文章编号: 1000-4750(2015)08-0096-07

脏污对道床剪切性能影响及 评估指标的离散元分析

徐 旸^{1,2}, 高 亮^{1,2}, 井国庆^{1,2}, 蔡小培^{1,2}, 罗 奇^{1,2}

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院,北京 100044; 2. 轨道工程北京市重点实验室,北京 100044)

摘 要:对国内外典型的道床脏污评估指标进行了综合分析。基于已有研究成果,提出了新的道床评估指标*PFI*。 采用离散元法建立了基于精细道砟仿真单元的直剪数值模型,对不同脏污程度道床的剪切性能及*PFI*的合理性进 行了研究,研究结果表明:脏污会显著降低道床的抗剪性能,其下降幅度与道床的脏污程度有关;脏污材料的粒 径对道床剪切性能影响明显,且在材质相同的情况下,小粒径的脏污会引起道床剪切性能的进一步降低;相比于 已有评估指标*VCI*,*PFI*能够考虑脏污材料粒径的影响,从而更准确的评估道床脏污情况。 关键词:铁路道床;脏污评估指标;离散元法;脏污率;直剪 **中图分类号:** U213.7 **文献标志码:** A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.01.0051

SHEAR BEHAVIOR ANALYSIS OF FOULED RAILROAD BALLAST BY DEM AND ITS EVALUATION INDEX

XU Yang^{1,2}, GAO Liang^{1,2}, JING Guo-qing^{1,2}, CAI Xiao-pei^{1,2}, LUO Qi^{1,2}

Beijing Jiaotong University, School of Civil Engineering, Beijing 100044, China;
 Beijing Key Laboratory of Track Engineering, Beijing 100044, China)

Abstract: Typical evaluation indices of fouled ballast are discussed and a new one, *PFI*, is proposed. A DEM simulation of direct shear box based on delicate ballast model is performed to study the shear performance of fouled ballast at various levels and to evaluate the rationality of the *PFI* index. The results indicate that the shear stress of ballast decreases observably due to fouling, which depends on the fouling degree. In addition, the particle size of fouling also influences the shear performance of ballast. The shear performance of ballast drops as the fouling particle size decreases for the same material. Compared with *VCI*, *PFI* can take the effects of fouling particle size into account. Therefore, PFI can evaluate the fouling level of ballast more accurately.

Key words: railway ballast bed; fouling index; discrete element method; ballast fouling ratio; direct shear

有砟轨道是我国铁路最主要结构形式之一,散 体道床作为有砟轨道最重要组成部分,其服役状态 是决定线路能否平稳安全运营的关键因素^[1]。由于 散体道床道砟颗粒间存在着孔隙,随着列车的运 营,细小颗粒会侵入道砟间的孔隙并逐渐沉积,进 而引发道床脏污的现象。研究^[2]表明道床的脏污会 显著降低道床的力学性能,其中对道床抗剪强度的 影响最为显著,当脏污发展到一定程度后将严重降 低道床的横向阻力。甚至引发翻浆冒泥、道床板结 等病害。

为研究脏污对道床剪切性能的影响规律,就必 须结合脏污评估指标,对不同脏污程度道床的力学

收稿日期: 2014-01-14; 修改日期: 2014-06-30

基金项目:国家自然科学基金高铁联合基金重点项目(U1234211);北京交通大学基本科研业务费项目(2013YJS095);中国铁路总公司科技研究开发计划项目(2013G009-B);北京高等学校青年英才计划项目(YETP0559)

通讯作者: 高 亮(1968-), 男,山东滕州人,教授,博士,主要从事高速铁路轨道结构领域研究(E-mail: lgao@bjtu.edu.cn).

作者简介: 徐 旸(1989-), 男, 安徽合肥人, 博士生, 主要从事高速铁路散体道床的研究(E-mail: 356968468@qq.com);

井国庆(1979-), 男,河北廊坊人,副教授,博士,主要从事有砟道床设计与养护维修优化研究(E-mail:gqjing@bjtu.edu.cn);

蔡小培(1982-),男,江苏徐州人,副教授,博士,主要从事铁路轨道领域的研究(E-mail: 39052784@qq.com);

罗 奇(1989-), 男,湖北黄冈人,硕士生,主要从事散体道床的研究(E-mail: 1040735007@qq.com).

性能进行分析。在道床脏污的评估指标方面 Selig and Waters^[3]最早提出通过 FI 指标来判断道床的脏 污程度, Feldman and Nissen^[4]定义了 PVC 指标对道 床的脏污程度进行评估, Indraratna^[5]提出了脏污评 估指标 VCI, 是一种较为综合的评估指标。本文对 上述典型评估指标进行了分析,并在前人的研究基 础上提出了新的道床评估指标 PFI,结合离散元法, 验证了 PFI 的合理性,并对不同脏污程度道床的剪 切性能进行了研究。

离散元法建立模型的基本原理是将相互接触 的两个单元通过接触元件进行连接,由力与相对位 移的关系求得两单元间法向和切向的作用力,对单 元在各个方向上与其它单元间的作用力求合力及 合力矩,根据牛顿运动第二定律求得单元的加速 度,对其进行时间积分,进而得到单元下一个时步 的速度和位移。

在道床的离散元研究中,严颖^[6]采用 2 枚~3 枚 球体颗粒单元,通过粘接组合的方式,对碎石料的 直剪实验进行了模拟,认为碎石料的有效摩擦系数 随法向应力的增加而降低。Huang H^[7]对煤灰污染下 的道床进行了研究,着重分析了道床不同位置脏污 对其力学性能的影响,认为道床肩部的脏污对道床 剪切力学性能的影响最大。Indraratna^[8]通过大型直 剪实验分析了土工格栅对脏污道床剪切性能的影 响,认为土工格栅能够有效增强道床的剪切强度。 已有研究多以实验为主,数值模拟及其相关研究有 所欠缺,尤其是结合道床脏污评估指标,综合分析 道床在不同脏污程度下剪切性能的研究较为不足。

本文对现有的道床典型评估指标进行了深入 分析,并在前人的基础上提出了新的评估指标 PFI。 采用离散元法建立了基于精细化道砟仿真单元的 直剪模型,对不同脏污道床的剪切性能进行了研 究,基于离散元分析结果验证了道床评估指标 PFI 的合理性。

1 道床脏污的评估指标研究

造成道床脏污的原因主要包括两方面:一方面 是由于外部粉尘的侵入;另一方面是由于道砟颗粒 在循环荷载作用下破碎粉化所产生的细小颗粒。已 有研究^[2]表明道砟在荷载作用下的破碎粉化以及外 部粉尘侵入而导致的脏污占总脏污率的76%,其中 底砟入侵道床所导致的脏污约占总脏污率的13%, 其中道砟表面原有的脏污约占7%,其次由路基及 轨枕造成的脏污所占的比例很小,几乎可以忽略。

由于道床脏污的原因多种多样且真实情况下 道床脏污的程度各不相同,因此要研究脏污对道床 剪切性能的影响就必须结合道床脏污的合理评估 指标。

Selig and Waters^[3]提出通过道床脏污指标 FI 来 统计道床的脏污程度, *FI* 的表达式:

$$FI = P_4 + P_{200}$$
(1)

式中: *P*₄代表筛分后道砟粒径小于 4.75 mm 的道砟 所占质量的百分比; *P*₂₀₀为道砟粒径小于 0.075 mm 的颗粒所占质量的百分比乘以两倍的放大系数,这 是由于小粒径的颗粒对于道床的性能存在更大的 危害。取两者之和作为道床的脏污率。Tutumluer^[2] 通过实验证明道床的脏污率和 *FI* 之间存在线性关 系,但是该指标存在两个缺陷,一是无法统计粒径 大于 4.75 mm 的道砟颗粒的含量,二是无法考虑脏 污材料密度的影响,这样将导致该指标对道床排水 性能的估计存在误差,而道床脏污的主要病害就是 削弱了道床的排水性能。因此国内外学者们更倾向 于采用脏污物的体积比来评估道床。

Feldman 和 Nissen^[4]定义了 *PVC* 指标来统计脏 污材料以及新建道床孔隙率之间的关系,如下式 所示:

$$PVC = \frac{V_2}{V_1} \times 100\%$$
 (2)

该指标是通过统计脏污在道床总孔隙率中所 占的比率来评价道床脏污程度的。式中 V₁为道砟中 孔隙的总体积, V2为道砟中脏污颗粒所占的体积。 脏污颗粒以 9.5 mm 的粒径加以界定。该指标的优 点是考虑了不同道床深度对脏污的影响。认为在深 度距道床顶面 100 mm 处, 当 0% < PVC < 20% 则认为 道床洁净,当20%<PVC<29%则认为道床发生中度 污染,当 PVC>30%则认为道床重度污染。但该指 标主要存在两方面缺陷,一是测量道砟的体积十分 繁琐,二是该指标无法准确考虑污染物级配的影 响。例如脏污颗粒的粒径分布于4mm~9.5mm,那 么即便达到重度污染,道床仍有足够的排水性能。 文献[5]对相同力学状态下脏污率均为 30%, 由沙 子、淤泥、粘土三种不同粒径的道床脏污进行了研 究,其FI指标分别为30.7%、60%、60%, PVC指 标则分别为 55.9%、46%、44.5%。说明由于未考虑 脏污材料级配或密度, FI、PVC 在分析由不同粒径 颗粒所构成的脏污材料时存在缺陷。

Indraratna^[8]为避免 FI 与 PVC 的缺陷,在两者的基础上提出了道床评估指标 VCI,其表达式:

$$VCI = \frac{(1+e_{\rm f})}{e_{\rm b}} \times \frac{G_{\rm sb}}{G_{\rm sf}} \times \frac{M_{\rm f}}{M_{\rm b}} \times 100 \tag{3}$$

式中: *e*_f 为脏污颗粒的孔隙率; *e*_b 为清洁道砟的孔隙率; *G*_{sb} 为道砟材料的干密度; *G*_{sf} 为脏污材料的干密度; *M*_f 为脏污材料的干燥质量; *M*_b 为道砟的干质量。为便于理解,式(3)可改写成下式形式:

$$VCI = W \times \frac{V_{\rm f}}{V_{\rm b}} \times 100 \tag{4}$$

其中, $V_{\rm f}$ 、 $V_{\rm b}$ 分别为脏污颗粒的体积以及道砟的体积。 $W = (1 + e_{\rm f}) / e_{\rm b}$ 作为脏污材料的影响系数。该指标结合了前两种指标的优点,在原有基础上有了较大的该进。但该指标采用孔隙率之比作为脏污材料的影响系数是存在缺陷的,这是由于道砟孔隙率 $e_{\rm b}$ 的量值变化并不大,而脏污材料的孔隙率 $e_{\rm f}$ 却存在较大的变化。相同情况下,当脏污颗粒孔隙率较大时,道床的排水性能会比小孔隙率脏污时更好,而排水性能较好的道床其脏污程度评估结果应该相对较低。而按照VCI的评估方法,反而会得到脏污材料孔隙率越大,道床脏污程度越高的相反的结论。文献[5]的相关研究也佐证了这一点。此外,如FI指标所考虑的,小粒径的脏污会对道床的排水性能产生更大的危害,这一点也是VCI没有考虑的。

基于以上分析,本文希望在保留 VCI 指标优点的基础上得到一种能同时考虑材料脏污粒径,同时 又能够避免 VCI 指标中材料影响系数缺陷的方法。 因此本文在前人的基础上对 VCI 进行了改进,并结 合了 FI 指标的优点,构思了新的指标 PFI,其构思 的原理是在保持 VCI=脏污体积比率乘以材料属性影 响系数的基本思路上,结合 FI 指标在考虑脏污材料 影响系数上的优势,对 VCI 指标中存在缺陷的材料 影响系数进行优化。PFI 指标的表达式:

$$PFI = \left(\frac{M_{f1}}{\rho_{f1}} + \frac{M_{f2}}{\rho_{f2}} \cdot W\right) / \frac{M_{b}}{\rho_{b}}$$
(5)

其中:

$$W = \frac{M_{f2}}{M_{f1} + M_{f2}} + 1 \tag{6}$$

式中: ρ_{b} 为道砟的干密度; M_{b} 为道砟的质量; M_{fl} 、 ρ_{fl} 为颗粒粒径在 4 mm~9.5 mm 脏污材料的质量与 干密度, M_{f2} 与 ρ_{f2} 为颗粒粒径小于 4 mm 的脏污材 料的质量与干密度。式(5)的分母为道砟的体积,分 子为借鉴了 FI 指标中对小粒径脏污乘以放大系数 的方法所计算得的脏污颗粒体积。本文没有采用已 有指标中对小粒径脏污颗粒含量直接乘以2倍系数 的方法,而是采用了小颗含量比率加1的系数作为 放大系数,更精确的考虑了脏污中小颗粒含量对道 床脏污程度的影响。本文根据已有文献[9]中的不同 程度脏污道床的性能分析曲线对 PFI 指标进了标 定,在采用 PFI 对道床评估时,以 PFI 乘以 400% 值作为 PFI 的评估结果,由此,当 PFI 值为 100% 时,对应道床因脏污而导致失效的状态。当 PFI >70%时对应道床严重脏污的状态。当 30% < PFI</p>

2 离散元模型的建立与验证

2.1 精细化仿真道砟单元

现有研究对铁路道砟的离散元仿真多是采用 简单的球簇单元,而现实中道砟颗粒的形状极不规 则,简化的颗粒单元比传统的规则球体颗粒有了一 定改进,但在模拟真实道砟颗粒间的咬合力特性方 面还存在较大的局限。

本文对道砟的颗粒外形进了大量的分析,并结 合离散元无重叠算法,通过将规则球体组合粘接的 方式对道砟的颗粒外形进行了精细化的模拟,建立 了具有较高仿真程度的细观道砟颗粒模型,如图 1 所示。



图 1 精细化道砟仿真单元与真实道砟对比图 Fig1 Real ballast and delicate ballast simulation model

通过对大量道砟颗粒外形的分析,文本总结出 了八种最典型的道砟颗粒外形图,以此对道砟颗的 外形进行模拟,如图2所示。



2.2 道砟直剪模型

为分析道床的剪切力学性能,国内外学者^[7]倾 向采用大型直剪实验进行研究。本文基于上述精细 化道砟颗粒单元,建立了道砟直剪数值模型,以此 研究在外部荷载作用下不同脏污程度道床的剪切 力学性能,建立的道砟直剪模型如图3所示。



Fig.3 Ballast direct shear simulation model

道砟直剪盒由上下两个半盒组成,每个半盒的 尺寸为长 500 mm、宽 500 mm、高 250 mm。其中上 半盒的顶面可在竖直方向自由移动并施加固定的竖 向荷载。取钢材的摩擦系数作为直剪盒壁的摩擦系 数。在剪切数值实验时,上剪切盒保持不动,下剪 切盒以 0.05 mm/s 的速度水平移动。此处所采用的离 散元的仿真步长为 210⁻⁵ s,即在离散元仿真中道砟 剪切盒以 1×10⁻⁶ mm/time-step 的速度水平移动。

在对道床的脏污进模拟时,Huang H^[10]提出通 过减少颗粒间的摩擦角的方法来模拟脏污道床,该 方法虽然能够分析不同脏污程度道床剪切力学性 能的变化,但文献[11-12]认为这种方法不仅无法 考虑脏污的体积,还将导致颗粒间的法向应力被过 小的估计,与实际情况有所差别。

由于造成道床脏污的主要原因是小体积的脏 污颗粒侵入道砟间的空隙,且煤炭粉尘是最为典型 的脏污材质^[3]。因此本文采用在道砟箱中加入脏污 球体颗粒的方式来模拟由煤炭颗粒造成的道床脏 污。模型的相关力学参数参考了文献[13]的取值, 如表1所示。

包含脏污颗粒的直剪数值模型如图4所示,其 中黑色小球为脏污颗粒。

本文主要通过分析图3中剪切盒虚拟切平面上的作用力来研究道床内部的力学状态。其中道床虚 拟切平面的切向力与法向力可由式(7)及式(8)计算 得出:

$$F_{\rm S} = \sum_{i=1}^{n} F_{\rm DX} \tag{7}$$

$$F_{\rm N} = G_{\rm UB} + N \tag{8}$$

式(7)中 F_s为虚拟切平面的总切向力, F_{DX}为下 半部分剪切盒各墙面的切向作用力,由于剪切盒的 下半部分由 5 面墙体组成,则 n=5。垂直于剪切方 向的墙面取其法向力作为该墙面的 F_{DX} 值,平行于 剪切方向的墙面取其切向力作为该墙面的 F_{DX} 值。

式(8)中 F_N为虚拟切平面的总法向力,G_{UB}为上剪切盒中道砟的重力,N为作用于剪切盒顶面的外荷载。

表1 模型力学参数取值表

Table 1	Micromechanical parameters adopted for
	ballast and shear box model

参数名称	取值
道砟颗粒法向接触刚度/(N/m)	0.52×10^{8}
道砟颗粒切向接触刚度/(N/m)	0.52×10^{8}
脏污颗粒法向接触刚度/(N/m)	1.27×10^{4}
脏污颗粒切向接触刚度/(N/m)	1.27×10^{4}
墙体法向接触刚度/(N/m)	1×10 ⁸
墙体切向接触刚度/(N/m)	1×10 ⁸
道砟颗粒的密度/(kg/m ³)	2700
脏污颗粒的密度/(kg/m ³)	800
道砟颗粒的摩擦系数	0.8
脏污颗粒的摩擦系数	0.2
剪切盒壁摩擦系	0.1



图 4 脏污道砟直剪模型示意图 Fig.4 Schematic diagram of fouled ballast direct shear simulation model

由于剪切盒以 V=0.05 mm/s 的速度移动,则切 平面的面积随时间 t 的变化关系为 L(L-vt),其中 L 为剪切盒的宽度,其值为 500 mm,由此切平面的 法向及切向应力可由式(9)及式(10)进行计算:

$$\sigma_n = \frac{F_{\rm N}}{L(L - vt)} \tag{9}$$

$$\sigma_s = \frac{F_{\rm S}}{L(L-vt)} \tag{10}$$

2.3 模型的验证

为验证模型的准确性,将本文模型所得出的模 拟结果的与文献[7]中的实测结果进行了对比。为加 强研究结果的可靠性,本文针对每个模型分别施加 三种不同的顶面荷载。图 5、图 6 为无脏污情况下 本文模型与文献实测中直剪仪在顶面荷载分别为 171 kPa、241 kPa、310 kPa 作用下水平位移与剪切 应力间的曲线图。



图 5 文献中道砟模型的剪应力-位移曲线图

Fig.5 Stress-displacement behavior of ballast in literature





Fig.6 Stress-displacement behavior of ballast in this paper

由图 5 和图 6 的对比可以看出本文模型的仿真 结果与实测数据具有较好的吻合度。

3 计算结果分析

为进一步探明脏污对道床横向阻力的影响规 律,本文采用球体颗粒对不同粒径的脏污进行模 拟。球体颗粒按粒径分为两类,第一类用于模拟较 大粒径如煤炭碎屑所造成的脏污,即球体的粒径介 于4mm~9.5mm。第二类用于模拟细小碳粉颗粒造 成的脏污,球体的粒径在 0 mm~4 mm,其中模型 1、 模型 2、模型 3、均采用第一类较大粒径的脏污, 以此作为第一组模型来研究不同脏污程度对道床 剪切力学性能的影响规律。模型 2、模型 4、模型 5 在 VCI 指标下的脏污评估结果相同,但脏污颗粒 的粒径有所不同,以此作为第二组模型。通过分析 第二组模型的剪切力学性能,将已有指标 VCI 的评 估结果与本文所建议指标 PFI 的分析结果进行对 比。以此研究这两种指标对于脏污道床力学性能评 估的准确性。具体参数如表 2 所示。

表 2 直剪模型参数表 Table 2 Parameter of direct-shear model

参数名称	模型1	模型 2	模型 3	模型 4	模型 5
道砟的质量/kg	211.2	211.2	211.2	211.2	211.2
脏污的质量/kg	3.5	6.7	11.9	6.7	6.7
大粒径脏污比率/(%)	100	100	100	50	0
小粒径脏污比率/(%)	0	0	0	50	100
VCI	20	40	70	40	40
PFI	22	43	76	53	72

五种模型在三种顶面荷载作用下的剪切应力-



位移曲线如图 7、图 8、图 9、图 10、图 11 所示。



五种模型的在不同顶面荷载下的剪切应力均 值如表3所示。

表	3	直剪模型剪应力均值表
Table 3	Μ	ean direct-stress value of model

顶面荷载		剪	应力均值/k	Pa	
	模型1	模型2	模型3	模型4	模型5
170 kPa	83.5	70.3	61.1	67.6	64.7
240 kPa	169.7	131.3	116.5	128.8	121.2
310 kPa	306.5	281.8	251.2	275.3	264.7
VCI指数	20	40	70	40	40
PFI 指数	22	43	76	53	72

对第一组模型在三种顶面荷载作用下的三条 应力-位移曲线求均值,得到图12。



对第二组模型在三种顶面荷载作用下的三条应 力-位移曲线求均值,得到图13。



Fig.13 Stress-displacement behavior of Model Group2

结合表3与图12的结果可以看出,脏污会导致 道床剪切性能的显著下降,这是由于脏污影响了道 床的粘滞性,从而加剧道床的流变^[15],且道床剪切 性能下降的幅度与道床的脏污的程度有直接关系。 通过VCI与PFI指标的评估结果可以看出,在脏污粒 径相同的情况下两者均能较好的反应道床的脏污 情况。

结合表2与图13的结果可以看出, 脏污材料的 粒径对道床的剪切性能有明显的影响, 且在材质相 同的情况下, 较小粒径的脏污会引起道床剪切性能 的进一步降低, 该结论在文献[16]中得到了验证。 通过对比VCI与PFI的评估结果可以看出, 在VCI评 估结果同为40%的情况下, 由三种不同粒径脏污所 组成道床的剪切强度存在明显的差异, 说明VCI指 标在考虑脏污材料的粒径方面存在着不足, 而PFI 指标相比于VCI能较好的考虑这一因素, 更接近真 实的情况。

4 结论

本文对国内外典型的道床脏污评估指标进行 了综合分析,并在此基础上提出了新的道床评估指 标PFI。采用离散元法建立了道砟直剪数值模型,对 不同脏污情况的道床进行了数值实验,基于分析结 果,对VCI、PFI两种指标的评估结果进行了分析, 得到了如下结论:

(1) 基于精细化道砟仿真单元建立了能较好模 拟道砟直剪实验的数值模型,并对不同脏污情况下 道床的剪切性能进行了分析。

(2) 道床脏污会显著降低道床的剪切性能,其 下降幅度与道床的脏污程度有关。且相同脏污程度 道床的力学性能有所不同,其剪切性能还与脏污的 材质、粒径等因素有关。

(3) 脏污材料的粒径对道床剪切性能具有显著 影响,且对于相同的材质,小粒径的脏污会引起道 床剪切性能的进一步降低。

(4) VCI与PFI均能较好的评估脏污程度对道床 状态的影响,但VCI在考虑脏污材料粒径方面还有 所不足,而PFI能够较为充分的考虑这一因素,更 接近真实情况,建议在工程中采用。

参考文献:

[1] 高亮. 轨道工程[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2010: 66-67.

Gao Liang. Track engineering [M] Beijing: China Railway Press Publishers 2010: 66–67. (in Chinese)

- Tutumluer E, Dombrow W, Huang H. Laboratory characterization of coal dust fouled ballast behavior [C]. Nashville: AREMA 2008 Annual Conference & Exposition September, 2008: 21-24.
- [3] Selig E T, Waters J M. Track geotechnology and substructure management [M]. London: Thomas Telford, 1994: 81-85.
- [4] Feldman F, Nissen D. Alternative testing method for the measurement of ballast fouling: percentage void Contamination [C]. Wollongong, New South Wales, Cost Efficient Railways Through Engineering (CORE 2002), 2002: 10-13.
- [5] Indraratna B, Su L, Rujikiatkamjorn C. A new parameter for classification and evaluation of railway ballast fouling [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, 48(2): 322-

326.

- [6] 严颖,季顺迎.碎石料直剪实验的组合颗粒单元数值 模拟[J].应用力学学报,2009,26(1):1
 Yan Ying, Ji Shunying. Effects of particle shape on shear strength of discrete media [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 26(1): 1.(in Chinese)
- [7] Huang H, Tutumluer E. Discrete element modeling for fouled railroad ballast [J]. Construction and Building Materials, 2011, 25(8): 3306-3312.
- [8] Rujikiatkamjorn C, Indraratna B, Ngo N T, et al. A laboratory study of railway ballast behaviour under various fouling degree [C]. Bangkok: 5th Asian Regional Conference on Geosynthetics, 2012: 507–514.
- [9] 曾树谷. 铁路散粒体道床[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997: 328-331.
 Zeng Shugu. Railway discrete ballast track [M]. Beijing: China Railway Press Publishers, 1997: 328-331. (in Chinese)
- [10] Huang H, Tutumluer E, Hashash Y M A, et al. Discrete element modeling of aggregate behavior in fouled railroad ballast [J]. Geotechnical Special Publication No, 2009, 192: 33-41.
- [11] Lu M, McDowell G R. Discrete element modelling of railway ballast under triaxial conditions [J]. Geomechanics and Geoengineering: An International Journal, 2008, 3(4): 257-270.
- [12] Ni Q, Powrie W, Zhang X, et al. Effect of particle properties on soil behaviour: 3-D numerical modelling of shear box tests [J]. Numerical methods in geotechnical engineering, 2000, 96: 58-70.
- [13] Ngo N T, Indraratna B, Rujikiatkamjorn C. DEM simulation of the behaviour of geogrid stabilized ballast fouled with coal [J]. Computers and Geotechnics, 2014, 55: 224-231.
- [14] Indraratna B, Tennakoon N C, Nimbalkar S S, et al. Behaviour of clay-fouled ballast under drained triaxial testing [J]. international journal of soil mechanics, 2013 63(5): 410-419.
- [15] 高亮, 刘秀波. 流变力学理论在铁路轨道结构力学研 究中的应用[J]. 工程力学, 2001, 18(6): 117-123.
 Gao Liang, Liu Xiubo. Application of the theologic mechanics theory to track structures of railway [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(6): 117-123. (in Chinese)
- [16] Stahl M, Konietzky H. Discrete element simulation of ballast and gravel under special consideration of grain-shape, grain-size and relative density [J]. Granular Matter, 2011, 13(4): 417-428.