答题纸上, 并表明题号。

(1) 计算 $\int \frac{1}{x^3}\ln x dx$.　　　　(2) 计算 $\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$.

(3) 求 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.　　(4) 计算 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

(四) 证明题 (前3小题各10分，第4小题15分，共45分)请将答案写在答题纸上，并标明题号。

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，求证：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内也单调增加.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 连续, 在开区间 $(1,2)$ 可导, 且 $f(2)=8f(1)$,
求证：在 $(1,2)$ 内必存在一点 ξ, 使得 $3f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微， $f(0)=f(1)=0$，且 $\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)=2$.证明存在
$\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\le -16$.

4. 证明： 函数 $f(x)$ 在有界区间 I 上一致连续的充要条件是当 $\{a_n\}$ 是 I 上的任何柯西列时，$\{f(a_n)\}$ 也是柯西列。