

文章编号: 1000-4750(2015)10-0025-06

各种平均应力下高周疲劳极限间的定量关系

蔡晓静, 许金泉

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

摘 要: 疲劳极限是材料工程应用中的一个重要特性参数, 但它并不是材料常数。在不同循环载荷作用下, 材料会有不同的疲劳极限值。疲劳极限值很大程度上依赖于循环载荷中的平均应力或最大应力幅值, 两者之间的关系是材料自身固有的特性关系。因为在接近疲劳极限的低循环应力幅下, S-N 曲线受疲劳极限控制, 所以在工程应用中对其定量关系有迫切的需求, 但现有的经典经验关系只能对其进行非常粗略的估算, 不能满足工程应用中有关寿命设计的需要。现状是只能通过大量的实验, 得出其实验关系。该文提出了一种函数形式的关系式, 该关系式可以足够精确地描述各种材料的疲劳极限和平均应力之间的关系, 且只包含三个材料常数。只要这三个材料疲劳特性常数被事先确定, 则任意疲劳载荷下的疲劳极限值, 都可由该关系式估计得到, 因此可以作为材料本身固有的疲劳强度的状态关系式使用。

关键词: 疲劳极限; 平均应力; S-N 曲线; 疲劳强度状态关系; 疲劳特性常数

中图分类号: O346.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.02.0128

A QUANTITATIVE RELATIONSHIP OF HIGH CYCLE FATIGUE LIMIT WITH MEAN STRESSES

CAI Xiao-jing, XU Jin-quan

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Fatigue limit is a very important property of engineering materials in applications, but it is not a constant of material in fact. It is well known that a fatigue limit is dependent on fatigue cyclic properties, especially on either mean stress or maximum stress amplitude. Since the S-N curve corresponding to low stress amplitudes is strongly influenced by a fatigue limit, the quantitative and intrinsic relationship of a fatigue limit with mean stress is necessary for the life design in engineering applications. However, the classical experience relationships generally can only give a very rough estimation, thusly special experiments are usually necessary to obtain experimental results to meet engineering needs. This paper proposes a functional relationship to describe the variation of a fatigue limit with mean stresses. It is found that this relationship can well express the fatigue limits under different mean stresses for various engineering materials, and contains only three material constants. When these three material constants have been pre-determined, the fatigue limit for any fatigue cyclic loadings can be determined quantitatively. This functional relationship is referred to as the state relationship of fatigue strength, which is an intrinsic relationship of material property.

Key words: fatigue limit; mean stress; S-N curve; state rule of fatigue strength; fatigue property

疲劳极限是工程应用中非常重要的一种材料特性, 但它是与平均应力或循环比相关的材料特性, 而不是简单的一个常数。材料疲劳强度特性,

是通过疲劳极限与平均应力之间关系式^[1-3]来体现的, 其中的常数才是材料常数。描述疲劳极限与平均应力关系的著名经验方法通常有 Goodman 的

收稿日期: 2014-02-25; 修改日期: 2014-10-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(10772116)

通讯作者: 许金泉(1963-), 男, 浙江人, 教授, 博士, 博导, 主要从事材料强度学方面的研究(E-mail: jqxu@sjtu.edu.cn).

作者简介: 蔡晓静(1988-), 男, 浙江人, 助理工程师, 硕士, 主要从事金属疲劳断裂研究(E-mail: 1100109090@sjtu.edu.cn).

线性关系、Gerber 的椭圆关系等,但这些在上世纪初就被提出的经验关系都只是非常粗略估算不同平均应力下的疲劳极限,与实际的疲劳强度会有很大的差别,已不能很好满足现代工程应用的需求。工程实际中往往只能通过大量的实验^[4-5],得到其实验关系曲线。既耗时耗力,也不便应用,且显得缺乏理论支撑。因此,如果能找出一种通用的函数形式,来表征各种材料疲劳极限与平均应力的关系,将是非常有用的。这样的关系,某种意义上类似于材料的非线性本构关系,是材料固有的特性关系式,我们称之为材料的疲劳强度状态关系。这样的定量关系,不仅对于计算特定循环特性下的疲劳极限是不可或缺的,它对计算材料的疲劳寿命,进一步建立疲劳理论,也是重要的理论基础之一^[6-7]。这是因为 S-N 曲线,尤其是应力幅较小而较接近疲劳极限的部分,对疲劳极限是很敏感的。因此,要从理论上描述 S-N 曲线,就必须先对疲劳极限进行可行的数学表征,误差很大的估算是不能使用的。另一方面,有了这样的关系式,我们就不再需要通过大量的试验去获得疲劳极限与平均应力的实验关系,而只需通过少量的实验,确定关系式中的材料常数即可。并且与单纯的实验关系相比,因这种关系式表示的是材料行为特性,因而具有更大的可扩展性(例如从单轴扩展到多轴问题等)。

1 关于疲劳极限

疲劳极限似乎已是一个众所周知的概念,但实际上这一概念还是有些模糊性的。对其通俗的理解是,当循环应力小于某一极限值后,疲劳寿命趋于无穷大,即不再有疲劳现象发生,该极限值就是疲劳极限。对于金属材料,实用中常以对应于 10^7 循环次数的循环应力幅,作为疲劳极限^[8]。近年来,关于金属材料到底有没有疲劳极限,产生了一些争论。这是因为超长寿命疲劳实验表明, 10^7 循环次数后,疲劳应力仍会有所下降的缘故^[9-10]。我们认为,疲劳极限实际上只是一个工程概念,因为任何材料,即使不受载荷作用,也会因“风化”、材料内部的热扰动运动等,而不可能具备真正无穷的寿命,只要寿命足够长,工程上就可以认为是无穷的。但是如果将疲劳极限认为是对应于足够长寿命的疲劳应力幅,并不能消除其模糊性,因为足够长本身就是模糊的,而且还可能产生更大的矛盾,例如,如果工程结构的寿命要求只是 10^4 循环,则 10^5 循环

就可认为是足够长了,但显然要称此时的疲劳应力幅为疲劳极限,也是不合适的。为此,我们提出一种对疲劳极限的新解释,即:在工程结构所关心的寿命内,将 S-N 曲线以某种统一的函数(光滑曲线)来表示时,当应力幅趋近于某一极限,则寿命趋于无穷,该极限就为材料的疲劳极限。本文以下出现的试验数据,都引自文献[11-12],材料热处理方式见表 1。图 1 表示了这种新解释的直观意义,这一解释与传统的理解有如下不同:1) 整条 S-N 曲线并不存在平坦直线部分,而只是一条趋近于疲劳极限的光滑曲线(弹性限内的 S-N 曲线必须是一条光滑曲线,任何折点都意味着疲劳机理的变化);2) 并不要求在寿命非常长时(例如 10^8 循环后),真正的疲劳寿命也与 S-N 曲线延伸部分一致,而只要求在工程结构所关心的寿命内(例如 10^7 或 10^8 循环内),S-N 曲线可以用带极限的光滑函数来进行描述即可;3) 为了较好地描述 10^7 循环附近的 S-N 曲线,对应于 10^7 循环数的疲劳应力,不一定可以作为疲劳应力。简单地说,在这种解释中,疲劳极限是特定条件下 S-N 曲线的光滑函数中的一个材料常数,是 S-N 曲线分布的极限,它是需要由 S-N 曲线的变化趋势来决定的,而不针对某一具体的循环数。但它必然是一种材料特性,因为 S-N 曲线本身表示的就是材料的疲劳特性。顺便指出,这一解释并不意味着在疲劳极限下的循环应力不会引发缓慢的损伤累积,也不意味疲劳极限以下的应力幅对应的是无限寿命,而只是认为此时的损伤累积足够慢乃至可以忽略,寿命足够长乃至在工程中可认为是无穷。另外,关于 S-N 曲线的具体函数形式,因超出本文范围,这里不作讨论。

表 1 材料热处理方式

Table 1 Heat treatment of materials

材料	热处理方式
LC9(美标 7075)	460℃ 淬火, 110℃ 保温 7 h, 160℃ 保温 27 h
LY12CZ(包铝, 美标 2024)	淬火自然时效
LY12CZ(新凤铝, 美标 2024)	淬火自然时效
GC-4 钢	920℃ 加热, 300℃ 硝盐槽中 等温 1 h, 空冷

图 2~图 3 表示了从试验数据决定各种循环特性下疲劳极限的方法。进行 S-N 曲线试验的方法有两种,即固定平均应力和固定循环比的方法。在由固定平均应力试验获得 S-N 曲线试验数据时,可直接根据 S-N 曲线决定对应于该平均应力的疲劳极限,

如图 2 所示, 其中图 2(b)的数据点为从文献[11-12]中的等寿命曲线中读取的值, 而非真实的试验数据。对于由固定循环比试验获得的 S-N 曲线试验数据, 在利用光滑曲线求得疲劳极限 σ_r 后, 需要经过换算才可以得到其所对应的平均应力。

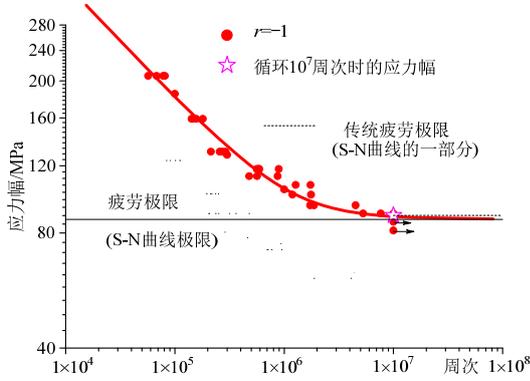
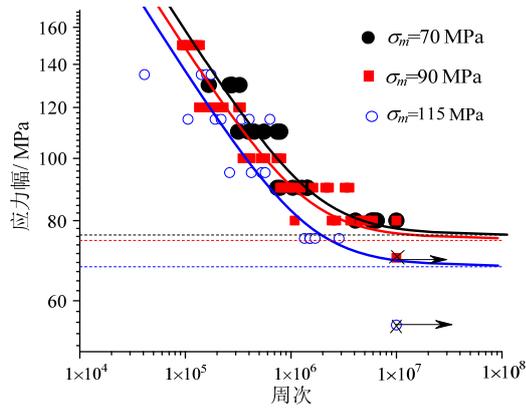
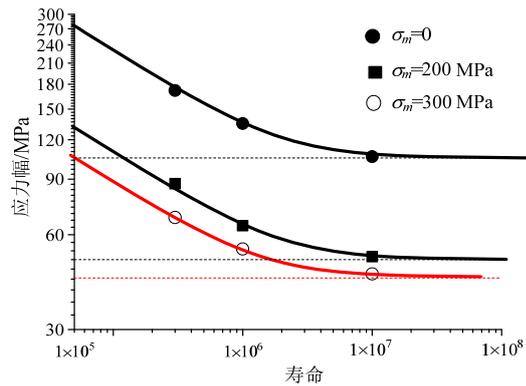


图 1 超硬铝合金 LC9 的疲劳极限和 S-N 曲线

Fig.1 Fatigue limit and S-N curve of LC9 aluminum alloy



(a) 试验数据和 S-N 曲线



(b) 由等寿命曲线得到的数据和曲线

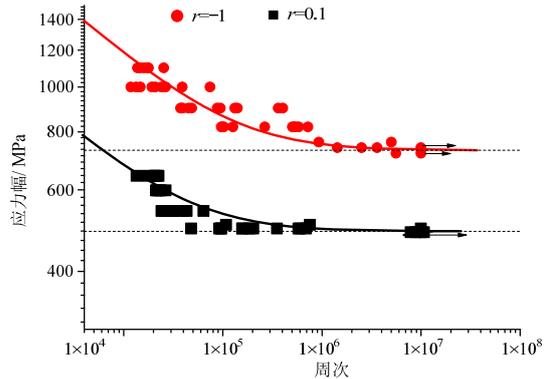
图 2 LY12CZ(包铝)在固定平均应力时 S-N 曲线

Fig.2 S-N curve with fixed mean stress of LY12CZ(Bao) aluminum alloy

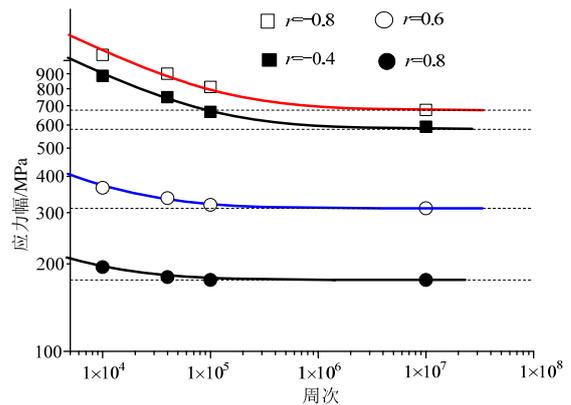
$$\sigma_m = \frac{1+r}{1-r} \sigma_r \quad (1)$$

其中, σ_r 为由循环比 r 的 S-N 曲线得到的疲劳极限。式(1)意味着, 在固定循环比(非对称循环)条件

下, 所测得疲劳极限, 其所对应的平均应力是唯一的, 但当应力幅 $\sigma_a > \sigma_r$ 时, 平均应力是随应力幅变化的。这意味着由固定循环比试验得到的 S-N 曲线上的各点, 其所对应的疲劳极限其实是不同的。在对 S-N 曲线进行统一的数学描述时, 这一特点必须考虑。试验中之所以也能用固定循环比的方式求取疲劳极限, 只是因为应力幅趋近疲劳极限时, 平均应力也趋于某一固定值的缘故。



(a) 试验数据和 S-N 曲线



(b) 由等寿命曲线得到的数据和曲线

图 3 GC-4 钢材在固定循环比时 S-N 曲线

Fig.3 S-N curve with fixed recycle ratio of GC-4 steel

顺便指出, 由固定循环比和固定平均应力所得到的 S-N 曲线是不同的, 这并不是说材料的疲劳特性因载荷形式而发生了变化, 只是同一种疲劳特性, 在不同载荷形式下的体现形式不同而已。这实际上反过来要求我们, 必须找出疲劳特性的本质性描述方法。疲劳极限作为重要的材料疲劳特性, 也必须找出其本质性描述方法。

2 各种平均应力下的疲劳极限(材料疲劳强度状态关系)

经过对多种试验数据的仔细考察, 我们发现以下函数形式可以很好地表示各种平均应力下的疲

劳极限，可以作为材料疲劳强度状态关系的一般表达式。

$$\sigma_f = \frac{S_m \sigma_{-1} - \sigma_m + \sqrt{\{S_m \sigma_{-1} - \sigma_m\}^2 + 4\eta S_m \sigma_{-1} \sigma_m}}{2} \quad (2)$$

其中， $S_m = 1 - (\sigma_m / \sigma_b)^\alpha$ ，这里 σ_{-1} 为对称循环(同时也是固定 $\sigma_m = 0$)时的疲劳极限， σ_b 为材料的拉伸极限， σ_f 为对应于平均应力 σ_m 的疲劳极限， η 、 α 为新引入的材料常数，为无量纲数。其中， η 支配平均应力较小时的疲劳极限的变化， α 则控制平均应力较大时的疲劳极限。图4~图7给出了几例式(2)和试验数据、经典经验关系的比较，其中，图4~图6的试验数据是由固定循环比的试验得到的，图7的试验数据是由固定平均应力的试验得到的，但其疲劳极限都可用式(2)来表示，而经典的经验关系则最多只能作初步的估算。另外，图6与图7的试验材料，虽然牌号相同，静强度性能也基本相同，但生产厂家和材料组分有所不同，其疲劳强度有很大的区别。这说明，疲劳性能是与材料的组分与微观结构密切相关的，静强度性能基本相同的材料，其疲劳性能可以有很大差别，也就是说，疲劳性能是一种独立的材料性能。

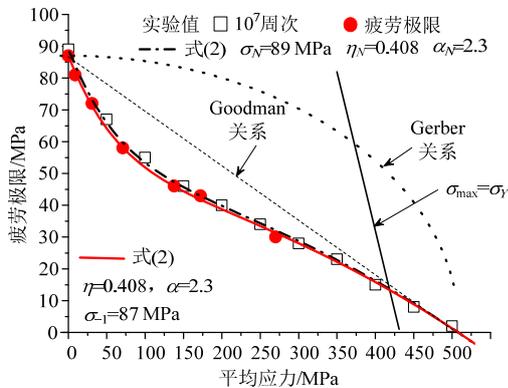


图4 LC9 疲劳极限与平均应力的关系
Fig.4 Relationship of fatigue limit with mean stress of LC9 aluminum alloy

非常有意思的是，式(2)不仅可以描述最大应力在弹性范围内的疲劳极限，而且对于最大应力超过屈服强度的场合，也能对其疲劳强度进行统一的表征。这是因为受平均应力的影响，虽然最大应力超过了材料原始的屈服强度，但最小应力却不能使材料反向屈服，考虑材料的硬化效应，除第一个循环外，材料的循环变形实际上仍是一个弹性变形过程的缘故，这与一般的应变疲劳是双向屈服的循环塑

性变形有本质的差别。由于式(2)可以足够精确地表示疲劳极限的变化规律，我们将其命名为疲劳强度规律。

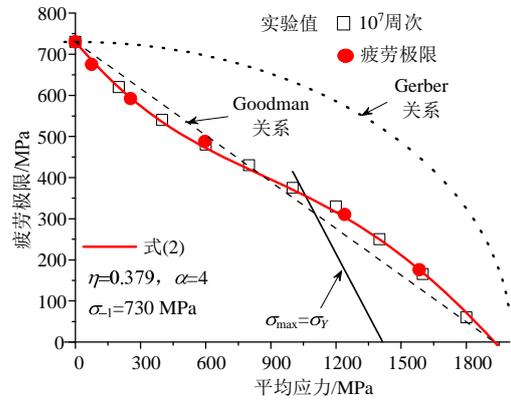


图5 GC-4 钢的疲劳极限与平均应力的关系
Fig.5 Relationship of fatigue limit with mean stress of GC-4 steel

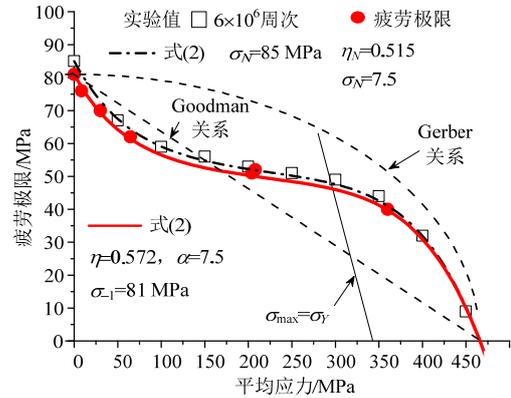


图6 LY12CZ(新风铝)的疲劳极限与平均应力的关系
Fig.6 Relationship of fatigue limit with mean stress of LY12CZ(Xinfeng) aluminum alloy

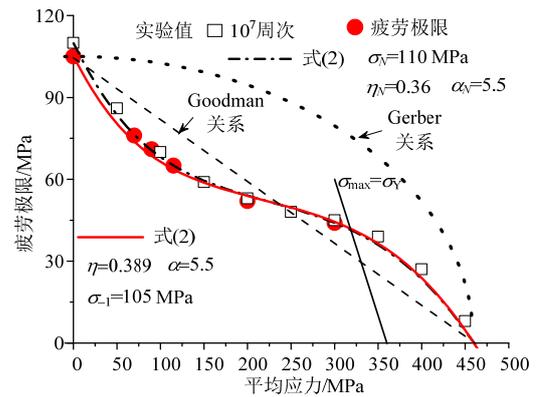


图7 LY12CZ(包铝)的疲劳极限与平均应力的关系
Fig.7 Relationship of fatigue limit with mean stress of LY12CZ(Bao) aluminum alloy

3 等寿命疲劳强度

对应于某一指定循环数的各种平均应力下的

应力幅,称为等寿命疲劳强度。在有限寿命设计中,这一概念有重要应用。现状是通过大量试验结果的插值拟合,来得到等寿命疲劳强度曲线^[13],该曲线尚没有任何经验性的数学表达式。

式(2)实际上也可用作有限寿命的等寿命疲劳强度曲线的数学表达式,只需将其中的 σ_{-1} 、 η 、 α 改为 σ_N 、 η_N 、 α_N 即可,即:

$$\sigma_{fN} = \frac{S_m \sigma_N - \sigma_m + \sqrt{\{S_m \sigma_N - \sigma_m\}^2 + 4\eta_N S_m \sigma_N \sigma_m}}{2} \quad (3)$$

其中: $S_m = 1 - (\sigma_m / \sigma_b)^{\alpha_N}$; σ_N 为对应于 N 个循环的对称疲劳应力幅; η_N 、 α_N 为对应与循环数 N 的常数(不同的 N 有不同的值), $N \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_N \rightarrow \sigma_{-1}$, $\eta_N \rightarrow \eta$, $\alpha_N \rightarrow \alpha$ 。图 4~图 7 中对应于 10^7 的疲劳强度曲线,实际上就是按式(3)求取的,只是因为 N 已相当大,所以 σ_N 、 η_N 、 α_N 的值已较接近于 σ_{-1} 、 η 、 α 而已。图 8 显示了超硬铝 LY12CZ(新风铝)的等寿命强度曲线,可知式(3)可较精确地描述等寿命曲线。

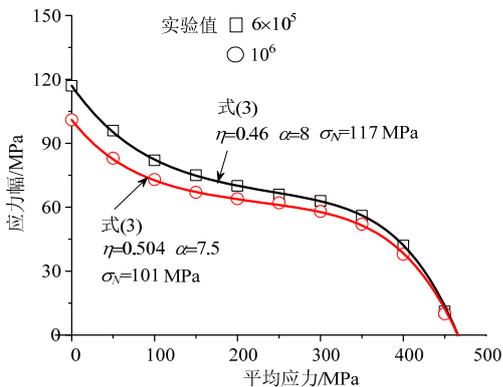


图 8 LY12CZ(新风铝)的等寿命强度曲线
Fig.8 Constant life curve of LY12CZ(Xinfeng) aluminum alloy

4 讨论

以上关于式(2)的检验,都是通过对试验数据的拟合得到 σ_{-1} 、 η 、 α 来进行的。这有可能引起误解:“即既然需大量的试验才能确定疲劳极限的关系,所以该式没有多大意义”。这种误解源于对检验过程和确定材料常数方法的混淆,在检验函数形式时,我们需要尽可能多的试验数据,但当函数形式被确定之后,我们只需要通过少量试验,来确定式(2)中的材料常数 σ_{-1} 、 η 、 α 即可。由于 σ_{-1} 是对称疲劳极限,所以关于对称疲劳极限的试验是必须的。 η 支配小平均应力时的疲劳极限,所以也需要

一例小平均应力的试验。当平均应力较小时, $S_m \approx 1$, 式(2)退化为:

$$\sigma_f = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_m + \sqrt{\{\sigma_{-1} - \sigma_m\}^2 + 4\eta\sigma_{-1}\sigma_m}}{2} \quad (4)$$

式(4)即可方便地确定 η 。由式(4)我们还可以得到 $0 < \eta < 1$ 的结论,因为如果 $\eta > 1$, 则 $\sigma_f > \sigma_{-1}$, 是不可能的,而如果 $\eta < 0$, 则 $\sigma_f < \sigma_{-1} - \sigma_m$, 疲劳极限随平均应力的下降过大,实际也不可能出现。 α 控制大平均应力时的疲劳极限,所以还需要一例大平均应力的试验,利用式(2)以及由式(4)决定的 η ,不难确定 α 的值,显然,必须有 $\alpha > 0$ 。理论上只需要有此三组试验结果,就可决定式(2)中的所有材料常数,也就可确定任意平均应力时的疲劳极限,并不需要通过大量数据去拟合得到 σ_{-1} 、 η 、 α 。至于在实际应用中如何用最少的试验数,去精确地决定材料常数,属于试验技巧,但该技巧的理论基础,恰恰就是以式(2)这样的函数形式为前提的,这也正是式(2)的意义所在。

另一个值得注意的问题是,在构筑如式(2)所示的疲劳极限的函数形式时,必须满足两个要求,一是必须与试验结果一致,二是所包含的待定系数(即材料常数)必须最少,以便用最少的试验决定之。众所周知的 Goodman 关系:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_b} = 1 \quad (5)$$

及 Gerber 关系:

$$\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b}\right)^2 = 1 \quad (6)$$

只需要对称疲劳极限一个参数,所需参数是最少的了,但它们只满足了第二个要求,由图 4~图 7 可知,显然不满足关键的第一个要求。从疲劳极限试验数据的分布特征来看,由于存在变凹点,只含三个参数的函数形式应该是最简洁的了,如只有两个参数,则难以描述凹凸有变化的曲线。如果单纯地对试验数据进行拟合来确定函数形式(多项式),一般要远多于三个参数,这说明了函数形式选择的重要性。

关于对应于各种不同寿命 N 的 σ_N 、 η_N 、 α_N , 粗看似乎也是一种材料的疲劳特性常数,但实际上它们并不是本质性的特性,而只是疲劳理论中的材料特性在特定寿命下的体现形式而已。但疲劳理论应是什么样的,其中包含几个材料疲劳特性常数,

需要另行研究。换句话说,要确定可以完整地描述材料疲劳特性的常数个数,最终还需要建立疲劳理论。

5 结论

本文提出了适合于各种平均应力的疲劳极限的一种函数表达式,该表达式可以足够精确地描述各种材料的疲劳极限,且只包含三个材料常数。这一关系式可以作为材料疲劳特性规律使用,只要其中的三个材料常数得以确定,就可以方便地求得任意循环特性下的疲劳极限,甚至包括最大应力超过材料屈服强度的情况。

参考文献:

- [1] Adam Nieslony, Michal Bohm. Mean stress effect correction using constant stress ratio S-N curves [J]. *International Journal of Fatigue*, 2013, 52(7): 49-56.
- [2] Yoshiyuki Furuya, Takayuki Abe. Effect of mean stress on fatigue properties of 1800 MPa-class spring steels [J]. *Materials and Design*, 2011, 32(3): 1101-1107.
- [3] Kovacs S, Beck T, Singheiser L. Influence of mean stresses on fatigue life and damage of a turbine blade steel in the VHCF-regime [J]. *International Journal of Fatigue*, 2013, 49(4): 90-99.
- [4] Zheng Xiulin, Wei Jianfeng. On the prediction of P-S-N curves of 45 steel notched elements and probability distribution of fatigue life under variable amplitude loading from tensile properties [J]. *International Journal of Fatigue*, 2005, 27(6): 601-609.
- [5] Shigeo Shimizu, Katsuji Toshi, Kazuo Tsuchiya. New data analysis of probabilistic stress-life (P-S-N) curve and its application for structural materials [J]. *International Journal of Fatigue*, 2010, 32(3): 565-575.
- [6] 何朝明, 赵永翔, 杨冰, 高庆, 鄂平波. LZ50 车轴钢随机 S-N 关系的概率模型[J]. *工程力学*, 2005, 22(2): 200-205.
He Chaoming, Zhao Yongxiang, Yang Bing, Gao Qing, Wu Pingbo. Probabilistic models for the random fatigue S-N relations of LZ50 axle steel [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(2): 200-205. (in Chinese)
- [7] 彭玉灵, 赵永翔, 胡海斌. ZG230-450 铸钢的重构疲劳可靠性 S-N 曲线[J]. *工程力学*, 2007, 24(10): 46-50.
Peng Yuling, Zhao Yongxiang, Hu Haibin. Reconstructed fatigue reliability S-N curves of ZG230-450 cast steel [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(10): 46-50. (in Chinese)
- [8] 许金泉. 材料强度学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2009: 197.
Xu Jinquan. *Theory on the strength of materials* [M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2009: 197. (in Chinese).
- [9] Zhao Y X, Yang B, Feng M F, Wang H. Probabilistic fatigue S-N curves including the super long life regime of a railway axle steel [J]. *International Journal of Fatigue*, 2009, 31(10): 1550-1558.
- [10] Liu Y B, Li Y D, Li S X, Yang Z G, Chen S M, Hui W J, Weng Y Q. Prediction of the S-N curves of high-strength steels in the very high cycle fatigue regime [J]. *International Journal of Fatigue*, 2010, 32(8): 1351-1357.
- [11] 高镇同. 航空金属材料疲劳性能手册[M]. 北京: 北京航空材料研究所, 1981: 97-142.
Gao Zhentong. *A handbook on fatigue properties of aeronautical material* [M]. Beijing: Beijing Material Research Institute, 1981: 97-142. (in Chinese)
- [12] 高镇同, 蒋新桐, 熊峻江. 疲劳性能试验设计和数据处理[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999: 42-74.
Gao Zhentong, Jiang Xintong, Xiong Junjiang. *Data processing and test design of fatigue properties* [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1999: 42-74. (in Chinese)
- [13] 熊峻江, 武哲, 高镇同. 广义疲劳等寿命曲线与二维疲劳极限概率分布[J]. *应用数学和力学*, 2002, 23(10): 1055-1060.
Xiong Junjiang, Wu Zhe, Gao Zhentong. Generalized fatigue constant life curve and two-dimensional probability distribution of fatigue limit [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(10): 1055-1060. (in Chinese)