

文章编号: 1000-4750(2015)08-0080-07

# 对有限覆盖无网格法中悬挂节点的研究

刘 丰, 李春光, 郑 宏, 王志芬

(岩土力学与工程国家重点实验室, 中国科学院武汉岩土力学研究所, 武汉 430071)

**摘 要:** 当前基于Galerkin法的无网格法都只在域内和边界上布置节点。基于无网格方法背景网格独立于节点布置这一性质, 该文探讨了无网格域外布置悬挂节点的可行性, 提出了一种统一的、均匀的无网格节点布置方案, 并设计了相应的背景网格方案, 称为有限覆盖无网格法。通过数值算例讨论了悬挂节点对精度的影响, 在此基础上讨论了悬挂节点的数目、节点影响域的形状、尺寸以及背景积分方案等对求解精度的影响, 并给出了推荐的做法。算例结果表明, 悬挂节点能够显著提高求解精度, 尤其是边界附近的应力精度。

**关键词:** 无网格伽辽金法; 节点布置; 悬挂节点; 前处理; 背景积分; 精度

**中图分类号:** O241 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.01.0046

## STUDY ON THE HANGING NODES IN THE FINITE-COVER-BASED MESHFREE METHOD

LIU Feng, LI Chun-guang, ZHENG Hong, WANG Zhi-fen

(State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics,

Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** For the meshfree methods based on the Galerkin method, all nodes are distributed in the computational domain or on domain boundaries. This study explores the feasibility of using hanging nodes for meshfree methods as the nodal arrangement is independent of background cells. A unified and uniform strategy of the nodal arrangement is proposed, along with a corresponding scheme for the distribution of background cells. Numerical examples are employed to discuss the following influential factors: the necessity of using hanging nodes, the number of hanging nodes, the shape and size of nodal influential domain, and the background integral scheme. Results show that the proposed method can greatly improve the accuracy of meshfree methods, especially in the calculation of stresses near domain boundaries.

**Key words:** EFG; nodal arrangement; hanging nodes; pretreatment; background integration; precision

20 世纪 90 年代以来, 国际计算力学界里兴起了无网格方法的研究热潮。比较有代表性的无网格方法有区域型无网格法如光滑粒子流体动力学 (SPH)<sup>[1]</sup>, 无网格伽辽金法(EFG)<sup>[2]</sup>, 再生核质点法(RKPM)<sup>[3]</sup>, 无网格局部 Petrov-Galerkin 法(MLPG)<sup>[4]</sup>等, 以及边界型的无网格法如奇异边界元法<sup>[5]</sup>, 边界粒子法<sup>[6]</sup>等。其中 EFG 是使用最为广泛的无网格

法, 已被用于很多领域。关于无网格的综述可参考文献[7-8]。

理论上, 由于无网格方法只需要一系列的离散点来求解问题域, 不需要网格对其进行连接, 因此其前处理相比于有限元大为简化了。然而大部分的需要背景积分的无网格都采用有限元的方式来布置节点和背景积分网格。这种做法固然简单, 但却

收稿日期: 2014-01-14; 修改日期: 2014-06-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172313)

通讯作者: 刘 丰(1987-), 男, 湖北人, 博士生, 主要从事工程力学方面的研究(E-mail: liuf\_hb@sina.com).

作者简介: 李春光(1973-), 男, 河南人, 副研究员, 博士, 从事岩土力学方面研究(E-mail: cgli@whrsm.ac.cn);

郑 宏(1964-), 男, 湖北人, 三峡大学特聘教授, 博士, 从事岩土力学方面的教学与研究(E-mail: hzheng@whrsm.ac.cn);

王志芬(1988-), 女, 河北人, 硕士, 主要从事岩土工程方面的研究(E-mail: 849385750@qq.com).

没有摆脱有限元的束缚,并没有真正地简化前处理过程,从求解精度上讲也不是最佳选择。除了与无网格自适应相关的研究<sup>[9-12]</sup>以外,很少有人专门研究适合无网格的节点布置方案。在流形元<sup>[13]</sup>中,节点可以存在于求解区域外,即所谓的悬挂节点。田荣<sup>[14]</sup>将流形元的思想用于 EFG 中,形成了有限覆盖无单元方法,并指出节点可以布置在求解域之外。樊成<sup>[15]</sup>将流形元的覆盖思想同 Kriging 插值结合起来,形成了有限覆盖 Kriging 插值无网格法,并将其用于岩体断裂。然而他们均没有分析悬挂节点对求解精度的影响。在纯粹的无网格法中,域外存在节点的做法很少,更没有系统的研究。Tiago 等<sup>[16]</sup>提到节点可以落在求解域的外面,只要它的影响域够大,并提到这是一种非常规的做法;Rabczuk 等<sup>[11]</sup>提出了一种规则网格布点方案并设计了相应的自适应措施,然而文中的做法不能确保域外有足够的点,也没有探讨域外点的存在对精度的影响。Dolbow 等<sup>[17]</sup>指出背景积分网格和节点影响域边界相一致时,能够最大限度的保证积分精度,显然如果采取圆形影响域的话,这一条件不可能满足。因此我们尝试提出一种新的无网格布点方案-统一、均匀地布置能够完全覆盖求解域的节点,这些节点能够存在于求解域外。这里将这种做法称为有限覆盖无网格法。在此基础上本文探讨了这些域外悬挂节点对精度的提高作用,讨论了悬挂节点的数目以及影响域形状、尺寸对求解精度的影响,并验证了该方法的收敛性。最后发展了相应的背景积分方案,在方便处理复杂区域的同时,尽量保证求解精度。最后得到了一些有益的结论。

## 1 统一均匀的布点方案

在无网格方法中,节点负责插值,背景积分网格仅用于积分,节点布置和背景网格可以是相互独立的。这一性质给了我们布置节点很大的自由度,为布置悬挂节点提供了可能性。另一方面,如果仅在域内布置节点,则域内节点数较多而使得位于域内积分点的插值精度高于靠近边界的积分点,这显然是有失偏颇的。

基于这些,我们认为,统一、均匀且覆盖全域的节点布置方案是一个很好的选择,边界附近的悬挂节点同样参与插值。这样处理会带来一些好处。首先,布置节点时不考虑区域边界可以大大简化布置节点的难度;其次,悬挂节点的存在可以避免选

点时的偏颇,理论上可以提高边界处的插值精度。另外,均匀的节点能够最好的逼近场函数,对求解是大有裨益的。事实上,如果可以选择规则的点来逼近场函数,我们没有理由去使用一系列杂乱无章的点,而且规则点的生成比杂乱无章的点的生成更容易。

这种节点布置方案的基本思路:首先,统一布置节点,覆盖整个求解域;然后将多余的点进行剔除,剩下就是有效的参与插值的节点,称为有效节点。对于一般问题,统一均匀的节点布置详细流程如图 1 所述。

- 1、确定求解域的范围
- 2、将范围适当扩大,并均匀地布满节点,使得外部能有一定的节点
- 3、对节点循环,找出与材料边界的距离  $D < \beta d_c$  的点和材料边界内部的点的并集 U
- 4、如果材料内部没有孔洞, U 即为有效点集合,转到 6, 否则转到 5
- 5、找出各孔洞内部且与边界距离  $D > \beta d_c$  的点的并集 I, 那么 U-I 即为有效点集合
- 6、结束

图 1 统一均匀的节点布置流程图

Fig.1 Flow chart of unified and uniform nodal arrangement

理论上,影响域同求解域  $\Omega$  有交集的节点我们都应该保留参与插值。然而值得注意的是,如果域外一点的影响域同  $\Omega$  的交集非常小,这会导致方程病态,影响求解精度。笔者的方案是使用结点到  $\Omega$  的距离来判断节点是否为有效节点,而不同于文献[11]中使用的方法。若不考虑孔洞,假设节点间距为  $d_c$ ,域外节点  $i$  与  $\Omega$  边界的最近距离  $D_i$ ,当  $D_i < \beta d_c$  时,节点  $i$  为有效节点,否则无效。其中  $\beta$  为无量纲的量,具体取值在 2.2 节中探讨。这种选点方案跟文献[9]中的作法相比,区别在于域外能够有更多的点,而且能保证这些点不会导致奇异,这样能最大限度的利用到域外点为插值带来的好处。

以图 2 所示的带椭圆孔的不规则区域为例,最终的有效点为加圆圈的点。

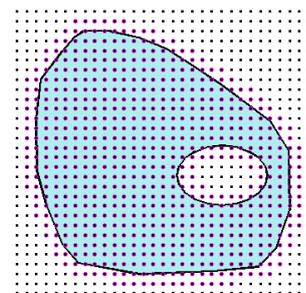


图 2 统一均匀的布点方案

Fig.2 Unified and uniform nodal arrangement

## 2 有限覆盖无网格法精度研究

有限覆盖无网格法从插值的角度看,同 EFG 一样采用移动最小二乘构造形函数。本文统一使用线性基函数,并使用拉格朗日乘子法施加本质边界条件,具体的细节参见文献[2, 18]。

为了选出精度最佳的方案,本文接下来将分别探讨悬挂节点的存在与否、悬挂节点的数目、节点影响域形状和尺寸,以及背景积分方案等对精度的影响。

### 2.1 悬挂节点及节点影响域形状对精度的影响

为了验证悬挂节点以及节点影响域形状对求解精度的影响,我们以悬臂梁为例进行分析,按照平面应力进行计算。模型如图 3 所示,参数选取为:  $P=-1000$ ; 弹性模量  $E=1 \times 10^5$ ; 泊松比  $\nu=0.3$ ;  $D=12$ ;  $L=48$ 。该问题的解析解可以参考文献[19]。

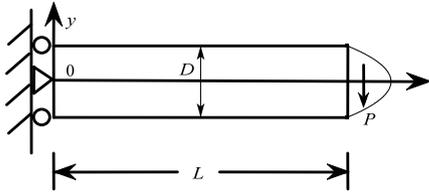


图 3 悬臂梁模型

Fig.3 Computation model of cantilever beam

考虑两种域外增加悬挂节点的方式: 方案 1 为边界与节点布置吻合, 方案 2 则不吻合, 分别如图 4(a)和图 4(b)所示。为了对照, 我们同样计算了常规 EFG 的结果和有限元中四边形等参元的结果, 这两者均采用规则的节点。对于方案 1、常规 EFG 和有限元方法, 背景积分均为在域内点组成的规则网格上采用  $4 \times 4$  的高斯积分。对于方案 2, 同边界相交的背景网格先用边界切割出处于内部的有效部分, 再采用  $4 \times 4$  的高斯积分。本文权函数均选择三次样条权函数, 分别使用圆形影响域和矩形影响域两种方式计算。对于圆形影响域权函数为:

$$w_I(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3 & , r \leq 1/2 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4/3r^3 & , 1/2 < r \leq 1 \\ 0 & , r > 1 \end{cases}$$

其中  $r = d_I / r_w$ ,  $d_I$  为节点与采样点的距离,  $r_w$  为影响域尺寸。

对于矩形影响域权函数为:

$$w_I(x) = w\left(\frac{x-x_I}{d_{x_I}}\right)w\left(\frac{y-y_I}{d_{y_I}}\right)$$

其中:  $d_{x_I}$ 、 $d_{y_I}$  为  $x$ 、 $y$  方向的影响域尺寸;  $w$  同

圆形影响域一样采用三次样条权函数。由于本文节点布置不用考虑边界影响, 可取  $d_{x_I} = d_{y_I}$ 。假设节点间距为  $d_c$ , 则圆形影响域尺寸为  $r_w = \alpha_s d_c$ , 矩形影响域尺寸  $d_{x_I} = d_{y_I} = \alpha_s d_c$ , 其中  $\alpha_s$  为无量纲影响域尺寸。本节取  $\alpha_s = 2$ 。

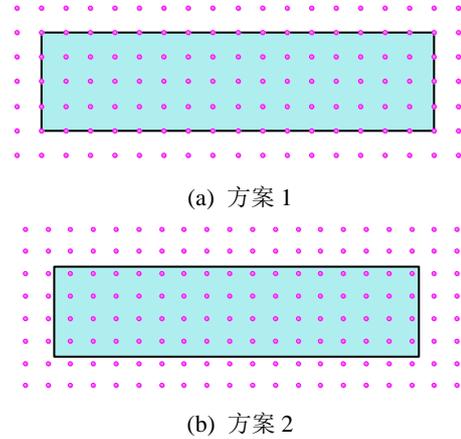


图 4 悬臂梁节点布置

Fig.4 Nodal arrangement of cantilever beam

为了便于观察, 对比  $x=L/2$  处剪应力的误差(数值解减去解析解), 如图 5 所示, 图例后括号内的数字为节点数(或有效节点数), 节点数相对接近, 其中不同影响域形状的方案 2 节点数不同, 原因是几个角处的节点按圆形影响域计算时影响不到计算区域。此时常规 EFG 和四边形等参元在  $x=L/2$  上均有 7 个节点, 因而这里方案 1、方案 2 选取相同位置的 7 个点比较。其中有限元的节点应力通过高斯点外推平均得到<sup>[20]</sup>。可以看出常规 EFG 和四边形有限元在边界附近的精度都不高, 四边形有限元表现最差, 而增加悬挂节点的两种方案的误差明显小很多。同时可以看到, 矩形影响域的结果均要比圆形影响域的结果要略好, 这也验证了背景积分网格和节点影响域边界相一致时, 能够最大的保证积分精度。

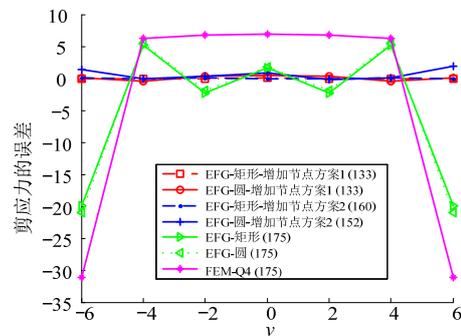


图 5 悬臂梁  $x=L/2$  处剪应力误差对比

Fig.5 The comparison of shear stress error at  $x=L/2$  of cantilever beam

### 2.2 域外增加悬挂节点数量的探讨

从 2.1 节可以看出，域外增加节点确实能够提高求解精度，那么应该增加多少节点最佳呢？首先增加的节点必须能够影响到材料区域，而这显然跟节点的影响域有关。比如前述增加节点的方案一中无量纲影响域尺寸  $\alpha_s=2$ ，如果外层再增加一圈节点，那么这些节点刚好不能影响到材料区域，这些节点也就无效。如果  $\alpha_s$  增大，外层能够影响到材料区域的节点会更多。一般情况下  $\alpha_s$  的取值范围在 1.5~4.5。为了便于对比，按照方案一布置节点，即边界与节点布置吻合，分别计算不同的  $\alpha_s$  下增加不同圈数的节点对精度影响。比较  $y=0$  边上的竖向位移和  $x=L/2$  边上的剪应力的精度情况。考虑到部分点上解析解为零，因此取平均绝对误差作为误差指标，即：

$$\text{ErrorUy} = \sum_{I=1}^N \frac{|u_{yI}^{\text{num}} - u_{yI}^{\text{exact}}|}{N}$$

$$\text{ErrorTau} = \sum_{I=1}^N \frac{|\tau_I^{\text{num}} - \tau_I^{\text{exact}}|}{N}$$

其中： $N$  为考察点的个数； $u_{yI}^{\text{num}}$ 、 $\tau_I^{\text{num}}$  分别竖向位移和剪力的数值解； $u_{yI}^{\text{exact}}$ 、 $\tau_I^{\text{exact}}$  为相应的解析解。

考察同一算例，域内的节点均为  $6 \times 24$ ，权函数均采用矩形影响域，使用前述背景积分方式。最终位移和剪力的误差结果如图 6、图 7 所示，其中图例中 EFG 表示常规 EFG，不增加节点，EFG+1 表示增加一圈节点，其它同理。首先从  $\alpha_s$  的角度来看， $\alpha_s$  太小或太大时都不利于提高精度，太小时参与插值的点不够，太大时失去了插值的局部特性。另一方面，当  $\alpha_s < 3$  时，域外增加节点的做法对精度的提高较为明显，而当  $\alpha_s$  太大时，增加节点的做法甚至可能减低精度。不难看出， $\alpha_s=2$  时并增加一圈节点的求解精度最高，此时背景积分网格和节点影响域边界正好一致，是最佳的选择。另外  $\alpha_s=4$  并增加三圈结点时精度也很高，但此时计算量明显偏高。其次增加两圈精度也较为理想。值得注意的是，若求解域不规则，节点布置与边界不重合，增加点的圈数不是整数，如图 4(b)所示。按照 2 节的选点方案，若想增加一到两圈的节点， $D_i < \beta d_c$  中的  $\beta$  应满足  $1 < \beta < 2$ ，本文建议  $\beta=1.5$ ，这样既能保证靠近边界的积分点具有与域内积分点大致相同的节点数参与插值，又能保证悬挂节点影响足够多的积分点。

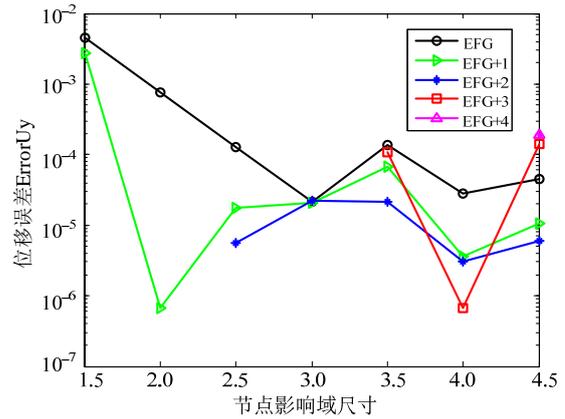


图 6 不同影响域大小及增加节点的圈数对应的位移误差  
Fig.6 Displacement error for different support size and different adding nodes

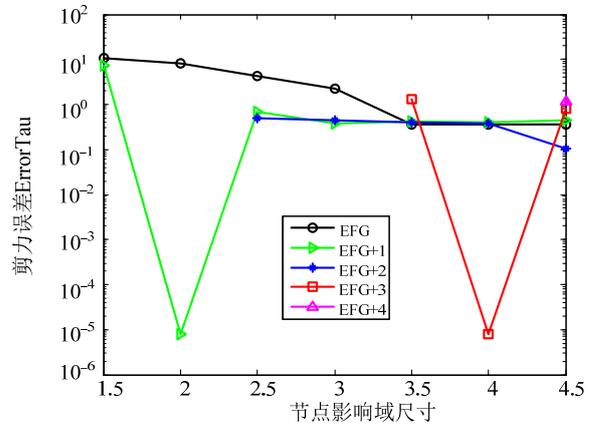
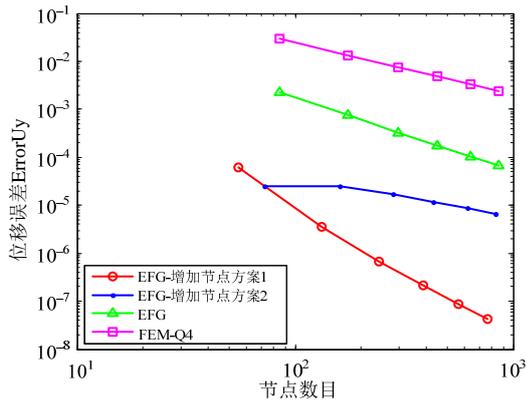
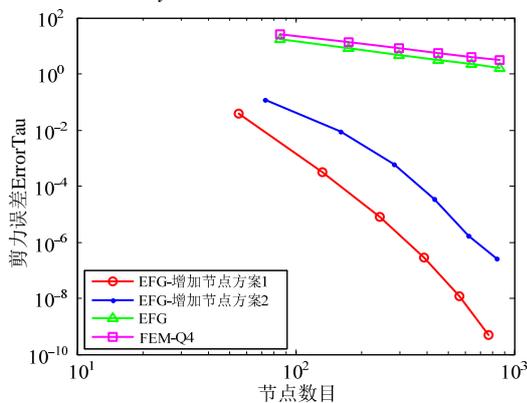


图 7 不同影响域大小及增加节点的圈数对应的剪力误差  
Fig.7 Shear stress error for different support size and different adding nodes

### 2.3 存在悬挂节点方案的收敛性

本节基于同一算例探讨存在悬挂节点方案的收敛性。按照前面的结论，本节统一取  $\alpha_s=2$ ，权函数采用矩形影响域，分别计算了 2.1 节中增加悬挂节点的两种方案、常规 EFG 和有限元四节点等参元四种情况，其位移和应力的平均误差随节点数增多的收敛情况分别如图 8 和图 9 所示，显然这几种方法都能够收敛。其中常规 EFG 的位移和应力的误差均小于有限元四边形单元的结果，其中位移更为明显。增加节点的两种方案，无论应力精度还是位移精度都明显的优于常规 EFG 的精度，其中应力精度相比常规 EFG 提高了好几个量级。另一方面，边界与节点布置不吻合的方案 2 同吻合的方案 1 相比，精度略低，依然保持着相当可观的精度。这说明即便边界与节点布置不吻合，域外布置节点的做法依然能大大提高求解精度。这对域外布置悬挂节点的做法适用于非规则区域有重要意义。

图8 悬臂梁  $y=0$  处竖向位移收敛图Fig.8 Convergence of vertical displacement at  $y=0$  of cantilever beam图9 悬臂梁  $x=L/2$  处剪应力收敛图Fig.9 Convergence of shear stress at  $x=L/2$  of cantilever beam

## 2.4 背景积分方案

背景积分是 EFG 重要的一环, 很大程度地影响其求解精度, 对有限覆盖无网格的影响也是一样。对于规则区域, 四边形的背景网格积分是最佳的选择, 然而当求解域非规则时, 四边形背景网格的布置难度很大。文献[2]中使用了一种简单的背景积分方式: 均匀的布置高斯点覆盖整个求解域, 只有域内的高斯点参与积分。这样的做法简单但精度会受损。另外一个常用的方法是使用 Delaunay 三角形或者有限元网格作为背景网格。由于悬挂节点的存在, 常用的 Delaunay 三角形网格的方案需要略加改变。本文建议的做法是:

- 对边界循环, 用一系列的点将边界细分;
- 找出处于求解域内的有效点;
- 将细分边界得到的点和域内有效点一起

Delaunay 三角剖分;

d) 对每个三角形求形心坐标, 判断形心是否在域内, 以确定三角形是否在域内, 删掉形心不在域内的三角形;

- 循环域内的三角形, 按照 Hammer 积分布置

高斯点。

值得注意的是, 这里节点布置与求解域边界可能不吻合, 边界上没有足够的点, 直接利用边界和域内的节点进行 Delaunay 三角剖分会导致边界附近狭长单元的出现。因此需要先将边界细分, 这样可以确保边界附近同内部有差不多密度的背景网格。对于非凸区域, Delaunay 三角剖分得到的三角形有可能在求解域外, 因此需要判断三角形是否有效。

本文使用 MATLAB 平台编制程序, 有现成的函数能够完成前述的布置节点和生成背景网格的任务。例如, meshgrid 可以生成规则点, delaunay 可以实现三角剖分, inpolygon 可以用于判断点是否处于多边形内, 等等。

下面通过带圆孔的无限大板检验这种背景积分方式的精度。考虑一个受  $x$  方向单向拉伸的带圆孔无限大板, 该问题的解析解可以参考文献[19]。由于对称性, 我们考虑  $1/4$  区域, 如图 10 所示,  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 5$ , 圆孔半径为 1。计算中取弹性模量  $E=3 \times 10^7$ , 泊松比  $\nu=0.3$ 。下边和左边分别施加  $y$  和  $x$  方向的位移约束, 右边和上边施加解析的应力边界条件。

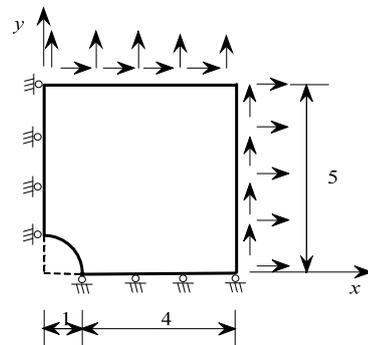
图10 带圆孔的无限大板  $1/4$  区域模型

Fig.10 Quarter model for the plate with a central hole

有效节点及背景网格如图 11 所示。为了对比, 按照文献[2]中的思路布置高斯点的方式也做了计算, 不过为了提高精度, 其中内部使用  $4 \times 4$  的高斯积分点, 而与边界相交处使用  $8 \times 8$  的高斯积分点。两种做法中  $1/4$  圆孔均用 15 个点离散, 前一种方案三角形内使用 7 点高斯积分, 总共 2751 个高斯点, 后一种方案域内的有效高斯点为 4181 个。在  $x=0$  边上考察其  $\sigma_x$  和  $u_y$  的精度, 结果如图 12、图 13 所示。无论是位移还是应力, 本文背景积分得到的解和解析解都吻合得很好, 而第二种背景积分方案在边界处的应力误差很大。本文背景网格方案能够

一定程度的满足节点影响域与背景网格边界重合这一条件，因而能有较好的精度，重要的是这种做法简洁统一，鲁棒性强。另外值得注意的是，一般用有限元网格时，圆孔附近节点密度会明显大于其它处的密度，而本文采用统一、均匀的节点布置，圆孔附近解的精度依然很高，体现了本文做法的优越性。

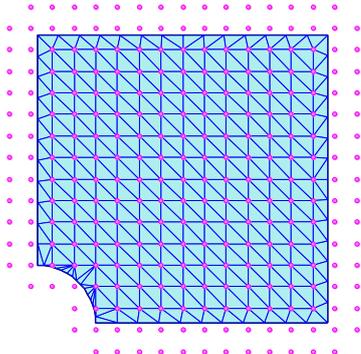


图 11 有效节点布置及背景网格

Fig.11 Nodal arrangement and background mesh

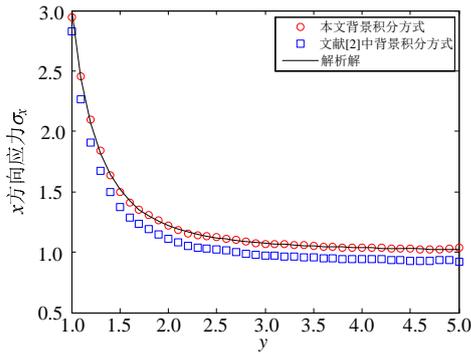


图 12 带圆孔的无限大板  $x=0$  上  $\sigma_x$  分布

Fig.12  $\sigma_x$  stress distribution at  $x=0$  for the plate with a central hole

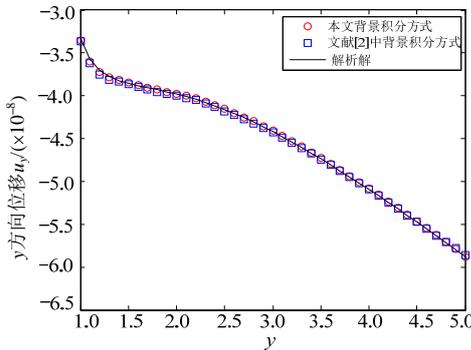


图 13 带圆孔的无限大板  $x=0$  上  $u_y$  分布

Fig.13  $y$ -displacement distribution at  $x=0$  for the plate with a central hole

### 3 计算实例-带孔支架

最后用本文的做法计算一个 ANSYS 里的经典算例：受集中力作用的带孔支架。如图 14 所示，支架内含有三个圆孔，其中左边两个圆孔半径为 10，圆孔内部为固定约束，右边圆孔半径为 30，圆孔底端受向下的集中力作用。支架总的长宽分别为 150 和 100，左边两个圆角半径为 20，圆心为两小圆孔的圆心，右边大的圆角半径为 50，圆心为大圆孔的圆心。按照本文前述的方案，最终的有效节点及背景网格如图 14 所示，其中有效节点的数目为 965。取弹性模量  $E=3 \times 10^7$ ，泊松比  $\nu=0.3$ ，集中力  $F=-1000$ ，按平面应力计算。将大圆孔的顶点 K 作为观测点对其位移应力进行分析。为了对比，该问题同样用 ANSYS 进行了计算，并且采用了两种节点布置：方案 A，节点数为 970，和无网格的有效节点数相近；方案 B，节点数为 33439，作为参考解。结果对比如表 1 所示。很显然，如果以方案 B 为参考解，无论是位移还是应力，本文结果比方案 1 更接近参考解，其中应力解优势非常明显，方案 A 的  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  与参考解相差较大。这个算例说明本文的方法不仅可以适合复杂区域，而且有很高的精度，具有潜在的工程价值。

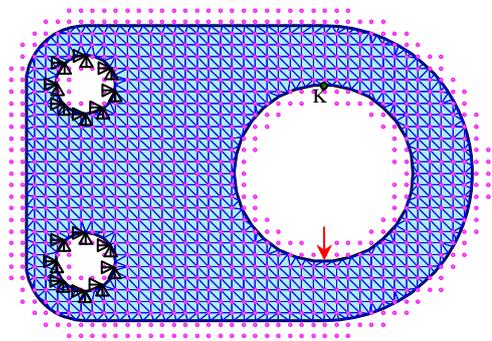


图 14 带孔支架模型及其有效节点布置和背景网格布置  
Fig.14 Nodal arrangement and background mesh of bracket with holes

表 1 本文结果与 ANSYS 结果对比

Table 1 The comparison of proposed method and ANSYS

|            | 节点个数  | $u /$<br>( $\times 10^{-5}$ ) | $v /$<br>( $\times 10^{-4}$ ) | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ |
|------------|-------|-------------------------------|-------------------------------|------------|------------|-------------|
| 本文方法       | 965   | -1.01                         | -1.97                         | -27.18     | -0.78      | -1.08       |
| ANSYS 方案 A | 970   | -0.96                         | -1.96                         | -28.84     | -3.03      | -6.49       |
| ANSYS 方案 B | 33439 | -1.10                         | -1.98                         | -27.60     | -0.64      | -0.88       |

## 4 结论

基于无网格方法背景网格独立于节点布置这一性质, 本文探讨了无网格域外布置悬挂节点的可行性。为了能够最大限度的提高精度, 本文建议了一种统一、均匀的节点布置方案, 形成了有限覆盖无网格。这种方案布置的节点不需要与计算区域吻合, 边界附近的悬挂节点同样参与插值, 这样大大简化了前处理。同时推荐使用两倍的节点间距作为节点影响域的大小, 采用矩形影响域方案, 域外增加的节点以一到两层为佳。数值结果表明, 域外悬挂节点的存在可以大大提高无网格的求解精度, 尤其是边界附近的应力精度。另外为了使所提的节点布置方案能够适用于复杂区域, 本文改进了Delaunay三角剖分背景网格方案。改进的方案实施简单而且精度很高, 使得本文的布点方案鲁棒性更强, 从而真正具有了工程实用价值。

### 参考文献:

- [1] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis [J]. *The Astronomical Journal*, 1977, 82: 1013—1024.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(2): 229—256.
- [3] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20(8/9): 1081—1106.
- [4] Atluri S, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 117—127.
- [5] Gu Y, Chen W, Zhang C Z. Singular boundary method for solving plane strain elastostatic problems [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48(18): 2549—2556.
- [6] Fu Z J, Chen W, Yang H T. Boundary particle method for Laplace transformed time fractional diffusion equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 235: 52—66.
- [7] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. *力学进展*, 2009, 39(1): 1—36.  
Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree methods and their applications [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1—36. (in Chinese)
- [8] Nguyen V, Rabczuk T, Bordas S, Duflo M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 79(3): 763—813.
- [9] Lu H, Chen J S. Adaptive Galerkin particle method [M]// Griebel M, Schweitzer M A. *Meshfree methods for partial differential equations* [J]. Berlin Heidelberg: Springer, 2003, 251—265.
- [10] Le C V, Askes H, Gilbert M. Adaptive element-free Galerkin method applied to the limit analysis of plates [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37/38/39/40): 2487—2496.
- [11] Rabczuk T, Belytschko T. Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(11): 1559—1582.
- [12] 彭翀, 袁会娜, 张丙印. 无网格自动加密方法及其在土体裂缝分析中的应用[J]. *工程力学*, 2013, 30(6): 231—235.  
Peng Chong, Yuan Huina, Zhang Bingyin. Automatic node refinement for meshfree method and its application in soil crack analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(6): 231—235. (in Chinese)
- [13] Shi G H. *Manifold method of material analysis* [C]. Minneapolis, Minnesota: Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing, 1991: 57—76.
- [14] 田荣. 连续与非连续变形分析的有限覆盖无单元方法及其应用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2000.  
Tian Rong. Finite-cover-based element-free method for continuous and discontinuous deformation analysis with applications in geotechnical engineering [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2000. (in Chinese)
- [15] 樊成. 有限覆盖 Kriging 插值无网格法及其在岩体断裂中的应用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2007.  
Fan Cheng. Kriging interpolation meshless method based on finite cover technique and its application in fracture analyses of rock mass [M]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese)
- [16] Tiago C, Pimenta P M. An EFG method for the nonlinear analysis of plates undergoing arbitrarily large deformations [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32(6): 494—511.
- [17] Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods [J]. *Computational Mechanics*, 1999, 23(3): 219—230.
- [18] Liu G R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method* [M]. New York: CPC Press, 2009: 201—210.
- [19] Timoshenko S P, Goodier J N, Abramson H N. *Theory of elasticity* [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1970: 37—888.
- [20] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009: 146—150.  
Zhu Bofang. *The principle of finite element method and its application* [M]. Beijing: China Water Power Press, 2009: 146—150. (in Chinese)