

文章编号: 1000-4750(2015)10-0154-07

# 基于可靠度理论的桥梁涡激振动概率性评价

李玲瑶<sup>1,2</sup>, 余志武<sup>1,2</sup>, 何旭辉<sup>1,2</sup>, 徐汉勇<sup>1</sup>

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南, 长沙 410075; 2. 高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南, 长沙 410075)

**摘 要:** 涡激共振是大跨度桥梁在低风速下容易发生的一种风致振动, 涉及的不确定因素众多, 利用可靠度理论对这类风致振动进行安全估算是大跨度桥梁风振研究的趋势。探讨了桥梁涡振的三种失效模式, 包括基于涡振风速的失效模式、基于涡振振幅的失效模式和基于前两种失效模式交集的涡振刚度失效模式, 基于此, 以某座大跨度桥梁为例, 应用二次四阶矩法计算了基于涡振振幅的失效概率, 并与二次二阶矩法的计算结果进行了比较, 用 Monte Carlo 模拟法(MC)进行了验证, 发现基于二次四阶矩法的可靠度分析相对于二次二阶矩法具有较高的精度。然后, 基于二次四阶矩法的计算结果得到了桥梁涡振刚度失效的概率, 研究表明: 单独考虑桥梁涡振发生风速或涡振振幅的失效概率偏于保守, 应结合起来考虑。

**关键词:** 大跨度桥梁; 涡激共振; 二次四阶矩法; 失效模式; 失效概率

中图分类号: U441.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.04.0280

## PROBABILISTIC EVALUATION OF VORTEX-INDUCED VIBRATION OF BRIDGES BASED ON RELIABILITY THEORY

LI Ling-yao<sup>1,2</sup>, YU Zhi-wu<sup>1,2</sup>, HE Xu-hui<sup>1,2</sup>, XU Han-yong<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China;

2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Changsha, Hunan 410075, China)

**Abstract:** Vortex-induced vibration (VIV) that involves many uncertain factors is an aerodynamic phenomenon that occurs in long-span bridges at low wind speeds. The safety assessment on this kind of wind-induced vibration based on reliability theory is the research trend of long-span bridges. Three failure modes of bridge VIV wind speed, maximum amplitude and VIV stiffness based on the intersections of first two failure modes are investigated. Then, a long-span bridge is taken as an example to calculate the VIV amplitude failure probability using a second-order fourth-moment method. The calculation results are compared with those by a second-order second-moment method and verified by Monte Carlo simulation method (MC). It finds that the reliability analysis based on the second-order fourth-moment method has higher precision than that due to the second-order second-moment method. Afterwards, on account of the calculation result using the second-order fourth-moment method, the probability of bridge VIV stiffness failure is obtained. The investigations illustrate that the failure probability trend is conservative when individually considering the VIV wind speed or the amplitude of a long-span bridge.

**Key words:** long-span bridge; VIV; second-order fourth-moment method; failure mode; failure probability

收稿日期: 2014-04-03; 修改日期: 2014-09-18

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51178471, 51208524); 中国博士后科学基金项目(2013M542137); 中南大学博士后基金项目(120971)

通讯作者: 李玲瑶(1979—), 女, 湖南人, 讲师, 在站博士后, 主要从事结构抗风研究(E-mail: sylph\_li@163.com).

作者简介: 余志武(1955—), 男, 湖南人, 教授, 硕士, 博导, 主要从事结构性能研究(E-mail: zhwyu@mail.csu.edu.cn);

何旭辉(1975—), 男, 贵州人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构性能研究(E-mail: xuhuihe@csu.edu.cn);

徐汉勇(1981—), 男, 浙江人, 博士生, 主要从事结构性能研究(E-mail: xuhy2468@163.com).

由于风荷载本身就是一种复杂的高随机性的荷载作用,风对结构的作用也相应的十分复杂和随机性高,因此,传统的基于确定性方法的大跨度桥梁风振的研究,已无法满足这一领域对风致振动安全估算的越来越高的要求,桥梁风工程领域开始尝试采用可靠度理论进行桥梁风致振动的一系列研究<sup>[1]</sup>。但是,它的发展历史短、难度大,许多理论问题甚至是很基本的理论问题都尚未得到解决,到目前为止,还未形成一种较为完善的桥梁风振可靠性分析理论,也未建立起一种较为完整的桥梁风振可靠性设计方法。

针对大跨度桥梁主梁与稳定可靠性相关的风振形式主要涉及颤振、抖振和涡振,到目前为止,涡振相对于前两种振动形式的稳定可靠性相关研究较少,虽然涡振不会像颤振那样引起整个结构的发散性振动而导致失稳,也不会像抖振那样对脉动风较敏感产生很大的风振荷载而导致安全失效,但涡振存在许多特殊的现象和危害。在平均风作用下,振动的桥梁从流动的气流中吸收能量,产生交替脱落的旋涡,这种旋涡又反过来作用在桥梁结构上引起振动,因而带有自激性质;同样,在脉动风作用下,由于脉动风的随机性引起的桥梁结构随机振动响应(阵风响应),这种随机振动反过来会对旋涡脱落形成反馈作用,使得涡激振动的振幅受到限制,因而又是一种带有强迫性质的限幅振动,且发生风速为一个或多个锁定风速区间。这种振动特性足以影响大跨度桥梁在施工或成桥阶段的行车安全,鉴于涡振的复杂性,目前尚未建立相应的理论分析模型来直接计算涡振响应,仅能通过试验或数值模拟等方法得到其涡振响应,纵观结构涡振的研究现状,不难发现其主要集中在以下几个方面<sup>[2]</sup>:

1) 结构涡振试验研究; 2) 结构涡激力经验模型; 3) 结构涡振数值模拟; 4) 结构涡激力展向相关性; 5) 结构涡振控制措施研究。而针对涡振的不确定性考虑的相关研究较少。20世纪70年代末由 Vickery 等<sup>[3]</sup>提出了描述涡激力的随机模型; 20世纪80年代、90年代 Ehsan 和 Scanlan<sup>[4]</sup>利用 Van der Pol 非线性振动方程,根据风洞试验结果计算结构在锁定区的涡振响应; Prenninger P H W<sup>[5]</sup>针对悬索桥和斜拉桥进行了抗风结构可靠度分析,考虑了斜拉桥高阶振型引起的涡振对结构抗风可靠性的影响; 葛耀君等<sup>[6]</sup>针对拱桥进行了涡振概率性评价,认为其实是评价出现涡振锁定风速的概率性; 李立等<sup>[7]</sup>应

用条带假设和在锁定响应时涡激作用力的 Scanlan 第二经验模型实现对涡激力时间和空间的离散,进而推导出时频域混合变换的 AFT 方法计算涡振的时程响应。上述研究只是单一地用涡振响应的随机模型或锁定风速出现的概率来评价涡振,显然这样的处理方式不够全面,本文尝试结合锁定风速和涡振响应涉及的不确定性应用可靠度理论中的二次四阶矩法对大跨度桥梁涡振进行评价。

## 1 二次四阶矩法

常用的一次二阶矩法和二次二阶矩法都需要已知基本变量的概率分布,都是以正确的分布概型和准确的统计参数为前提的。然而实际工程中,都存在随机变量的容量、统计推断方法、似是而非的功能函数模型影响基本随机变量的分布概型和统计参数确定的情况,进而会影响结构可靠度的计算结果。基于此,出现了可以不考虑基本随机变量实际概率分布的矩法进行可靠度分析<sup>[8-9]</sup>,在这种方法中,先要用基本随机变量的各阶矩得出功能函数的各阶矩,再通过最大熵原理<sup>[10-11]</sup>或函数逼近<sup>[12]</sup>等途径确定功能函数的概率密度函数。

对于任意功能函数,目前较好的办法是将其展开成 Taylor 级数并取至二次项,用基本变量的前四阶矩来估计功能函数更高阶的矩,但所用基本资料显然仍是基本变量的前四阶矩。因此,这种方法实际上是二次四阶矩法。以下主要介绍二次四阶矩法的最大熵方法。

### 1.1 最大熵原理<sup>[13]</sup>

若随机事件有  $n$  个可能结果,每个结果出现的概率为  $p_i (i=1,2,\dots,n)$ ,为度量此事件的不确定性,引入下列函数:

$$H = -c \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (1)$$

其中,  $c > 0$  为常数,因此  $H \geq 0$ 。 $H$  称为 Shannon 熵。显然,必然事件只出现一种结果,其  $p_i=1$ ,没有不确定性,  $H=0$ ; 若所有的  $p_i$  都相等( $p_i=1/n$ ),  $H$  取最大值  $c \ln n$ ,表明人们对实验结果一无所知,事件的不确定性最大。

若随机事件服从概率密度函数为  $f_X(x)$  的连续分布, Shannon 熵(亦称作信息熵)为:

$$H = -c \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx \quad (2)$$

在给定的条件下,所有可能的概率分布中存在

一个使信息熵取极大值的分布, 这称为 Jaynes 最大熵原理。在已知的信息附加约束条件下使信息熵最大, 所得到的概率分布是最小偏差的, 由此可得到一种构造“最佳”概率分布的途径。

考虑将随机变量  $X$  的前  $m$  阶原点矩  $\nu_{Xi} (i=1,2,\dots,m)$  作为约束条件, 即在下列条件下使式(2)取最大值:

$$\nu_{Xi} = E(X^i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f_X(x) dx, \quad i=1,2,\dots,m \quad (3)$$

利用 Lagrange 乘子法, 将式(2)和式(3)引入修正函数:

$$L = -c \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \ln f_X(x) dx + \sum_{i=0}^m \lambda_i \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f_X(x) dx - \nu_{Xi} \right] \quad (4)$$

式中,  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  为待定常数。在稳定点处有

$$\frac{\partial L}{\partial f_X(x)} = 0, \quad \text{即} \quad \ln f_X(x) = -1 + \frac{1}{c} \sum_{i=0}^m \lambda_i x^i, \quad \text{令}$$

$$a_0 = 1 - \frac{\lambda_0}{c}, \quad a_i = -\frac{\lambda_i}{c} \quad (i=1,2,\dots,m), \quad \text{可得最大熵概率密度函数为:}$$

$$f_X(x) = \exp\left(-\sum_{i=0}^m a_i x^i\right) \quad (5)$$

式中,  $a_0, a_1, \dots, a_m$  为待定参数。

### 1.2 功能函数的四阶中心矩

通过估算功能函数的四阶中心矩可获得式(5)  $m+1$  个待定参数。根据式(3)可得到  $X$  的中心矩:

$$\mu_{Xi} = E[(X - \mu_X)^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^i f_X(x) dx, \quad i=0,1,\dots,m \quad (6)$$

式中,  $\mu_X = \nu_{X1}$  为  $X$  的均值。

不难得到  $X$  的前四阶中心矩, 即:

$$\begin{cases} \mu_{X0} = 1 \\ \mu_{X1} = 0 \\ \mu_{X2} = \sigma_X^2 \\ \mu_{X3} = C_{sX} \sigma_X^3 \\ \mu_{X4} = C_{kX} \sigma_X^4 \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\sigma_X$  为标准差;  $C_{sX}$  为偏态系数;  $C_{kX}$  为峰度系数。为了较为简便地得到 4 阶中心矩, 这里借助 Pearson 系统, 将随机变量  $X$  的概率密度函数  $f_X(x)$  由下面常微分方程确定。

$$\frac{1}{f_X(x)} \frac{df_X(x)}{dx} = \frac{x-d}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2} \quad (8)$$

参数  $d, c_0, c_1$  和  $c_2$  可用  $X$  的前四阶中心矩  $\mu_{Xi}$  表示, 即:

$$\begin{cases} c_0 = -\frac{\mu_{X2}(4\mu_{X2}\mu_{X4} - 3\mu_{X3}^2)}{10\mu_{X2}\mu_{X4} - 12\mu_{X3}^2 - 18\mu_{X2}^3} \\ c_1 = -\frac{\mu_{X3}(3\mu_{X2}^2 + \mu_{X4})}{10\mu_{X2}\mu_{X4} - 12\mu_{X3}^2 - 18\mu_{X2}^3} \\ c_2 = -\frac{2\mu_{X2}\mu_{X4} - 3\mu_{X3}^2 - 6\mu_{X2}^3}{10\mu_{X2}\mu_{X4} - 12\mu_{X3}^2 - 18\mu_{X2}^3} \\ d = c_1 \end{cases} \quad (9)$$

继而可以得出各阶中心矩存在的递推关系:

$$\mu_{X(k+1)} = -\frac{k}{1+(k+2)c_2} [c_0 \mu_{X(k-1)} + c_1 \mu_{Xk}], \quad k=1,2,\dots \quad (10)$$

为避免在计算中溢出中断求解, 将  $X$  转换成标准随机变量  $Y = X - \mu_X / \sigma_X$ , 则  $X$  和  $Y$  各阶中心矩存在以下关系:

$$\mu_{Xi} = E[(X - \mu_X)^i] = E[(\sigma_X Y)^i] = \sigma_X^i \mu_{Yi} = \sigma_X^i \nu_{Yi}, \quad i=0,1,\dots,m \quad (11)$$

利用式(7)和式(11), 且  $\mu_Y = 0, \sigma_Y = 1, \nu_{Yi} = \mu_{Yi}$ ,  $Y$  的前四阶矩为:

$$\begin{cases} \nu_{Y0} = 1 \\ \nu_{Y1} = 0 \\ \nu_{Y2} = 1 \\ \nu_{Y3} = C_{sY} = C_{sX} \\ \nu_{Y4} = C_{kY} = C_{kX} \end{cases} \quad (12)$$

确定 Pearson 系统参数的式(9)可写成:

$$\begin{cases} c_0 = -\frac{4C_{kY} - 3C_{sY}^2}{10C_{kY} - 12C_{sY}^2 - 18} \\ c_1 = -\frac{C_{sY}(3 + C_{kY})}{10C_{kY} - 12C_{sY}^2 - 18} \\ c_2 = -\frac{2C_{kY} - 3C_{sY}^2 - 6}{10C_{kY} - 12C_{sY}^2 - 18} \\ d = c_1 \end{cases} \quad (13)$$

设结构的功能函数为  $Z = g_X(X)$ ,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  中  $X_i$  的统计参数为  $\mu_{Xi}, \nu_{Xi}, C_{sXi}$  和  $C_{kXi}$ , 前四阶中心矩为  $\mu_{Xi1}, \mu_{Xi2}, \mu_{Xi3}$  和  $\mu_{Xi4}$ 。将  $Z$  在验算点  $x^*$  处作 Taylor 级数展开并取至二次项, 得:

$$Z_Q = g_X(x^*) + (X - x^*)^T \nabla g_X(x^*) + \frac{1}{2} (X - x^*)^T \nabla^2 g_X(x^*) (X - x^*) \quad (14)$$

由式(14)可近似计算  $Z$  的前四阶矩:

$$\mu_{ZQ} = g_X(\mu_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_X(\mu_X)}{\partial X_i^2} \mu_{Xi2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ZQ^2} = E[(Z_Q - \mu_{ZQ})^2] &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 \mu_{Xi2} + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \frac{\partial^2 g_X(\mu_X)}{\partial X_i^2} \mu_{Xi3} + \\ &\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 (\mu_{Xi4} - 3\mu_{Xi2}^2) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 g_X(\mu_X)}{\partial X_i \partial X_j} \right]^2 \mu_{Xj2} \mu_{Xi2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ZQ^3} = E[(Z_Q - \mu_{ZQ})^3] &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^3 \mu_{Xi3} + \\ &\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 \frac{\partial^2 g_X(\mu_X)}{\partial X_i^2} \cdot \\ &(\mu_{Xi4} - 3\mu_{Xi2}^2) + 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \cdot \\ &\frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_j} \frac{\partial^2 g_X(\mu_X)}{\partial X_i \partial X_j} \mu_{Xj2} \mu_{Xi2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ZQ^4} = E[(Z_Q - \mu_{ZQ})^4] &= \\ &\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^4 (\mu_{Xi4} - 3\mu_{Xi2}^2) + \\ &3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 \left[ \frac{\partial g_X(\mu_X)}{\partial X_j} \right]^2 \cdot \\ &\mu_{Xj2} \mu_{Xi2} \end{aligned} \quad (18)$$

### 1.3 基于最大熵原理的二次四阶矩方法的失效概率表示

将功能函数  $Z$  标准化为  $Y = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}$ , 满足约束

条件式(12)的随机变量  $Y$  的最大熵概率密度函数  $f(y)$  仍是式(5)的形式。将式(5)和式(12)代入式(3), 得积分方程组:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^i \exp\left(-\sum_{j=0}^m a_j y^j\right) dy = \nu_{Yi}, \quad i=0,1,\dots,m \quad (19)$$

从中可解出  $f(y)$  中的系数  $a_0, a_1, \dots, a_m$ 。结构

的失效概率为:

$$P_f = P(Z \leq 0) = P\left(Y \leq -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{i=0}^m a_i y^i\right) dy \quad (20)$$

式(19)、式(20)的积分区间均为无穷区间, 实际进行积分计算时, 须先进行适当处理, 通常可以利用区间截断法按正常积分计算, 即将式(19)中的无穷积分区间用包含 0 的有限区间代替, 式(20)中的积分下限则代以小于  $-\mu_Z / \sigma_Z$  的有限值。

由此得出功能函数基于最大熵原理的二次四阶矩方法<sup>[13]</sup>的失效概率计算过程如下:

步骤 1): 利用式(15)计算  $\mu_Z$ 。

步骤 2): 利用式(16)~式(18)计算  $\mu_{Zi}$ 。

步骤 3): 利用式(7)的后两式, 将  $X$  转换为  $Z$  计算  $C_{sZ}$  和  $C_{kZ}$ 。

步骤 4): 利用式(12), 将  $X$  转换为  $Z$  计算  $\nu_{Yi}$ 。

步骤 5): 对式(10)将  $X$  转换为  $Z$ , 同时利用式(13)计算高阶  $\nu_{Yi}$ 。

步骤 6): 由方程组式(19)和式(20)分别求解  $a_i$  和  $P_f$ 。

## 2 桥梁涡振失效模式

涡振出现的风速不高, 而且出现的风速均为锁定风速区间, 虽然不像颤振会引起整个结构的发散而导致颤振稳定失效, 但当涡振振幅足够大时会严重影响桥梁的使用性能, 因此, 在规范中对涡振振幅允许值进行了规定<sup>[14]</sup>, 如果振幅超过了允许值, 即认为造成涡振刚度破坏。这说明涡振刚度失效的发生基于两个显著条件: 一是涡振发生的锁定风速出现; 二是在锁定风速范围内涡振最大振幅超过允许幅值。因此, 桥梁涡振刚度失效模式的建立应同时考虑风速失效和振幅失效。

### 2.1 基于涡振风速的失效模式

涡振发生时的风速为一个锁定风速区间, 对应的功能函数临界状态可表示为:

$$Z_v = |U_c - U_b| = \frac{\Delta U}{2} \quad (21)$$

则失效状态可表示为:

$$U_c - \frac{\Delta U}{2} < U_b < U_c + \frac{\Delta U}{2} \quad (22)$$

式中:  $U_c$  为涡振振幅最大值时对应的风速;  $U_b$  为桥面高度处涡振发生风速;  $\Delta U$  为涡振锁定风速差值。

如果桥面高度处的设计风速在式(22)所示风速范围内,则认为基于涡振风速考虑的涡振失效,相应的发生概率用  $P_v$  表示。

## 2.2 基于涡振振幅的失效模式

涡振振幅最大值的求解可参考文献[15],其无量纲表达式如下:

$$\delta_\eta = \frac{y_{\max}}{D} = \frac{C_{vb}(1+L_l)^2}{16\pi S_{cb} S_t^2} \quad (23)$$

$$\delta_\theta = \alpha_{\max} = \frac{C_{vt}(1+L_l)^2}{16\pi S_{ct} S_t^2} \quad (24)$$

$$\begin{cases} L_l = \frac{U_e}{U_s}, S_t = \frac{f_n D (1+L_l)}{2} \\ S_{cb} = \frac{4\pi \cdot m \cdot \xi_b}{\rho B D}, S_{ct} = \frac{4\pi \cdot I \cdot \xi_t}{\rho B^2 D^2} \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $y_{\max}$ 、 $\alpha_{\max}$  分别表示结构涡激共振的峰值响应;  $C_{vb}$ 、 $C_{vt}$  分别表示竖向、扭转涡激力参数;  $L_l$  定义为锁定风速区间的上下限(涡振起始风速  $U_s$  和终止风速  $U_e$ )之比,即锁定区间参数;  $S_t$ 、 $S_{cb}$  和  $S_{ct}$  分别为 Strouhal 数、竖向 Scruton 数和扭转 Scruton 数;  $f_n$  为结构自振频率;  $D$  为梁高;  $B$  为梁宽;  $U$  为来流风速;  $m$  和  $I$  分别为主梁单位长度质量和质量惯矩;  $\xi_b$  和  $\xi_t$  分别为竖弯和扭转阻尼比;  $\rho$  为空气密度。

相应地按照结构抗力和荷载效应表示基于涡振振幅的失效模式,结构抗力对应的为涡振允许振幅(按桥梁抗风设计规范定义),荷载效应对应的为涡振发生时的最大振幅,则功能函数可表示为:

$$Z_a = \Delta - \delta \quad (26)$$

式中:  $\Delta$  ( $\Delta_\eta$  或  $\Delta_\theta$ ) 为涡振振幅(竖弯或扭转)限值;  $\delta$  ( $\delta_\eta$  或  $\delta_\theta$ ) 为涡振最大振幅(竖弯或扭转)。如果  $Z_a \leq 0$ , 则认为基于涡振振幅考虑的涡振失效,相应的发生概率用  $P_a$  表示。

## 2.3 基于涡振锁定风速和最大振幅双重因素的失效模式

前面提到涡振刚度失效的发生基于两个因素:锁定风速的出现和最大振幅超限,因此考虑基于这两个因素建立涡振的失效模式。假定涡振锁定风速的出现为事件 A, 涡振最大振幅超限为事件 B, 则涡振刚度失效模式可以表示为事件 A 和事件 B 失效模式的交集,从概率统计的角度可以将涡振刚度失效的概率  $P_f$  表示为  $P(A \cap B)$ 。在涡振锁定风速发生的前提下,涡振最大振幅超限的概率可以看作条

件概率,即事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率  $P(B|A)$ , 依据概率的乘法公式,涡振刚度失效的概率就是基于涡振风速的失效概率与基于涡振振幅的失效概率的乘积:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \rightarrow P_f = P_v P_a \quad (27)$$

## 3 桥梁涡激振动的可靠性评价

由于大跨度桥梁涡振锁定风速是基于多个分段区间的实际风速,多是根据风洞试验结果确定的,从统计分析的角度可以用一定重现期内的出现频度进行描述<sup>[16]</sup>,即通过一定重现期内的累计涡振发生时间或累计涡振时间占重现期的百分比。基于式(23)~式(26)的涡振振幅失效模式的可靠性评价与常规的可靠度分析方法无异,本文采用二次四阶矩法展开研究。

## 4 算例

某主桥为超大跨度中承式全钢结构拱梁组合体系的桥梁,主跨 550 m, 2 个边跨各 100 m, 主拱肋矢跨比 1:5.5, 拱高 100 m。加劲梁采用正交异性桥面板全焊钢箱梁,通过吊杆或立柱支承于拱肋之上;加劲梁宽 40 m, 设 6 车道(见图 1)。通过桥位地形模型风环境风洞试验已确定桥位处地面粗糙度指数  $\alpha=0.13$ , 并通过有限元分析软件 ANSYS 计算了施工阶段和成桥阶段桥梁结构的动力特性,施工阶段主要为最大悬臂状态(拱肋合拢前)和拱肋合拢状态(拱肋合拢后),成桥阶段指全桥成桥状态(实际运营时),结果见表 1。

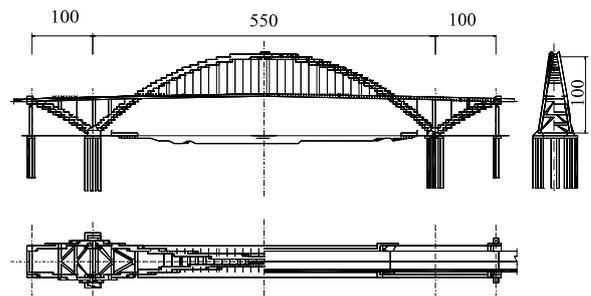


图 1 某桥结构示意图

Fig.1 Bridge diagram

通过对该桥进行缩尺比 1:100 的全桥气弹模型风洞试验,发现由于钢箱拱肋断面的异常钝体特性,拱肋出现了较严重的涡振, S1、S2 和 C 三种结构状态均匀流中的涡振锁定风速均不止一个锁定风速区间,出现较明显涡振现象的风速主要包括两个锁定

分区间, 对它们进行统计分析并将其换算到实桥 10 m 高度的风速, 相应地可以得到三种状态时标准高度 10 m 处的涡振锁定风速, 可见式(28)。

表 1 结构动力特性分析结果

Table 1 Analysis results of structural dynamic characteristics

桥梁结构形式	一阶竖弯频率/Hz		一阶侧弯频率/Hz		一阶扭转频率/Hz	
	反对称	对称	对称	反对称	对称	反对称
拱肋最大悬臂 S1	0.393	0.883	0.408	0.933	1.459	—
拱肋合拢状态 S2	0.679	0.929	0.441	0.747	1.809	2.122
全桥成桥状态 C	0.368	0.585	0.422	0.610	1.252	1.585

$$\begin{cases} V_{S1} = 10 \text{ m/s} \sim 45 \text{ m/s} \\ V_{S2} = 20 \text{ m/s} \sim 55 \text{ m/s} \\ V_C = 14 \text{ m/s} \sim 40 \text{ m/s} \end{cases} \quad (28)$$

则基于涡振风速的失效模式所对应的风速闭区间分别为:

$$\begin{cases} 27.5 - 17.5 < V_{S1} < 27.5 + 17.5 \\ 37.5 - 17.5 < V_{S2} < 37.5 + 17.5 \\ 27.0 - 13.0 < V_C < 27.0 + 13.0 \end{cases} \quad (29)$$

根据式(29)所示的失效模式, 可得到桥位处一定重现期的发生涡振锁定风速的概率, 见表 2。

表 2 发生涡振锁定风速的概率

Table 2 Probability of VIV lock-in wind speed

结构形式	每年发生概率 $\bar{P}$ / (%)	重现期 $T/a$	重现期内发生概率 $P_v$ / (%)
S1	0.78	10	7.8
S2	0.012	10	0.12
C	0.089	100	8.9

根据全桥气弹模型风洞试验, 按缩尺比 1:100 得到该桥 S1、S2 和 C 三种状态下的自振频率及其模态阻尼, 自振频率的相对误差绝对值均未超过 5%, 阻尼比在 0.4%~0.78%, 并得到拱肋竖弯和侧弯最大涡激共振单峰振幅, 发现反映到实桥上的振幅值均超过了规范规定的允许值(见表 3)。

表 3 实桥拱肋涡激共振单峰振幅

Table 3 VIV single peak amplitude of actual arch rib

结构形式	风速/(m/s)	涡振频率/Hz		跨中振幅/m		四分点振幅/m	
		竖弯	侧弯	竖弯	侧弯	竖弯	侧弯
S1	16.3	0.393	0.408	0.813	0.308	0.216	—
	26.3	0.393	0.408	0.656	0.272	0.176	—
S2	31.3	0.679	0.441	0.115	—	0.634	—
	33.8	0.679	0.441	—	0.105	—	0.070
C	17.5	0.368	—	0.040	—	0.164	—
	35.0	0.368	—	0.135	—	0.588	—

根据前人研究成果<sup>[15]</sup>, 结合风洞试验<sup>[16]</sup>, 先由式(23)、式(25)确定结构不同阻尼比时的  $S_c$ 、 $L_l$  和

$C_v$ , 分别建立  $L_l$  和  $S_c$  以及  $C_v$  和  $S_c$  的关系表达式, 根据建立的关系表达式和试验模型的阻尼比最终确定  $L_l$  和  $C_v$ , 然后通过尾流测试试验和式(25)得到  $S_l$ , 各参数的分布类型则取经验分布。针对该桥拱顶高度设计基准风速  $U_d=43 \text{ m/s}$  范围内各参数的统计数据, 给出了三种结构状态下式(23)中四个随机变量的分布类型、均值和变异系数, 结果见表 4~表 6。

表 4 最大悬臂状态四个参数的经验分布和统计特性

Table 4 Empirical distribution and statistical characteristics of four parameters under maximum cantilever condition

项目	涡激力参数 $C_v$	锁定区间参数 $L_l$	$S_c$	$S_l$
分布类型	对数正态	极值 I 型	正态	对数正态
均值	1.633	1.504	7.014	0.189
变异系数	0.15	0.10	0.40	0.15

表 5 拱肋合拢状态四个参数的经验分布和统计特性

Table 5 Empirical distribution and statistical characteristics of four parameters under arch rib closure condition

项目	涡激力参数 $C_v$	锁定区间参数 $L_l$	$S_c$	$S_l$
分布类型	对数正态	极值 I 型	正态	对数正态
均值	0.298	1.525	11.222	0.171
变异系数	0.15	0.10	0.40	0.15

表 6 全桥成桥状态四个参数的经验分布和统计特性

Table 6 Empirical distribution and statistical characteristics of four parameters under complete bridge condition

项目	涡激力参数 $C_v$	锁定区间参数 $L_l$	$S_c$	$S_l$
分布类型	对数正态	极值 I 型	正态	对数正态
均值	0.090	1.455	12.449	0.080
变异系数	0.15	0.10	0.40	0.15

针对该桥竖弯涡振振幅失效模式中的  $\Delta_\eta$ , 其不确定性考虑取经验值, 即分布满足正态分布, 变异系数保守取值为 0.1。采用二次四阶矩法对基于涡振振幅的失效概率进行计算, 并与二次二阶矩法进行对比, 用 MC 法进行验证<sup>[17]</sup>, 模拟次数取  $N=10^7$ , 结果见表 7。

表 7 涡振最大竖弯振幅超越概率

Table 7 Exceeding probability of VIV maximum vertical bending amplitude

工况	失效概率 $P_a$		
	二次二阶矩法	二次四阶矩法	MC
S1	0.723	0.971	0.994
S2	0.809	0.923	0.915
C	0.634	0.690	0.684

从表 7 的计算结果可以看出, 基于涡振振幅的失效概率比较大, 运用二次四阶矩法对 S2 和 C 两

种工况进行计算的结果相对于 MC 模拟的结果偏于安全, S1 的计算结果比 MC 的结果偏于危险; 而二次二阶矩法对于 S1、S2 和 C 三种工况时的结果相对于 MC 的结果均偏于危险。在本文中, 考虑以二次四阶矩法的计算结果为基础进行涡振刚度失效的计算。相应地给出了各随机变量的敏感度指标(见表 8), 发现  $S_c$  和  $S_t$  具有最大的敏感度指标, 其中  $S_c$  对质量最敏感, 而  $S_t$  对迎风面尺寸最敏感。

基于涡振风速和振幅的失效模式的概率按条件概率考虑给出了计算式(27), 结合该桥最大悬臂状态、拱肋合拢状态和成桥状态下不同施工重现期的要求, 最终涡振刚度失效概率结果见表 9。

表 8 各随机变量的敏感度指标

Table 8 Sensitivity indexes of random variables

项目	结构形式	涡激力参数 $C_v$	锁定区间参数 $L_t$	$S_c$	$S_t$	$\Delta_p$
敏感度系数 $\gamma$	S1	-0.10	-0.21	0.53	0.78	0.24
	S2	-0.03	-0.23	0.66	0.68	0.22
	C	-0.00	-0.21	0.73	0.61	0.20

表 9 涡振失效的概率评价

Table 9 Probability assessment of VIV failure

结构形式	涡振锁定风速	涡振最大竖弯振幅	重现期	重现期内涡振刚度
	发生概率 $P_v$ (%)	超越概率 $P_d$ (%)	$T/a$	失效概率 $P_f$ (%)
S1	7.8	97.1	10	7.57
S2	0.12	92.3	10	0.11
C	8.9	69.0	100	6.14

从表 9 可以发现, 该桥的三种涡振失效模式的概率均较高, 且涡振刚度失效概率均小于前两种失效模式的概率, 与考虑涡振锁定风速的发生概率相差 3%~45%, 而与单独考虑涡振最大振幅的超越概率相比, 则可达到上百倍。可见, 单独考虑涡振发生风速或涡振振幅的失效概率都是偏于保守的。

## 5 结论

针对大跨度桥梁涡振, 探讨了三种涡振失效模式的建立, 并基于二次四阶矩法进行了概率求解, 初步验证了所建议方法的适用性。通过本文研究发现:

(1) 二次四阶矩法在桥梁涡振这类非小概率事件中比二次二阶矩法的精度高, 各种不确定因素中, 锁定风速区间参数、质量和迎风面尺寸及其相应的 Scruton 数和 Strouhal 数的不确定性不能忽略。

(2) 考虑到桥梁涡振刚度失效的两个前提条件: 涡振锁定风速的出现和涡振最大振幅超限, 基于涡振风速的失效模式和涡振振幅的失效模式的

交集得到了桥梁涡振刚度失效模式, 计算得到的失效概率相对于涡振发生风速或涡振振幅的失效概率都要小, 可见, 单独考虑某一因素的失效概率是偏于保守的。

## 参考文献:

- [1] 葛耀君. 大跨度桥梁抗风的技术挑战与精细化研究[J]. 工程力学, 2011, 28(增刊 II): 11-23.  
Ge Yaojun. Technical challenges and refinement research on wind resistance of long-span bridges [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(Suppl II): 11-23. (in Chinese)
- [2] 肖军. 闭口流线型箱梁涡激力展向相关性研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2012.  
Xiao Jun. Study on spanwise correlation of vortex-induced force of a streamlined closed box girder [D]. Changsha: Hunan University, 2012. (in Chinese)
- [3] Vickery B J, Clark A W. Lift or across-wind response of tapered stacks [J]. Journal of the Structural Division, 1972, 98(1): 1-20.
- [4] Ehsan F, Scanlan R H. Vortex-induced vibration of flexible bridges [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1990, 116(6): 1392-1411.
- [5] Prenninger P H W. Reliability of bridge structures under wind loading: consideration of uncertainties of wind load parameters [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1990, 33(1/2): 385-394.
- [6] 葛耀君, 项海帆, 凌明, 等. 卢浦大桥风荷载及抗风稳定性研究[J]. 上海建设科技, 2004(1): 39-41.  
Ge Yaojun, Xiang Haifan, Ling Ming, et al. Research on wind loading and wind-resistant stability of Lupu Bridge [J]. Shanghai Construction Science & Technology, 2004(1): 39-41. (in Chinese)
- [7] 李立, 廖锦翔. 涡激振动问题的有限元计算研究[J]. 工程力学, 2003, 20(5): 200-203.  
Li Li, Liao Jinxiang. Analysis of vortex-induced vibrations by finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(5): 200-203. (in Chinese)
- [8] Xu L, Cheng G D. Discussion on: moment methods for structural reliability [J]. Structural Safety, 2003, 25(3): 193-199.
- [9] 白冰, 张清华, 李乔. 结构二次二阶矩可靠度指标的回归分析预测算法[J]. 工程力学, 2013, 30(10): 219-226.  
Bai Bing, Zhang Qinghua, Li Qiao. Regression analysis-prediction algorithm for structural second-order second-moment reliability index evaluation [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(10): 219-226. (in Chinese)
- [10] Tagliani A. On the existence of maximum entropy distributions with four and more assigned moments [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1990, 5(4): 167-170.

(参考文献[11]-[17]转第 168 页)

- [14] 曾国伟, 杨新华, 白凡, 尹安毅. 沥青砂粘弹塑蠕变损伤本构模型实验研究[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 249—253.  
Zeng Guowei, Yang Xinhua, Bai Fan, Yin Anyi. Experimental researches on a visco-elastoplastic creep damage constitutive model of asphalt mastic [J]. Engineering mechanics, 2013, 30(4): 249—253. (in Chinese)
- [15] Dai Qingli, Martin H. Sadd, You Zhangping. A micromechanical finite element model for linear and damage-coupled viscoelastic behaviour of asphalt mixture [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, 30(11): 1135—1158.
- [16] Huang Chienwei. Development and numerical implementation of nonlinear viscoelastic-viscoplastic model for asphalt material [D]. USA: Texas A&M University, 2008.
- [17] 何兆益, 汪凡, 朱磊, 等. 基于 Johnson-Cook 黏塑性模型的沥青路面车辙计算[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2010, 29(1): 49—53.  
He Zhaoyi, Wang Fan, Zhu Lei, et al. Rutting calculation of asphalt pavement based on the Johnson-Cook viscoplastic model [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2010, 29(1): 49—53. (in Chinese)

(上接第 160 页)

- [11] Zabaranin M, Uryasev S. Statistical decision problems [M]. New York: Springer, 2014: 53—54.
- [12] McLeish D. Simulating random variables using moment-generating functions and the saddle point approximation [J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2014, 84(2): 324—334.
- [13] 张明. 结构可靠度分析-方法与程序[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 89—93.  
Zhang Ming. Structure reliability analysis-methods and procedures [M]. Beijing: Science Press, 2009: 89—93. (in Chinese)
- [14] JTG/T D60-01-2004, 公路桥梁抗风设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2004.  
JTG/T D60-01-2004, Wind-resistant design code for highway bridges [S]. Beijing: China Communications Press, 2004. (in Chinese)
- [15] 李永君. 大跨度桥梁涡振二维计算模型及其实验研究 [D]. 上海: 同济大学, 2004.  
Li Yongjun. Two-dimensional VIV model and experimental research for long-span bridge [D]. Shanghai: Tongji University, 2004. (in Chinese)
- [16] 项海帆, 葛耀君, 朱乐东, 等. 现代桥梁抗风理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 2005: 282—285.  
Xiang Haifan, Ge Yaojun, Zhu Ledong, et al. Modern theory and practice on bridge wind resistance [M]. Beijing: China Communication Press, 2005: 282—285. (in Chinese)
- [17] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 联合分布函数蒙特卡罗模拟及结构可靠度分析[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 68—74.  
Wu Shuaibing, Li Dianqing, Zhou Chuangbing. Monte Carlo simulation of multivariate distribution and its application to structural reliability analysis [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 68—74. (in Chinese)