

文章编号: 1000-4750(2015)10-0138-07

# 考虑剪切变形时薄壁箱梁的挠曲分析

周茂定<sup>1,2</sup>, 李丽园<sup>1</sup>, 张元海<sup>1</sup>

(1. 兰州交通大学土木工程学院, 兰州 730070; 2. 安徽省交通规划设计研究总院股份有限公司, 合肥 230088)

**摘 要:** 为分析剪切效应对薄壁箱梁受力特性的影响, 利用微板的面内剪切及平衡微分方程, 分别推导出不考虑和考虑薄壁箱梁各板面内剪切效应的弯曲位移函数。选取剪切效应引起的附加挠度作为广义位移, 通过定义的剪切广义力矩及剪切翘曲位移函数, 将剪切变形状态从全梁挠曲变形状态中分离出来, 作为独立的变形状态进行分析。为满足全截面翘曲应力的自平衡条件, 引入两个截面特性参数对广义剪切翘曲位移函数进行了修正。数值算例表明, 按该文推导的薄壁箱梁剪切弯曲位移函数计算的两跨连续梁跨中截面应力与实测值及有限元值吻合良好。挠度计算表明: 剪切效应使得该箱梁在集中和均布荷载作用下跨中挠度分别增大 27% 和 24%。

**关键词:** 桥梁工程; 薄壁箱梁; 初参数法; 弯曲位移; 附加挠度; 翘曲位移函数

中图分类号: TU311.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.04.0266

## FLEXURAL ANALYSIS OF THIN-WALLED BOX GIRDERS WITH SHEAR DEFORMATION

ZHOU Mao-ding<sup>1,2</sup>, LI Li-yuan<sup>1</sup>, ZHANG Yuan-hai<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Anhui Transport Consulting &amp; Design Institute Co., Ltd, Hefei, 230088, China)

**Abstract:** In order to analyze the influence of shear effect on mechanical characteristics of thin-walled box girders, the paper uses the shear equilibrium differential equation of microplate to derive the bending displacement function for thin-walled box girders, which accounts for the in-plane shear effect of girder plates. The additional deflection induced by shear effect is adopted as the generalized displacement of a thin-walled box girder. By defining the generalized moment and warping displacement function, the shear deformation state is separated from the whole flexural deformation state and treated as a fundamental deformation state. Considering the self-equilibrium of shear warping stress, the paper introduces two sectional characteristic parameters in the generalized warping displacement function. The numerical example of a two-span continuous box girder shows that the stresses at the mid-span cross section calculated by applying the shearing and bending displacement function are in a good agreement with test results and those by finite element method. The shear effect increases the mid-span deflection of the box girder under concentrated and uniformly distributed loads by 27% and 24%, respectively.

**Key words:** bridge engineering; thin-walled box girder; initial parameter method; bending displacement; additional deflection; warping displacement function

在现代桥梁建设中, 薄壁箱梁有着重要的应用, 对其弯曲力学性能研究的文献已有很多<sup>[1-3]</sup>。研究

表明: 薄壁箱梁在弯曲荷载下, 上、下翼板的剪切效应会使截面有较大的翘曲应力, 称之为剪力滞效

收稿日期: 2014-04-01; 修改日期: 2015-01-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(51468032, 51268029, 51068018)

通讯作者: 张元海(1965—), 男, 甘肃武山人, 教授, 博士, 博导, 主要从事薄壁箱梁与特殊桥梁设计理论研究(E-mail: zyh17012@163.com).

作者简介: 周茂定(1987—), 男, 陕西渭南人, 博士生, 主要从事薄壁箱梁与特殊桥梁设计理论研究(E-mail: 124355968@qq.com);

李丽园(1987—), 女, 山东兖州人, 博士生, 主要从事薄壁箱梁与特殊桥梁设计理论研究(E-mail: 372162887@qq.com).

应。Reissner 首先引入能量变分法求解无悬臂板矩形薄壁箱梁的剪力滞效应<sup>[4]</sup>，后被各学者推广至带悬臂板的一般箱梁。对于剪力滞翘曲位移函数的形式，不同学者的假设也各不相同，有抛物线<sup>[4-6]</sup>、余弦函数<sup>[2]</sup>及悬链线<sup>[7]</sup>等多种形式。对于不同宽度翼缘板的剪力滞翘曲位移函数的修正方式，各学者也是观点各异<sup>[2,8-9]</sup>。对于薄壁箱梁腹板，许多文献仍采用平截面假定研究，而不考虑其剪切效应。有少量文献采用给予腹板有一均匀的剪切转角的方式来考虑腹板的剪切效应<sup>[10-11]</sup>，但这种假设方式却不能明确腹板纵向位移模式。

显然，已有文献中将薄壁箱梁腹板和翼板的面内剪切变形分别提出不同的概念来分析，不便于理解。在弯曲荷载下，对于薄壁箱梁各板的纵向位移模式仍采取人为假定方法，缺乏理论依据。本文将在已有文献的基础上，通过对薄壁箱梁微元的分析，推导出系统考虑薄壁箱梁各板面内剪切变形的弯曲纵向位移函数。通过算例及 ANSYS 有限元对比分析，得出按此位移函数计算的应力和挠度的计算精度均有提高。

### 1 不考虑面内剪切效应的位移函数

图 1 为薄壁箱梁在任意竖向分布荷载  $p(z)$  作用下的受力简图，图中采用正交笛卡尔坐标系，坐标原点  $O$  位于截面形心处。

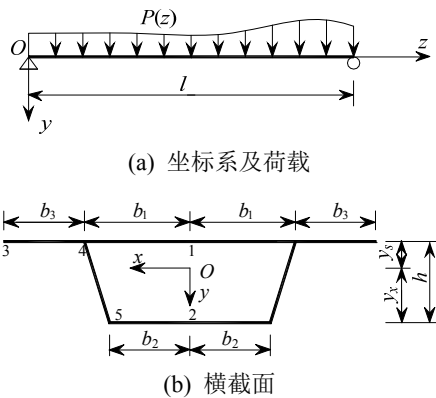


图 1 梯形截面箱梁示意图  
Fig.1 Box girder with trapezoidal cross section

对如图 1 所示的薄壁箱梁截面，在纯弯荷载下，1 点、2 点、3 点处的剪应变  $\gamma$  必然为零，且对图 2 所示的组成箱梁的各块板元有如下微分关系<sup>[1,3,12]</sup>：

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t = 0 \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

式中： $q$  为各板面内剪力流； $\sigma_z$  为纵向正应力； $s$  为沿梁周边的横向坐标； $t$  为板厚； $\gamma$  为各板的面内剪应变； $u$  为纵向位移； $v$  为横向位移。

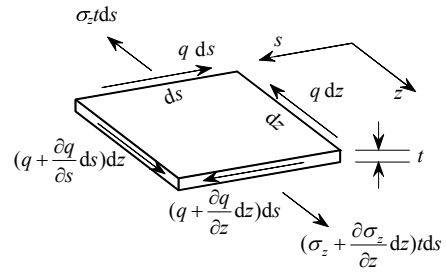


图 2 薄壁单元中剪力流  
Fig.2 Shear flow of thin-walled element

若不考虑各板面内剪切效应(即  $\gamma = 0$ )时，则式(2)变为：

$$\frac{\partial u}{\partial s} = - \frac{\partial v}{\partial z}$$

两边对  $s$  积分后可得：

$$u(s, z) = - \frac{\partial v}{\partial z} s + u_i(z) \quad (3)$$

式中， $u_i(z)$  表示沿  $s$  积分起点  $i$  处纵向位移。

对于薄壁箱梁的上翼板(顶板和悬臂板)、下翼板(底板)，沿周线横向位移  $v(z)$  很小可忽略<sup>[1,13]</sup>，则式(3)等号右边第一项即为零，因而上(下)翼板沿周线的纵向位移均相同；通常忽略薄壁箱梁截面沿周边的挤压变形，对于箱梁的腹板因不考虑挤压变形，则同一截面沿周线位移  $v(z)$  为定值，若令：

$$w'(z) = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$w(z)$  为箱梁竖向位移，由式(3)可知，腹板沿周线的纵向位移  $u(s, z)$  为  $w'(z)$  的一次函数，此时薄壁箱梁的纵向位移函数为：

$$u(x, y, z) = \begin{cases} y_s w'(z) & , \text{顶板} \\ y_s w'(z) & , \text{悬臂板} \\ -y_x w'(z) & , \text{底板} \\ -y w'(z) & , \text{腹板} \end{cases} \quad (4)$$

观察式(4)便可知，其与初等梁理论下的纵向位移函数相同，因而我们认为，当不考虑薄壁箱梁各板的面内剪切变形的弯曲位移函数即为初等梁的弯曲位移函数。

### 2 考虑面内剪切效应的位移函数

将上述初等梁理论下的弯曲位移函数所求的薄壁箱梁的弯曲正应力表达式代入式(1)，并结合弯矩

与剪力的关系以及薄壁箱梁的弯曲理论<sup>[3,12]</sup>可得图 1 所示截面弯曲剪力流的一般计算公式为:

$$q(s) = q_0(s) - \oint \frac{q_0(s)}{t} ds / \oint \frac{1}{t} ds \quad (5)$$

式中,  $q_0(s)$ 为相应开口截面剪力流。若将图 1 截面的开口选在顶板中心 1 点处时, 式(5)等号右边第 2 项为 0, 可得其剪力流计算式如下(逆时针为正):

$$q(s) = -\frac{Q(z)}{I_x} \int y_t ds \quad (6)$$

式中,  $Q(z)$ 为剪力, 按式(6)计算的剪力流分布模式如图 3 所示。

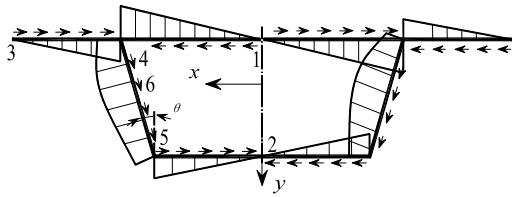


图 3 弯曲剪力流分布

Fig.3 Bending shear flow distribution

若以顶板为例进行分析, 其弯曲剪力流为:

$$q(s) = \frac{Q(z)}{I_x} y_s t s \quad (7)$$

仍忽略顶板沿周线的位移  $v(z)$ , 由式(2)可得:

$$\gamma \approx \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{q(s)}{Gt} = \frac{Q(z)y_s}{I_x} s \quad (8)$$

式中,  $G$  为剪切弹性模量。式(8)两边关于  $s$  积分后 可得:

$$u(s, z) = \frac{Q(z)y_s}{2GI_x} s^2 + u_1(z) \quad (9)$$

式中,  $u_1(z)$ 为顶板中心( $s$  坐标起始点)的纵向位移。由式(9)可得, 箱梁顶板与腹板交界处 4 点的纵向位移为:

$$u_4(z) = \frac{Q(z)y_s}{2GI_x} b_1^2 + u_1(z) \quad (10)$$

若令:

$$f_1(z) = u_4(z) - u_1(z) = \frac{Q(z)y_s}{2GI_x} b_1^2$$

并采用  $x$  坐标表示顶板任一点横向位置, 式(10) 可化为:

$$u(x, z) = u_4(z) - \left(1 - \frac{x^2}{b_1^2}\right) f_1(z) \quad (11)$$

同样, 对底板积分起点取截面左右对称中心点

2 处, 对悬臂板积分起点取悬臂边缘 3 点处, 可得 底板和悬臂板的纵向位移分别为:

$$u(x, z) = u_5(z) - \left(1 - \frac{x^2}{b_2^2}\right) f_2(z) \quad (12)$$

$$u(x, z) = u_4(z) - \left[1 - \frac{(b_1 + b_3 - x)^2}{b_3^2}\right] f_3(z) \quad (13)$$

式中:  $f_2(z) = -\frac{Q(z)y_x}{2GI_x} b_2^2$ ;  $f_3(z) = \frac{Q(z)y_s}{2GI_x} b_3^2$ 。

此时薄壁箱梁截面的各翼板的纵向位移可用  $u_4(z)$ 和  $u_5(z)$ 表示。

薄壁箱梁腹板剪力流分布为二次函数, 若设点 6( $x$  轴与腹板交点)处剪力流大小为  $q_6(z)$ , 则腹板任意一点剪力流为:

$$q(y, z) = q_6(z) - \frac{Q(z)}{2I_x \cos \theta} y^2 t \quad (14)$$

式中,  $\theta$  为腹板中线与  $y$  轴的夹角, 而 6 点剪力为:

$$q_6(z) = \frac{Q(z)}{I_x} y_s A_t + \frac{Q(z)}{2I_x} y_s A_s \quad (15)$$

式中,  $A_t$ ,  $A_s$  分别表示半上翼板的面积和  $x$  轴以上 一个腹板面积。

由式(14)及式(4)可得:

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{q(z)}{Gt} = \frac{q_6(z)}{Gt} - \frac{Q(z)}{2GI_x \cos \theta} y^2 \quad (16)$$

仍假设腹板纤维无横向挤压, 则同一断面的腹板竖 向位移相同, 即  $\varphi(z) = \partial v / \partial z$ , 同样将式(16)关于  $s$  积分并转换坐标轴化简后可得:

$$u(y, z) = -\frac{\varphi(z)}{\cos \theta} y + \frac{q_6(z)}{Gt \cos \theta} y - \frac{Q(z)}{6GI_x \cos^2 \theta} y^3 + u_6(z) \quad (17)$$

式(17)可表示箱梁截面腹板任意一点纵向位移 函数。于是  $u_4(z)$ 和  $u_5(z)$ 的位移必然可由  $u_6(z)$ 表示, 结合式(11)~式(13), 可求得由  $u_6(z)$ 表示的箱梁全截 面的纵向位移。若令:

$$f'(z) = \frac{Q(z)}{2GI_x} b_1^2; \quad w'(z) = \frac{\varphi(z)}{\cos \theta}。$$

此时箱梁截面的各板元纵向位移可统一表示为:

$$u(x, y, z) = -y[w'(z) + \alpha_1 f'(z)] - \alpha_2 f'(z) y^3 + \omega_\zeta(x, y) f'(z) + u_6(z) - yw'(z) - \omega(x, y) f'(z) + u_6(z) \quad (18)$$

式中:  $\alpha_1 = -\frac{y_s(2A_t + A_s)}{t_4 b_1^2 \cos \theta}$ ;  $\alpha_2 = \frac{1}{3(b_1 \cos \theta)^2}$ ;

$$\omega_{\zeta}(x,y) = \begin{cases} -y_s \left[ 1 - \left( \frac{x}{b_1} \right)^2 \right], & \text{顶板} \\ -y_s \left[ 1 - \left( \frac{b_1 + b_3 - x}{b_3} \right)^2 \right] \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^2, & \text{悬臂板} \\ y_x \left[ 1 - \left( \frac{x}{b_2} \right)^2 \right] \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2, & \text{底板} \end{cases} \quad (19)$$

$$\omega(x,y) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^3 - \omega_{\zeta}(x,y) \quad (20)$$

式中,  $t_4$  为腹板厚。

对比式(18)与式(4)可知,式(18)第 2 个等号右端第 1 项即为式(4)所表示的不考虑截面各板面内剪切效应的弯曲函数,而后面两项则为考虑剪切变形引起的翘曲位移函数。现定义  $w(z)$  为相应不考虑各板剪切效应的初等梁挠度,  $f(z)$  为各板剪切效应引起的附加挠度,  $\omega(x,y)$  相应于附加挠曲转角  $-f'(z)$  的剪切广义翘曲位移函数。

若求得式(18)中 6 点处的纵向位移便可得考虑箱梁剪切效应的完整弯曲位移函数。由胡克定律知箱梁截面上任一点的正应力  $\sigma(x,y,z)$  可表示为:

$$\sigma(x,y,z) = E \frac{\partial u}{\partial z} = -Eyw''(z) - E\omega(x,y)f''(z) + Eu'_6(z) \quad (21)$$

显然,式(21)右端第 1 项为初等梁的弯曲应力,第 2、3 项则为剪切翘曲应力  $\sigma_{\omega}$ 。对于箱梁截面上的弯矩只有相应初等梁弯曲应力合成,而剪切翘曲应力  $\sigma_{\omega}$  在箱梁横截面上应满足自平衡条件( $\sigma_{\omega}$  应不合成轴力和弯矩),即:

$$\int_A \sigma_{\omega} dA = 0 \quad (22)$$

$$\int_A \sigma_{\omega} y dA = 0 \quad (23)$$

将式(21)右端后两项代入式(22),并结合式(20)可得

$$u'_6(z)A = \alpha_1 f''(z) \int_A y dA + \alpha_2 f''(z) \int_A y^3 dA - f''(z) \int_A \omega_{\zeta}(x,y) dA \quad (24)$$

由截面对称性可知,式(24)右端第 1、2 项为 0,若令第 3 项积分后的结果为  $D \times f''(z)$ , 其中:

$$D = \frac{2}{3} \left[ y_s A_d + y_s A_c \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^2 - y_x A_b \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \right] \quad (25)$$

式中,  $A_d$ 、 $A_c$ 、 $A_b$ 、 $A$  分别为箱梁顶板、两侧悬臂板、底板和箱梁全截面面积,则由式(24)可得:

$$u_6(z) = \frac{D}{A} f'(z) + C = d \times f'(z) + C \quad (26)$$

箱梁截面不会有全截面的刚性位移,即式(26)中的  $C$  为 0。将式(26)代入式(18)后可知,对于剪切翘曲位移函数中的  $\omega_{\zeta}(x,y)$  会增加全截面的附加项  $d$ 。

同样将式(21)代入式(23)并结合式(20)可得:

$$f'' \int_A \omega(x,y) y dA = (\alpha_1 I_x + \alpha_2 \int_A y^4 dA - \int_A y \omega_{\zeta} dA) f'' = (\alpha_1 I_x + \alpha_2 I_4 - I_{1\zeta}) f'' \quad (27)$$

显然式(27)括号内各项和不为 0,因而还需给  $\omega_{\zeta}(x,y)$  乘以修正系数  $\eta$  使式(27)为 0,则  $\omega(x,y)$  表达式为:

$$\omega(x,y) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^3 - \eta \omega_{\zeta}(x,y) \quad (28)$$

$$\text{式中, } \eta = \frac{\alpha_1 I_x + \alpha_2 I_4}{I_{1\zeta}}.$$

至此,便推导出考虑薄壁箱梁全截面各板面内剪切效应的弯曲位移函数。

### 3 控制微分方程的建立及其求解

定义与剪切翘曲应力  $\sigma_{\omega}$  相对应的广义力矩  $M_{\omega}$  如下:

$$M_{\omega} = \int_A \sigma_{\omega} \omega dA \quad (29)$$

由式(28)及式(29)可得:

$$M_{\omega} = -EI_{\omega} f'' \quad (30)$$

式中:  $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$ ,  $I_{\omega}$  可称为剪切广义翘曲惯性矩。

于是,在考虑箱梁全截面各板的面内剪切效应后的总的正应力为初等梁弯曲应力与剪切翘曲应力之和,即:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y + \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \omega \quad (31)$$

对图 1 所示受任意竖向分布荷载  $p(z)$  作用的薄壁箱梁,其总势能可表达如下:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_l \int_A \left( \frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dA dz - \int_0^l p(z) [w(z) + f(z)] dz = \\ & \frac{1}{2} \int_0^l [EI_x w''^2 + EI_{\omega} f''^2 + G(A_x + A_y) f'^2] dz - \\ & \int_0^l p(w + f) dz \end{aligned} \quad (32)$$

式中:  $A_x = \int_A \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dA$ ;  $A_y = \int_A \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 dA$ , 显然

$A_x$  及  $A_y$  均为相应截面的特征参数。

对总势能表达式(32)进行一阶变分运算,可得:

$$\delta \Pi = \int_0^l (EI_x w''' - p) \delta w dz + \int_0^l [EI_{\omega} f''' -$$

$$\begin{aligned}
 &G(A_x + A_y)f'' - p] \delta f dz + EI_x w'' \delta w' \Big|_0^l - \\
 &EI_x w''' \delta w \Big|_0^l + EI_\omega f'' \delta f' \Big|_0^l + \\
 &[G(A_x + A_y)f' - EI_\omega f'''] \delta f \Big|_0^l \quad (33)
 \end{aligned}$$

根据最小势能原理，总势能的一阶变分应为 0，即  $\delta \Pi = 0$ ，则由式(33)可得控制微分方程如下：

$$EI_x w'''' - p = 0 \quad (34)$$

$$EI_\omega f'''' - G(A_x + A_y)f'' - p = 0 \quad (35)$$

式(34)即为熟知的初等梁挠曲微分方程，而式(35)则为剪切控制微分方程，两个微分方程均只含一个位移。由式(35)解出附加挠度  $f$  后，即可由式(30)计算广义力矩  $M_\omega$ ，并由式(31)求得考虑箱梁截面各板剪切效应的翘曲正应力。由上可知，剪切翘曲应力的求解完全独立于初等梁理论。

剪切控制微分方程式(35)可化为：

$$f'''' - k^2 f'' = \frac{P}{EI_\omega} \quad (36)$$

式中： $k$  可称为剪切参数，即：

$$k = \sqrt{\frac{G(A_x + A_y)}{EI_\omega}} \quad (37)$$

求解微分方程式(36)时的边界条件为：

对于固定端： $f = 0, f' = 0$ ；

对于简支端： $f = 0, f'' = 0$ ；

对于自由端： $f'' = 0, f''' - k^2 f' = 0$ 。

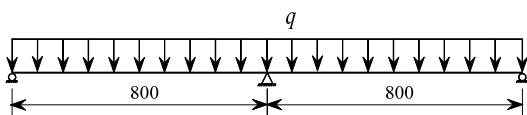
与微分方程式(36)相应的其次方程的通解为：

$$f = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \quad (38)$$

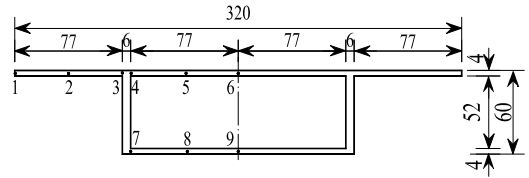
根据相应边界条件，必然可求得式(38)中的参数  $C_i (i=1\sim 4)$ ，解出  $C_i$  后回代入式(38)，并根据箱梁跨内荷载情况，可求得式(36)的特解，便可求得剪切附加挠度  $f$  的表达式。于是可由式(30)、式(31)可求得相应广义力矩及截面各点总的正应力。关于此部分求解文献[14]有较为详细叙述，在此不再赘述。

### 4 数值算例

有机玻璃制作的两跨连续箱梁模型简图如图 4 所示<sup>[11,14]</sup>。按两种方式加载：在各跨中截面梁顶腹板位置作用对称集中荷载  $P=20\text{ N}$ ；全梁受均布荷载  $q=0.2\text{ kN/m}$ 。材料弹性模量为  $2.8\text{ GPa}$ ，泊松比为  $0.37$ 。



(a) 跨度及荷载



(b) 横截面尺寸及计算点号

图 4 两跨连续箱梁模型 /mm

Fig.4 Two-span continuous box girder model

按本文方法计算剪切附加挠度和截面各点应力时，需现求出箱梁截面的剪切翘曲几何参数及剪切参数  $k$  等，然后计算广义力矩  $M_\omega$ ，最后便可由式(31)求出截面各点正应力。本文所定义的剪切翘曲几何参数表达式如下：

$$\begin{aligned}
 A_x = \frac{4}{3} \eta^2 \left[ A_d \left( \frac{y_s}{b_1} \right)^2 + A_c \left( \frac{y_s}{b_3} \right)^2 \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^4 + \right. \\
 \left. A_b \left( \frac{y_x}{b_2} \right)^2 \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^4 \right] \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_n = \int_A y^n dA = y_s^n (A_d + A_c) + y_x^n A_b + \\
 \frac{t_4 (y_s^{n+1} + y_x^{n+1})}{(n+1) \cos \theta}, \quad n = 4, 6 \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$A_y = A \alpha_1^2 + 9 \alpha_2^2 I_4 + 6 \alpha_1 \alpha_2 I_x \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 I_\zeta = \int_A \omega_\zeta(x, y)^2 dA = \\
 A d^2 + A_d y_s \left[ \frac{8}{15} y_s - \frac{4}{3} d \right] + \\
 A_c y_s \left[ \frac{8}{15} y_s \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^2 - \frac{4}{3} d \right] \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^2 + \\
 A_b y_x \left[ \frac{8}{15} y_x \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 + \frac{4}{3} d \right] \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{n\zeta} = \int_A y^n \omega_\zeta(x, y) dA = \\
 \frac{2}{3} y_s^{n+1} \left[ A_d + A_c \left( \frac{b_3}{b_1} \right)^2 + \right. \\
 \left. A_b \left( \frac{b_2}{b_1} \right)^2 \left( \frac{y_x}{y_s} \right)^{n+1} \right], \quad n = 1, 3 \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_\omega = I_x \alpha_1^2 + \alpha_2^2 I_6 + \eta^2 I_\zeta + 2(\alpha_1 \alpha_2 I_4 - \\
 \eta \alpha_1 I_{1\zeta} - \eta \alpha_2 I_{3\zeta}) \quad (44)
 \end{aligned}$$

按照本文建立的考虑剪切效应的薄壁箱梁弯曲翘曲位移函数求得跨中截面顶板与腹板交接处的应力(最大应力)计算值连同文献[11]中给出的计算值及实测值一并列于表 1 中，以便比较。

表 1 两跨连续箱梁跨中截面顶板最大应力 /MPa

Table 1 Maximum stresses of top plate at mid-span cross section of the two-span continuous box girder

荷载类型	本文计算值	计算值 <sup>[11]</sup>	ANSYS	实测值
均布荷载	-0.11971	-0.12286	-0.12210	-0.12073
集中荷载	-0.05495	-0.04951	-0.05183	-0.05095

由表 1 可以看出, 本文计算值与文献[11]提供计算值和实测值吻合良好。为进一步验证本文推得的翘曲位移函数正确性, 用本文方法对均布荷载作用时跨中截面翼缘板不同位置处应力进行计算, 计算点编号如图 4(b)所示。将本文计算值及文献[11]提供值列于表 2。

表 2 两跨连续箱梁跨中截面应力对比 /MPa

Table 2 Comparison of stresses at mid-span cross section of the two-span continuous box girder

测点	本文计算值	文献[11]计算值	ANSYS 计算值
1	-0.10448	-0.10408	-0.09300
2	-0.10801	-0.10643	-0.10336
3	-0.11971	-0.12286	-0.12210
4	-0.11971	-0.12286	-0.12153
5	-0.10801	-0.10643	-0.10934
6	-0.10448	-0.10408	-0.10539
7	0.19212	0.21828	0.20332
8	0.17303	0.18884	0.17817
9	0.16727	0.18463	0.17153

由表 2 可以得出, 按本文推导的弯曲翘曲位移函数计算值与文献[11]给出的计算值及 ANSYS 计算值吻合良好。由于本文所假定面内剪切效应研究时假定箱梁各板沿横向位移应变为零, 因而个别点的计算数值会与实测值及有限元值有一定差距。

图 5 为集中荷载作用下该两跨连续箱梁剪切广义力矩  $M_\theta$  分布图, 图 6、图 7 分别为集中及均布荷载作用下该梁的翘曲附加位移分布图。

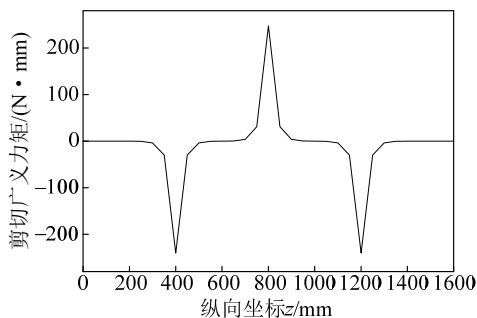


图 5 集中荷载作用下两跨连续箱梁的广义力矩图

Fig.5 Generalized moment for shear effect in two-span continuous box girder under concentrated loads

图 5 可以看出, 剪切广义力矩在集中荷载作用的截面及中支撑截面均比较大(绝对值), 但其沿纵向衰减很快。

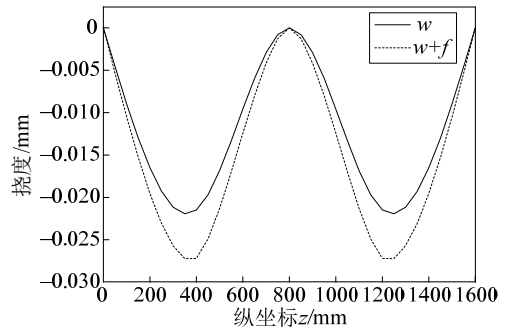


图 6 集中荷载作用下的挠度曲线

Fig.6 Deflection curve under concentrated load

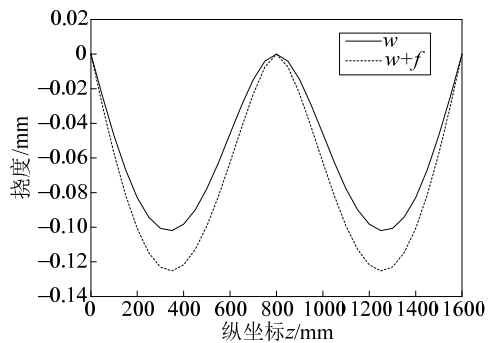


图 7 均布荷载作用下的挠度曲线

Fig.7 Deflection curve under uniformly distributed load

从图 6、图 7 可知, 在集中和均布荷载下, 考虑箱梁各板的面内剪切效应, 箱梁挠度均会增加; 挠度计算结果表明, 集中荷载作用时, 跨中截面附加挠度为 0.00571 mm, 剪切效应使其挠度增加了 27%; 均布荷载作用下跨中截面附加挠度为 0.2348 mm, 剪切效应使其挠度增加了 24%。

## 5 结论

与已有文献不同, 本文将薄壁箱梁的弯曲理论分为考虑和不考虑各板面内剪切效应来研究。对于薄壁箱梁的弯曲纵向位移函数, 本文以微板的剪切及平衡微分方程为基础, 通过分析薄壁箱梁弯曲剪力流与纵向位移的积分关系, 从理论推导出合理的弯曲纵向位移函数。选取剪切效应引起的附加挠度作为广义位移, 通过分析新定义的广义位移函数及内力所对应的翘曲应力的自平衡条件, 简化并修正所推得的弯曲位移函数。运用能量变分法建立了相应的控制微分方程及边界条件, 使推得的弯曲位移函数有更广的适用性。

按照本文建立的考虑薄壁箱梁各板剪切效应的弯曲位移函数求得的应力值与实测值和有限元值吻合良好; 挠度计算表明, 剪切效应使薄壁箱梁挠度有较大增加。

## 参考文献:

- [1] 郭金琼, 房贞政, 郑振. 箱形梁设计理论[M]. 第2版. 北京: 人民交通出版社, 2008: 1—60.  
Guo Jinqiong, Fang Zhenzheng, Zheng Zhen. Design theory of box girder [M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 2008: 1—60. (in Chinese)
- [2] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000: 90—98.  
Ni Yuanzeng, Qian Yinquan. Elastic analysis of thin-walled beam bridges [M]. Beijing: China Communications Press, 2000: 90—98. (in Chinese)
- [3] 包世华, 周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005: 1—20.  
Bao Shihua, Zhou Jian. Structural mechanics of thin-walled bar [M]. Beijing: China Building Industry Press, 2005: 1—20. (in Chinese)
- [4] Reissner E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of the minimum potential energy [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, 4(3): 268—278.
- [5] 韦成龙, 曾庆元, 刘晓燕. 薄壁箱梁剪力滞分析的多参数翘曲位移函数及其有限元法[J]. 铁道学报, 2000, 22(5): 60—64.  
Wei Chenglong, Zeng Qingyuan, Liu Xiaoyan. Warping displacement function and finite element method for calculation of shear lag effect in box girder [J]. Journal of The China Railway Society, 2000, 22(5): 60—64. (in Chinese)
- [6] 吴幼明, 罗旗帜, 岳珠峰. 薄壁箱梁剪力滞效应的能量变分法[J]. 工程力学, 2003, 20(4): 161—165.  
Wu Youming, Luo Qizhi, Yue Zhufeng. Energy-variational method of the shear lag effect in thin walled box girders [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(4): 161—165. (in Chinese)
- [7] 甘亚南, 周广春. 薄壁箱梁纵向剪滞翘曲函数精度选择的研究[J]. 工程力学, 2008, 25(6): 100—106.  
Gan Yanan, Zhou Guangchun. An approach for precision selection of longitudinal shear lag warping displacement function of thin-walled box girders [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(6): 100—106. (in Chinese)
- [8] 张元海, 白昕, 林丽霞. 箱形梁剪力滞效应的改进分析方法研究[J]. 土木工程学报, 2012, 45(11): 153—158.  
Zhang Yuanhai, Bai Xin, Lin Lixia. An improved approach for analyzing shear lag effect of box girders [J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(11): 153—158. (in Chinese)
- [9] 蔺鹏臻, 刘凤奎, 杨军, 等. 箱梁剪滞翘曲位移函数的定义及其应用[J]. 计算力学学报, 2012, 29(5): 789—794.  
Lin Pengzhen, Liu Fengkui, Yang Jun, et al. Definition and application of shear-lag warping displacement functions for box girders [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2012, 29(5): 789—794. (in Chinese)
- [10] 张元海. 箱形梁桥剪力滞效应及温度效应理论研究及其应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2008: 66—70.  
Zhang Yuanhai. Theoretical study and application of shear-lag and temperature effect in box-girder bridges [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2008: 66—70. (in Chinese)
- [11] 韦成龙, 李斌, 曾庆元. 变截面连续箱梁桥剪力滞及剪切变形双重效应分析的传递矩阵法[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 111—117.  
We Chenlong, Li Bin, Zeng Qingyuan. Transfer matrix method considering both shear lag and shear deformation effects in non-uniform continuous box girder [J]. 2008, 25(9): 111—117. (in Chinese)
- [12] 黄剑源. 薄壁结构的扭转分析(上册)[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983: 1—60.  
Huang Jiangyuan. Torsional analysis of thin-walled structures (Part One) [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1983: 1—60. (in Chinese)
- [13] 张士铎, 邓小华, 王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998: 111—132.  
Zhang Shiduo, Deng Xiaohua, Wang Wenzhou. Shear lag effect in box girders [M]. Beijing: China Communications Press, 1998: 111—132. (in Chinese)
- [14] 张元海, 林丽霞. 薄壁箱形剪力滞效应分析的初参数法[J]. 工程力学, 2013, 30(8): 205—211.  
Zhang Yuanhai, Lin Lixia. Initial parameter method for analyzing shear lag effect of box girders [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(8): 205—211. (in Chinese)