运　　筹　　学

Operations Research

整 数 规 划

西南交通大学经济管理学院

§1 基本概念

- 线性规划的一个重要的假设是决策变量可取非整数的连续值。然而这一假设在很多情况下不能满足实际问题的要求；
- 对决策变量有整数要求的数学规划问题称为整数规划问题；
- 整数规划是数学规划的一个重要分枝，有广泛的应用背景，如指派问题、背包问题、旅行推销商问题都是整数规划问题；
- 整数规划又是最难求解的问题之一，至今还没有找到有效算法。

例**1**：邮局一年**365**天都要有人值班，每天需要的职工数因业务忙闲而异，据统计邮局每天需要的人数按周期变化，一周内每天需要的人数如下：

一	二	三	四	五	六	日
17	**13**	**15**	**19**	**14**	**16**	**11**

排班要符合每周连续工作五天，休息两天的规定。如何排班可使用人最少。

邮局排班模型

解：设 x_i 为第 i 天开始上班的人数：

$$
\begin{aligned}
min: z = {} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
s.t. \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}
$$

LP解： $x = (1.3, 3.3, 2, 7.3, 0, 3.3, 5)^T$ $z = 22.3$

整数解：$x = (4, 4, 2, 6, 0, 4, 3)^T$ $z = 23$

例2: 服装厂可生产西服、衬衫和羽绒服。生产不同服装要使用不同设备，该厂可从租赁公司租用这些设备（每种设备可租用多台）。服装厂每月可用人工工时为 3000小时，该厂如何安排生产可使每月利润最大。市场需求、设备租金和其它经济参数见下表：

序	服装种类	市场需求	租金元/台	生产成本	销售价格	人工工时	设备工时	可用工时/台
1	西服	150	5000	280	400	5	3	300
2	衬衫	800	2000	30	40	1	0.5	500
3	羽绒服	350	3000	200	300	4	2	300

服装厂生产模型

解：令 y_i 为租赁 i 类设备的数量; x_i为各类服装的生产量, 具体模型为：

$$
\begin{aligned}
\max\ & 120x_1+10x_2+100x_3-5000y_1-2000y_2-1000y_3 \\
s.t.\ & 5x_1+x_2+4x_3 \le 3000 \\
& 3x_1-300y_1 \le 0 \\
& 0.5x_2-500y_2 \le 0 \\
& 2x_3-300y_3 \le 0 \\
& x_1 \le 150 \\
& x_2 \le 800 \\
& x_3 \le 350 \\
& x_i,\ y_i \ge 0 \quad i=1,2,3
\end{aligned}
$$

例3：某电力公司预测明年用电需求将达到80亿度电，且在5年内每年增加用电量20亿度。电力公司现有发电能力50亿度，可供选择的新电站共有4个：

	发电量（亿度）	建设投资（百万元）	年运行费（百万元）
电站 1	70	200	15
电站 2	50	160	8
电站 3	60	180	13
电站 4	40	140	6

请构造整数规划模型，在满足电力需求前提下使电力公司五年内投入的建设投资和运行费用总和最小。

动态投资问题模型

解: y_{it}: 第 t 年是否建第 i 个电站的0-1整数变量;

x_{it}: 第 t 年第 i 个电站的发电量;

目标函数: 投资与运行费最小

$$\min: \sum_i \{I_i \sum_t y_{it} + C_i \sum_t (6 - t) y_{it}\}$$

$$= 200\,(y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15})$$

$$+ 15\,(5y_{11} + 4y_{12} + 3y_{13} + 2y_{14} + y_{15})$$

$$+ 160\,(y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25})$$

$$+ 8\,(5y_{21} + 4y_{22} + 3y_{23} + 2y_{24} + y_{25})\ldots.$$

模型约束

（1）发电量约束:

$$\sum_i x_{it} + 50 \geq 80 + 20(t - 1) \quad \forall\, t$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 50$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 70$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \geq 90$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \geq 110$$

模型约束

（2）发电能力限制约束:

$$x_{it} \le CAP_i \ \textstyle\sum_{j=1}^{t} y_{ij} \qquad \forall\ i, t$$

$$x_{11} \le 70\, y_{11}$$

$$x_{12} \le 70(y_{11} + y_{12})$$

$$x_{13} \le 70\ (y_{11} + y_{12} + y_{13})$$

$$x_{14} \le 70\ (y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14})$$

$$x_{15} \le 70\ (y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15}) \ \ldots\ldots$$

$$x_{21} \le 50 y_{21}; \quad x_{22} \le 50(y_{21} + y_{22})\ ;$$

模型约束

（3）电站只能建一次约束:

$$\sum_t y_{it} \le 1 \qquad \forall\, i$$

$$y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+y_{15} \le 1$$

$$y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}+y_{25} \le 1$$

$$y_{31}+y_{32}+y_{33}+y_{34}+y_{35} \le 1$$

$$y_{41}+y_{42}+y_{43}+y_{44}+y_{45} \le 1$$

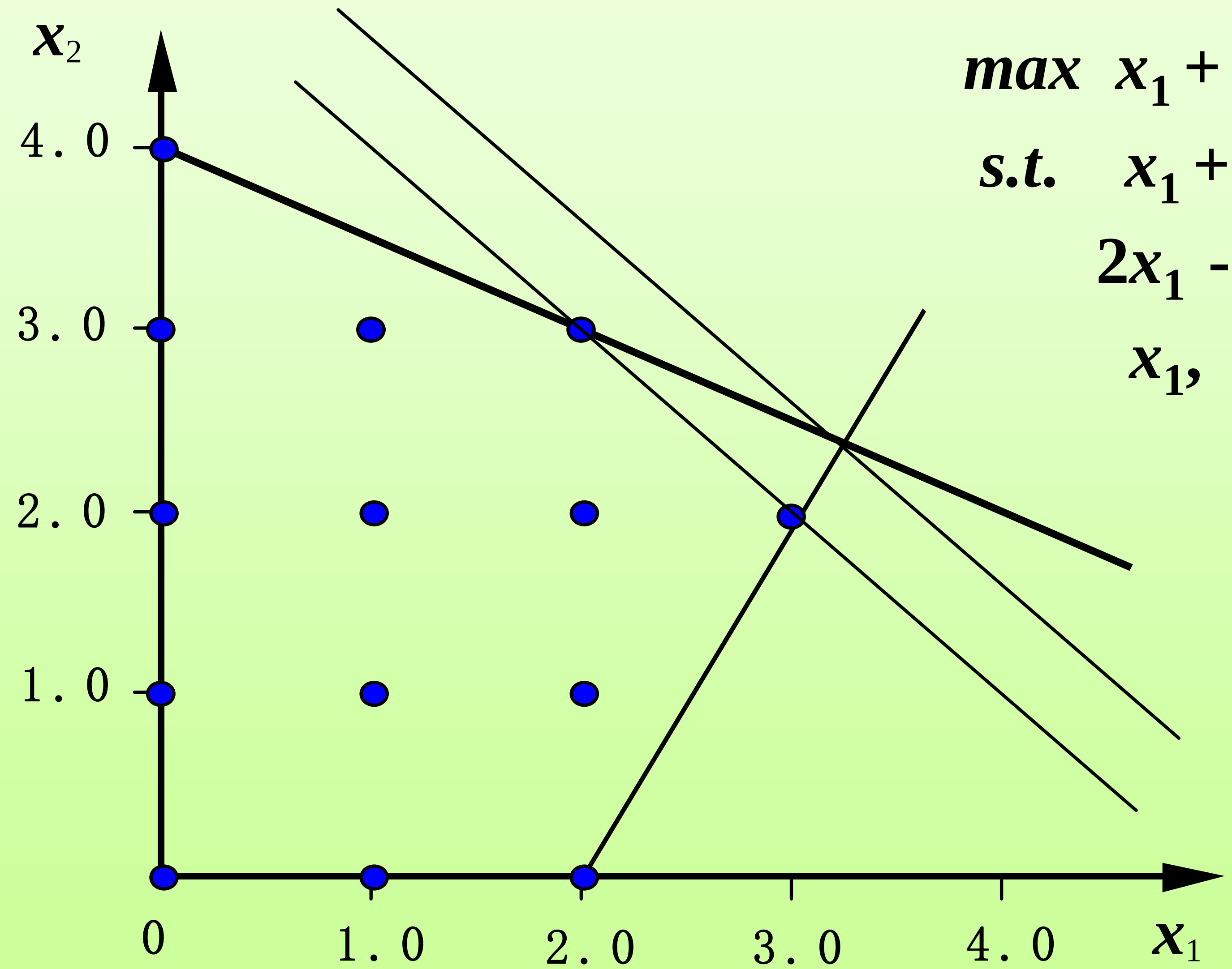
（4）非负约束:

$x_{it} \ge 0$, y_{it} 为0-1整数变量

整数规划与线性规划的关系

- 整数规划 ＝ 相关的线性规划 ＋ 整数约束
- 整数规划是约束得更紧的问题， 它的可行域是其相关线性规划问题可行域的一个子集；
- 整数解的数目远少于线性规划的解，只要可行域有界，整数解的数目有限；整数规划的求解难度远大于线性规划。
- 整数规划分类
  - 纯整数规划：所有决策变量取整数值；
  - 混合整数规划：部分决策变量取整数值；
  - **0-1**整数规划：整数变量只能取**0**或**1**。

整数规划与线性规划的关系



$$\max\ x_1 + x_2$$

$$s.t.\quad x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$2x_1 - x_2 \le 4$$

x_1, x_2 取整数

求解整数规划方法

- 穷举法：方法简单，只可解小问题，计算量很大；对**0-1**整数规划，计算量为2^n，按指数增长；
- 四舍五入法：解的质量差，有时无法得到可行解
- 分枝定界: 计算效率高, 应用广泛;
- 割平面法: 有理论意义, 但计算效率较低；
- 启发算法: 效率高, 但不能保证找到最优解, 可解大规模问题。

穷举法

方法简单，只可解小问题，计算量很大；对0-1整数规划，计算量为2^n，按指数增长：

n	计算量	计算时间
10	1.02×10^{3}	1.02毫秒
20	1.05×10^{6}	1.05秒
30	1.07×10^{9}	18 分钟
40	1.10×10^{12}	13 天
50	1.73×10^{15}	36 年
100	1.27×10^{30}	4 亿亿年

凑整法

- 例：$max: z = 3x_1 + x_2$

  s.t. $2x_1 + x_2 \le 5$

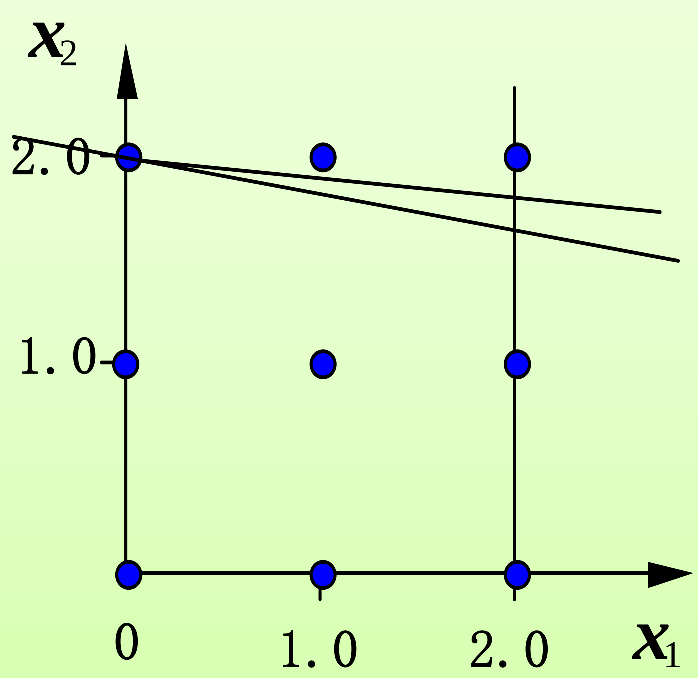
  $2x_1 + 3x_2 = 5$

  x_1, x_2 为非负整数
- 松弛问题解: $x = (2.5, 0)^T$, 四舍五入得不到可行解;
- 整数最优解: $x = (1, 1)^T$

凑整法

- 例：$max: \quad x_1 + \quad 5x_2$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & x_1 + 10x_2 \le 20 \\
& x_1 \qquad\quad \le \; 2 \\
& x_1, x_2 \text{ 为非负整数}
\end{aligned}
$$



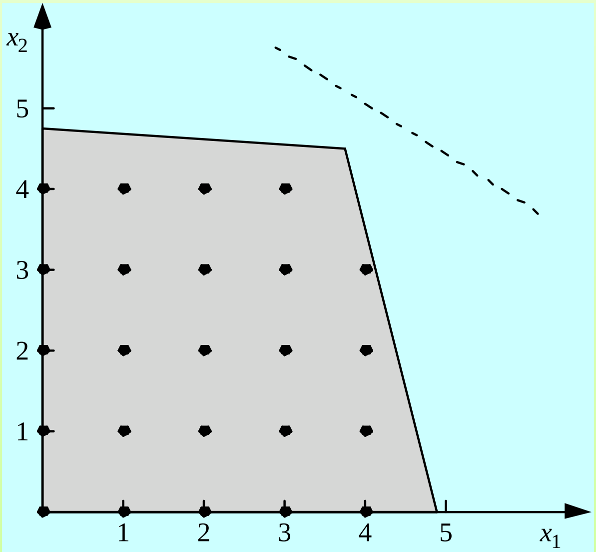
- 松弛问题解：$x = (2, 1.8\,)^T \quad z = 11$
- 四舍五入解：$x = (2, 2.0\,)^T$ 不是可行解；

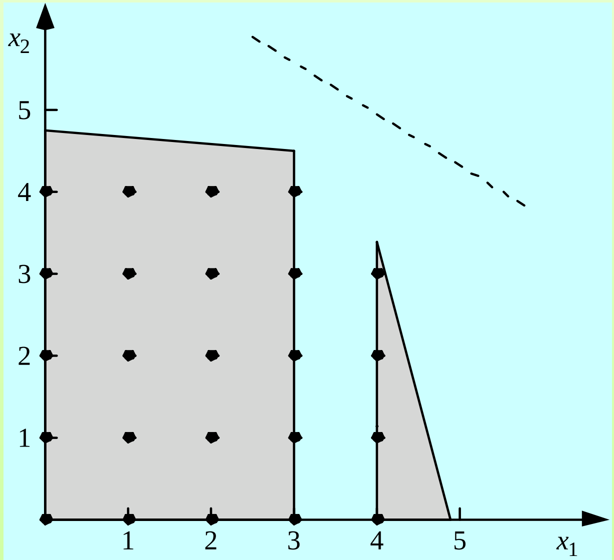
$$x = (2, 1.0\,)^T \quad z = 7$$

- 整数最优解：$x = (0, 2.0\,)^T \quad z = 10$

§ 2 分枝定界法

分枝定界技术(Branch-and-Bound Technique)





分枝定界算法举例

整数规划问题：

$max: z = x_1 + x_2$

$s.t.\ \ 6x_1 + 2x_2 \le 17$

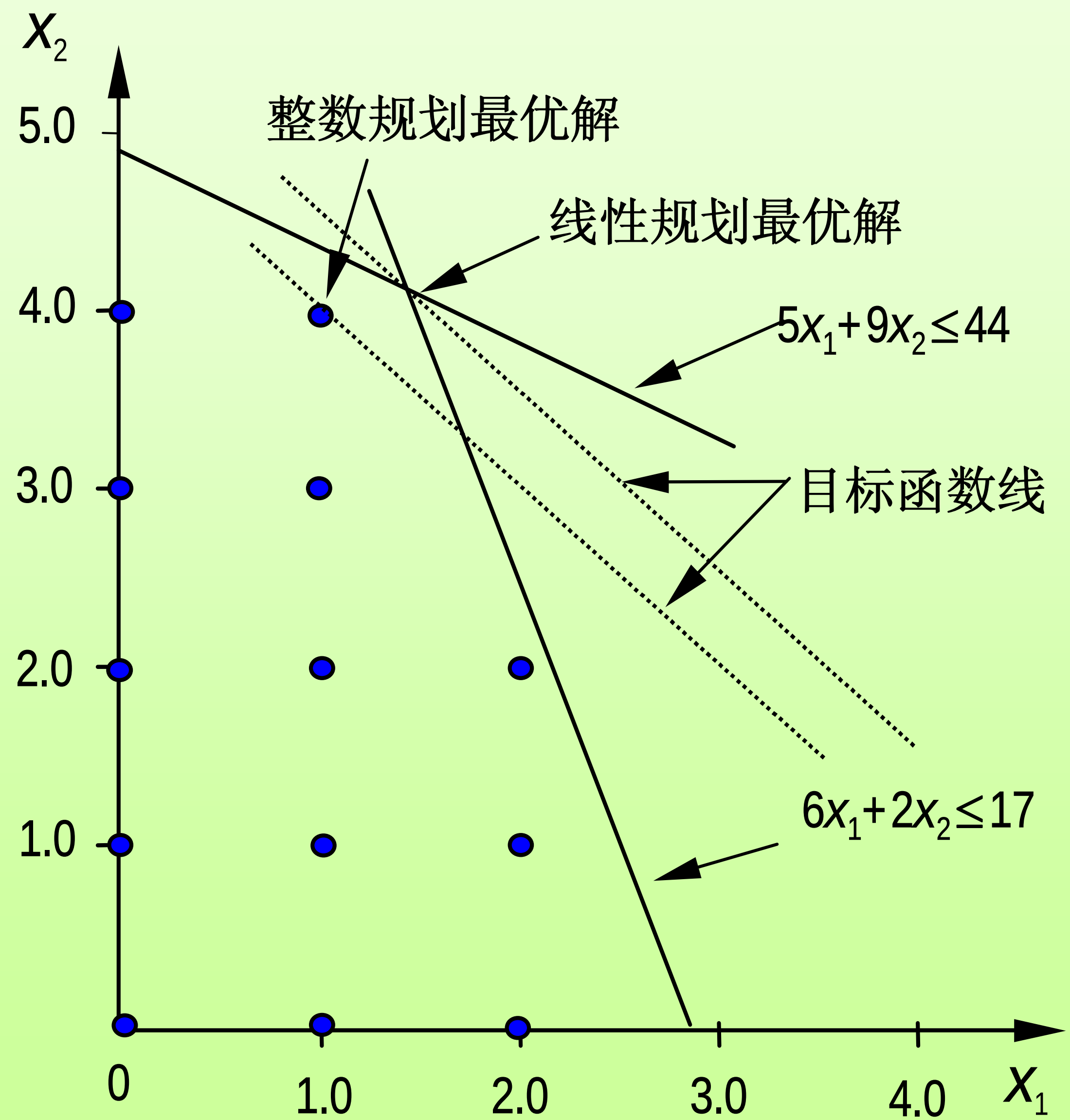
$5x_1 + 9x_2 \le 44$

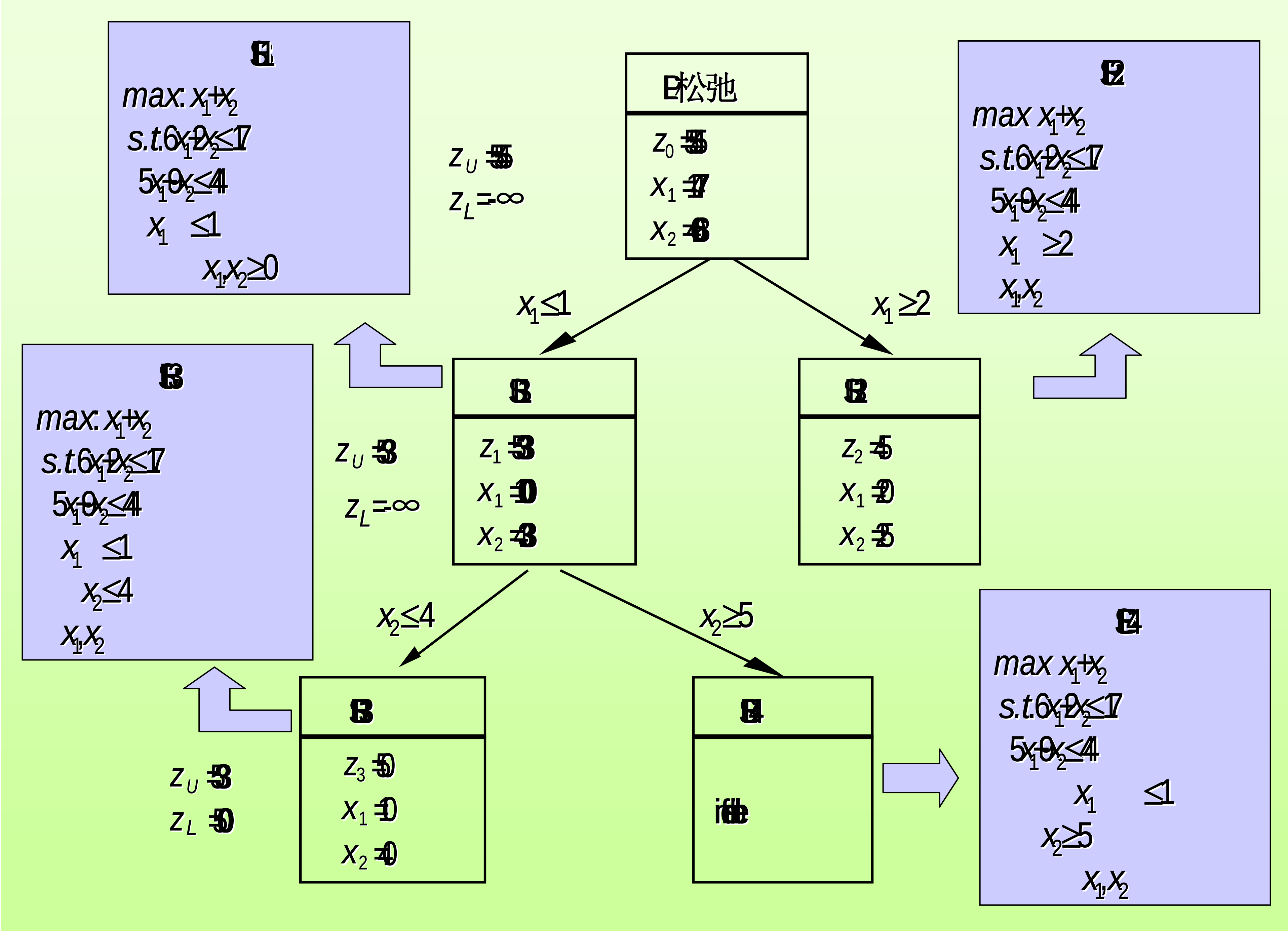
x_1, x_2 为整数

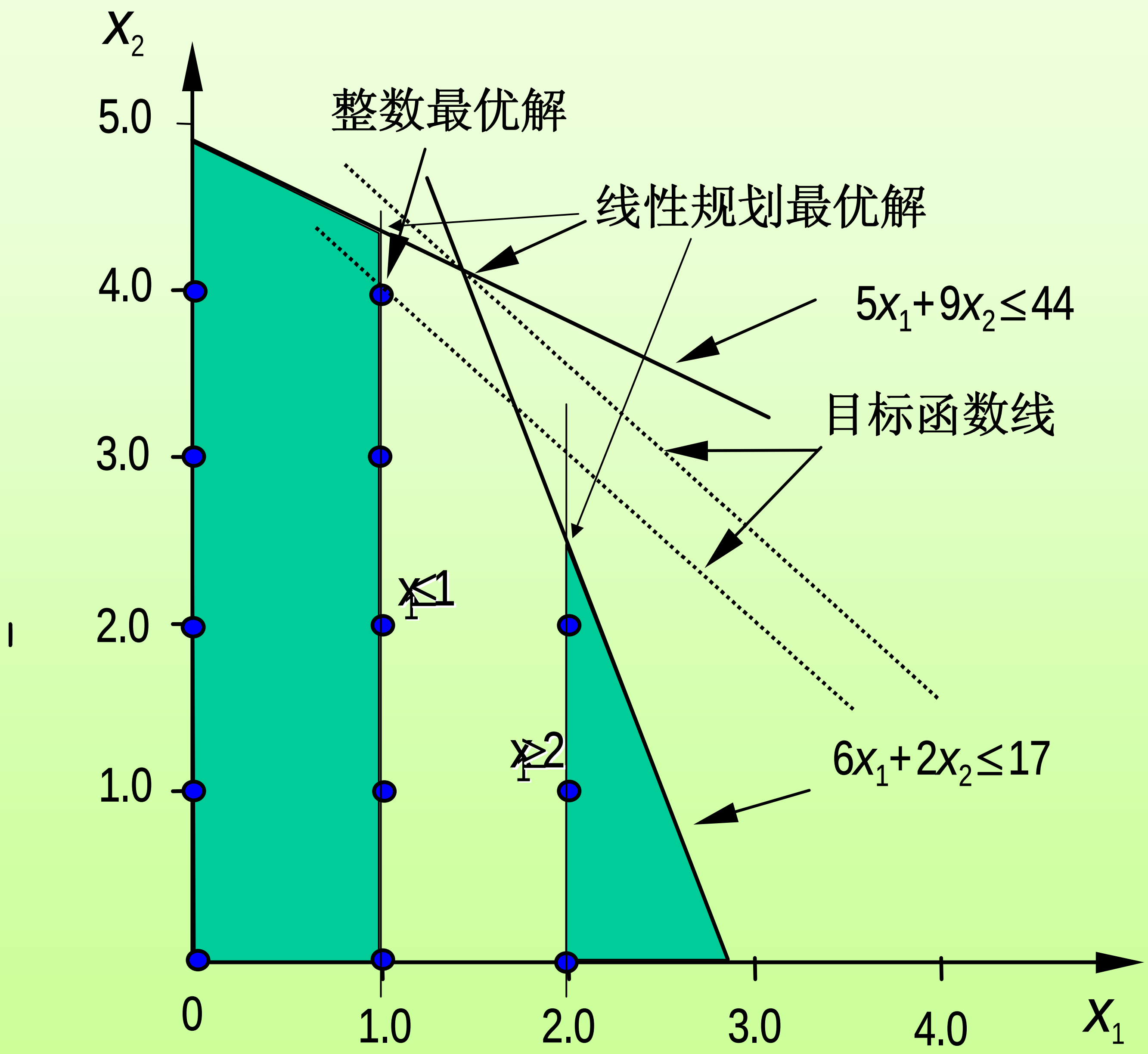
按线性规划求解：

$x_1 = 1.477, x_2 = 4.068$

$z = 5.545$




松弛
max x1+x2
z_L=-∞
x1≤1
x1≥2
x2≤4
x2≥5



x_2
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
整数最优解
线性规划最优解
$5x_1+9x_2\leq 44$
目标函数线
$x_1\leq 1$
$x_1\geq 2$
$6x_1+2x_2\leq 17$
1.0
2.0
3.0
4.0
x_1

§ 3 割平面法

$$
\begin{cases}
\max \quad z = x_1 + x_2 \\
-x_1 + x_2 \le 1 \\
3x_1 + x_2 \le 4 \\
x_1, x_2 \ge 0 \\
x_1, x_2 \text{为整数}
\end{cases}
$$

c_j		1	1	0	0	b_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	x_2	0	1	3/4	1/4	7/4
1	x_1	1	0	-1/4	1/4	3/4

$$x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{7}{4}$$

将方程中的系数和右侧常数分解成整数和非负真分数两部分

$$(1+0)x_2 + \left(0 + \frac{3}{4}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{4}\right)x_4 = 1 + \frac{3}{4}$$

将上式中自变量带整数系数的部分移到等号右侧，得

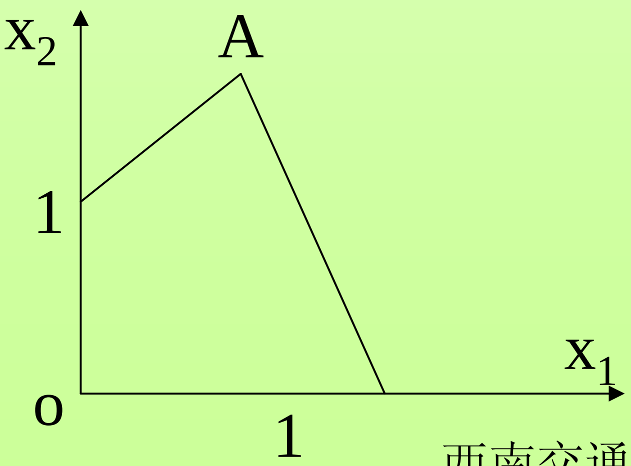
$$\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} + (1 - x_2) \quad \text{得到} \quad \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \ge \frac{3}{4}$$

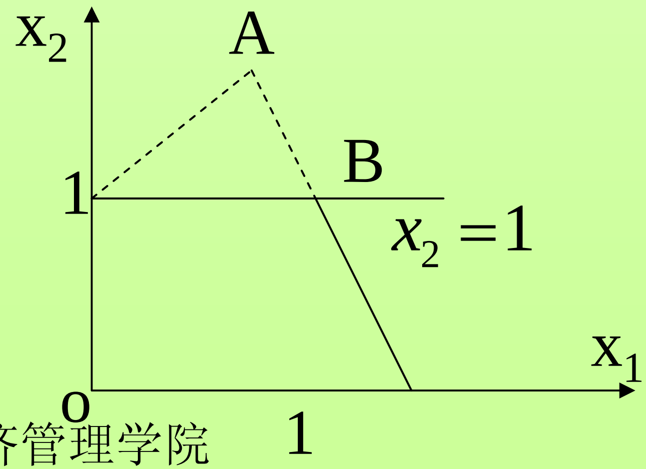
为了用原来（决策）变量表示，将

$x_3=1+x_1-x_2$ 和 $x_3=1+x_1-x_2$ 代入上式，得 $x_2\le 1$

然后将 $x_2\le 1$ 加入到原规划约束中,得到

$$
\begin{cases}
\max \quad z = x_1 + x_2 \\
-x_1 + x_2 \le 1 \\
3x_1 + x_2 \le 4 \\
x_2 \le 1 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$





§4　0-1 规划

- （1）0-1 变量可以数量化地描述开与关、取与弃、有与无等逻辑现象。
- （2）一些其它非0-1 规划可以化为0-1 规划来处理。

一、模型实例

投资问题 假定有资金b元可用于投资，共有n 个项目可供选择，每个投资项目所需的投资金额和收益现值分别为a_j 和c_j，现在问如何确定投资方案，使总的收益值最大。

解 令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{对项目 j 投资；} \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

模型

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ x_j = 0 \text{或} 1 \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

只有选择项目l时，才考虑是否选择项目k，增加约束

$$x_k \le x_l$$

背包问题　已知一个背包的容积为b，现有n 种物品可以装入，物品j的体积和使用价值分别为a_j 和 c_j，问应如何搭配装入，使得既不超过背包的容积，又使装入的物品总使用价值最大。

解　令

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{装入物品} j; \\ 0 & \text{否则。} \end{cases}$$

模型

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ x_j = 0 \text{或} 1 \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

固定费用问题　有A、B、C 三种资源可用来生产甲、乙、丙三种产品。资源量、单位产品利润和单位产品资源消耗量见下表所示。由于不同产品的生产组织不同，因而涉及的固定费用不同，组织三种产品生产的固定费用也见下表。现在要求制定一个生产计划，使总收益最大，试建立数学模型。

	甲	乙	丙	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件利润	4	5	6	
固定费用	100	150	200	

解 设x_j是第j种产品的产量

令
$$y_j=\begin{cases}1 & \text{生产第j种产品（即 } x_j>0\text{）；}\\ 0 & \text{不生产第j种产品（即 } x_j=0\text{）。}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\max z=4x_1+5x_2+6x_3-100y_1-150y_2-200y_3\\ 2x_1+4x_2+8x_3\le 500\\ 2x_1+3x_2+4x_3\le 300\\ x_1+2x_2+3x_3\le 100\\ x_1\le M_1y_1\\ x_2\le M_2y_2\\ x_3\le M_3y_3\\ x_j\ge 0\text{且为整数，}\quad j=1,2,3\\ y_j=0\text{或}1,\ j=1,2,3\end{cases}$$

其中常数M_j为的x_j上界，可取M_1=100 ，M_2=50， M_3=100/3

多块择问题

r组约束条件中，要求至少有 q 组约束得到满足，而其他 r-q 组约束可以满足，也可以不满足

（1） $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \quad k = 1, \cdots, r$

引入0-1变量y_k，及一个充分大的常数M_k，则

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k + y_k M_k \quad k = 1, \cdots, r \\ \sum y_k \le r - q \end{cases}$$

y_k= 0 对应的约束为起作用约束

（2） $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k \quad k = 1, \cdots, r$

引入0 -1变量 y_k，及一个充分大的常数 M_k，则

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k - y_k M_k \quad k = 1, \cdots, r \\ \sum y_k \leq r - q \end{cases}$$

$y_k = 0$ 对应的约束为起作用约束

要求一个约束起作用时

$$\begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geq b_k - y_k M_k \quad k = 1, \cdots, r \\ \sum y_k = r - 1 \end{cases}$$

若整数规划中，变量满足 $0 \le x_l \le 2^k$,则

$$x_l = y_k 2^k + y_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + y_1 2^1 + y_0$$

其中y_0 、y_1、 … 、 y_k 取 0 或 1

离散值的变量

设 x_j 只能取值{a_1，a_2， … ，a_k}，则可表示为

$$\sum_{i=1}^{k} a_i y_i = x_j \quad \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \quad y_i = 0\text{或}1$$

跳跃变量

x_j的值或者为0，或者为 $L \le x_j \le U$ 则可表示为

$$Ly \le x_j \le Uy \quad y = 0\text{或}1$$

非线性整数规划问题线性化

$$\min\ f = x_1^2 + x_2 x_3 - x_3^5$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3$$

$$x_j = 0\text{或}1 \quad j = 1,2,3$$

引入 0-1 变量 y $\qquad y = \begin{cases} 1 & \text{当 } x_2 = x_3 = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

则 $\qquad x_2 + x_3 - y \le 1$

$$-x_2 - x_3 + 2y \le 0$$

当 $x_2 = x_3 = 1$ 时，$y \ge 1$ 和 $y \le 1$ ⟹ $y=1$

当 x_2或 x_3中至少有一个为0时， $\quad y \le (x_1 + x_2)/2 \quad y = 0$

$$
\begin{cases}
\max\ f = x_1 + y - x_3 \\
-2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3 \\
x_2 + x_3 - y \le 1 \\
-x_2 - x_3 + 2y \le 0 \\
x_j = 0\text{或}1 \\
y = 0\text{或}1
\end{cases}
$$

集合覆盖问题

- 有集合 S = {1, 2, ..., m}被一系列 S的子集 $\varphi_i \in S$ i = 1, 2, ..., n 覆盖，并要求使用的子集最少。

例：有集合S={1, 2, 3, 4, 5}, 子集φ_1={1, 2}, φ_2={1, 3, 5}, φ_3={2, 4, 5}, φ_4={1}, φ_5={4, 5}, 求最小的覆盖子集。

一个可能的覆盖为φ_1, φ_2, φ_3, 另一个 为φ_2, φ_3；该问题可以用一个整数规划来求解

集合覆盖问题模型

令x_i为是否使用集合 i 的决策变量

$$\begin{aligned}
\min:\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
s.t.\quad x_1 + x_2 + x_4 &\ge 1 \\
x_1 + x_3 &\ge 1 \\
x_2 &\ge 1 \\
x_3 + x_5 &\ge 1 \\
x_2 + x_3 + x_5 &\ge 1 \\
x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad i=1, \ldots, 5
\end{aligned}$$

若右边项大于1，则为赋权的集合覆盖问题，S中的某些成员被多次覆盖。

集合覆盖问题举例

例：某城市有6个区，规划建消防站，任何区发生火警时消防车要在15分钟内赶到，各区间消防车行驶的时间见下表，求设置消防站最少的方案。

地区	1	2	3	4	5	6
1	0	10	16	28	27	20
2	10	0	24	32	17	10
3	16	24	0	12	27	21
4	28	32	12	0	15	25
5	27	17	27	15	0	14
6	20	10	21	25	14	0

集合覆盖问题举例

解：整数规划问题为：

$$
\begin{aligned}
\min:\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\
& x_3 + x_4 \geq 1 \\
& x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
& x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
& x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \\
& x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

最优解 $x_2 = x_4 = 1$, 在地区2, 4设消防站。

隐枚举法

要应用隐枚举法，**0-1**规划模型必须是下述标准型：

$$\begin{cases} \min \quad z = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

满足 $x_j = 0$ 或 1，对一切 j。

其中，$c_j \ge 0, b_i$ 可以是正数、负数或**0**，所有约束条件方程必须是 $\le$ 形式。

如果0-1规划模型不是标准模型，则可做下述变换，使其成为标准模型：

1、如目标函数是求最大，可将目标函数乘-1并求最小；

2、如约束条件方程是“>=”形式，可将不等式两端乘-1，变换为“<=”形式；

3、如约束条件方程是“=”形式，则将它变换为“<=”形式和一个“>=”形式的约束条件方程，并对后一方程两端乘-1，使其成为“<=”形式。

4、如果有一个变量 x_j 的目标函数系数 $c_j < 0$，则 可用 1- x'_j 替换 x_j 。

具体计算步骤如下：

1、令全部 x_j 都是自由变量且取0值，检验解是否可行。若可行，已得最优解；若不可行，进行第二步。

2、将某一变量转为固定变量，令其取值为1或0，使问题问题分成两个子域。令一个子域中的自由变量都取0值，加上固定变量取值，组成此子域的解。

3、计算此解的目标函数值，与已求出的可行解的目标函数值比较。如前者大，则不必检验其是否可行而停止分枝，若子域都检验过，转第七步。如前者小，进行第四步。

4、检验解是否可行。如可行，已得一个可行解，计算并记下它的z值，并停止分枝，若子域都检验过，转第七步，否则转第六步；如不可行，进行第五步。

5、将子域固定变量的值代入第一个不等式约束方程，并令不等式左端的自由变量当系数为负是取值为1，系数为正是取值为0，这就是左端所能取得的最小值。若此最小值大于右端值，则称此子域为不可行子域，不再往下分枝，若子域都检验过，转第七步，否则转第六步；若此最小值小于右端值，则依次检验下一个不等式约束方程，直至所有的不等式约束方程都通过，若子域都检验过，转第七步，否则，转第六步。

6、定出尚未检验过的另一个子域的解，进行第三步至第五步，若所有子域都停止分枝，计算停止，目标函数值最小的可行解就是最优解；否则，转第七步。

7、检查有无自由变量；若有，转第二步；若没有，计算停止。目标函数值最小的可行解就是最优解。

例： $\min z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5;$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le -2, \\ -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le -4, \\ x_j = 0\text{或}1，\text{对一切}j。 \end{cases}$$

§ 5 分派问题

例 1：某公司的营销经理将要主持一年一度的销售协商会议，为了更好的安排这次会议，他雇用了四个临时工（张、王、李、赵），每个人负责完成下面的一项任务：文字处理；绘图；材料准备；记录。虽然这四个临时工都有基本能力完成各项任务，但是他们完成每一项任务所表现出来的有效程度有很大的差异。下表显示了每个人完成每一项工作所用的时间（单位：小时）,现在他需要确定将哪一项任务分派给哪个人完成。

	文字处理	绘图	材料准备	记录
张	2	15	13	4
王	10	4	14	15
李	9	14	16	13
赵	7	8	11	9

设 $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第i个人完成第j项工作}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

模型
$$\begin{cases}\min\ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}\\ \sum_{j=1}^{4}x_{ij}=1 & i=1,\cdots,4\\ \sum_{i=1}^{4}x_{ij}=1 & j=1,\cdots,4\\ x_{ij}=0\text{或}1 & i,\ j=1,\cdots,4\end{cases}$$

二、匈牙利算法

(一)算法思想

对价值系数矩阵 C，将它的某一行(或某一列)的各元素都减去一个常数 k，得到的新的价值系数矩阵，构成一个新的分派问题，则这个新问题的最优解与原分派问题的最优解相同，目标函数相差常数 k。

（二）算法步骤

1、转换系数矩阵，在各行各列中都出现零元素

(1) 每行各元素减去该行最小元素；

(2) 每列各元素减去该列最小元素。

2、试分派

n较小时，可用观察法、试探法找n个独立元素，n较大时，用下面方法：

(1) 从只有一个0元素的行(列)开始，对0元素加框，化去0所在列（行)的其它0元素，记作×

(2) 反复进行(1)，直到不再有0元素可圈和划去。

(3) 当同行(列)有两个或两个以上0元素时，试探法。

(4) 若加框0 元素的数目 m=n ，已得最优解，即令这些加框0元素对应 $x_{ij}=1$ 其它0元素对应 $x_{ij}=0$ 。

若 m<n ，转下步。

例 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 9 \\ 7 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 6 & \boxed{0} & 6 & 9 \\ \boxed{0} & 5 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & 1 & \boxed{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$x_{14} = x_{22} = x_{31} = x_{43} = 1$$

$$z = c_{14} + c_{22} + c_{31} + c_{43} = 28$$

$$z = 4+4+9+11 = 28$$

即张做记录，王绘图，李进行文字处理，赵准备材料

3、以最少的直线划去所有0 元素

n 较小时，可用观察法，n 较大时，用下面方法：

(1) 对没有加框的0所在的行打√

(2) 对已打√ 的行中所有含 0元素列打√

(3) 再对打有√ 的列中含框的 0 元素行打√

(4) 重复（2）和（3）直到得不出新的打√号的行，列为止.

(5) 对没有打√号的行画一横线, 有打√号的列画一纵线, 这就得到覆盖所有0元素的最少直线数.

4、修改价值系数c

(1)找出未被覆盖部分中最小元素 δ

(2)将未覆盖行的元素都减去δ ，将各覆盖列的元素都加上δ

	未覆盖的列	覆盖的列	
未覆盖的行	−δ	不变	−δ
覆盖的行	不变	+δ	
		+δ	

即所有未被覆盖的元素都减去δ ，单重覆盖(一条线)的元素不变，双重覆盖(同时被纵横两条线覆盖)的元素增加δ 。

(3) 转 2

例 3

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \cancel{0} & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & \cancel{0} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 3 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & 3 & 5 & 6 & \boxed{0} \\ \cancel{0} & \boxed{0} & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & \boxed{0} & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & \boxed{0} & 5 \end{pmatrix}$$

$$x_{11} = x_{25} = x_{32} = x_{43} = x_{54} = 1$$

$$z = 5+1+5+5+2 = 18$$

例 4：六项任务由四个工厂担任，每个工厂可担任一至两项任务，并知各个工厂担任各项任务的费用如下，问应如何分配任务，使总费用最少。

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

解

每个工厂可担任两项任务，可设想每个工厂有两个分厂，于是问题变为由八个单位担任六项任务的分派问题

$$
\begin{pmatrix}
3 & 7 & 3 & 6 & 5 & 5 & 0 & 0 \\
3 & 7 & 3 & 6 & 5 & 5 & 0 & 0 \\
6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 & 0 & 0 \\
6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 7 & 0 & 0 \\
2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\
2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\
6 & 4 & 8 & 7 & 3 & 2 & 0 & 0 \\
6 & 4 & 8 & 7 & 3 & 2 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

结论

工厂一担任第 3项任务，工厂二担任第 2、5项任务

工厂三担任第 1、4项任务，工厂四担任第 6项任务

例 5：从甲，乙，丙，丁，戊五人中挑选四人去完成四项工作，已知每人完成各项工作的时间如下表所示。规定每项工作只能由一个人去单独完成，每个人最多承担一项工作。假定甲必须保证分配到工作，丁因某种原因不同意承担第四项工作。在满足上述条件下，如何分配工作，使完成四项工作花费的总时间最少。

	一	二	三	四
甲	10	5	15	20
乙	2	10	5	15
丙	3	15	14	13
丁	15	2	7	6
戊	9	4	15	8

解

要求总时间最少，增加一项虚拟工作，则由于甲必须有工作，所以甲对应的虚拟工作完成时间为最大，又由于丁不承担工作四，所以对应工作四的时间也为最大，则分派问题变为

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 15 & 20 & 20 \\ 2 & 10 & 5 & 15 & 0 \\ 3 & 15 & 14 & 13 & 0 \\ 15 & 2 & 7 & 20 & 0 \\ 9 & 4 & 15 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

结论 甲承担工作二，乙承担工作三，丙承担工作一，丁不做工作，戊承担工作四，所用总时间为 **21**