

山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学 B

试题编号：602

- 注意事项：1. 本试卷共 3 道大题（共计 16 个小题），满分 150 分；
 2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
 3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
 4. 是否允许使用普通计算器 否。

一、填空题（6 小题，每题 7 分共 42 分。直接写出答案）。

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \text{①}$ 。

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \text{②}$ 。

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{③}$ 。

4. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\ln y = xy + \sin x$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \text{④}$ 。

5. 设 $\int f(x)e^{\frac{1}{x}} dx = -e^{-\frac{1}{x}} + C$ ，则 $f(x) = \text{⑤}$ 。

6. 下列级数的和为 $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \text{⑥}$ 。

二、证明及判断题（4 小题，每题 9 分共 36 分。证明要有必要步骤；判断要写明理由）。

7. 设 A 为方阵， E 为单位矩阵， k 为正整数， $A^k = 0$ 。证明 A 满足方程：
 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$ 。

8. 设 $\alpha_1 = (1, 3, 5)$, $\alpha_2 = (3, 5, 1)$, $\alpha_3 = (5, 1, 3)$ 。证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

9. 判断正项级数的收敛性： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

10. 判断变号级数的收敛性: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$

三、解答题 (6 小题, 每题 12 分共 72 分。解答应写出详细文字说明或演算步骤)。

11. 求下列线性方程组的解
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -15 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

12. 设 $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 且函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处取得极值, 且点 $(2, 4)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 即 $f(2) = 4, f''(2) = 0$ 。求 a, b 。

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$ 。

14. 设 $z = z(x, y)$ 由方程确定: $x - az = \varphi(y - bz)$, 其中 φ 有连续导数, 计算 $az'_x + bz'_y$ 的值。

15. 求极坐标表示的曲线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 围成的图形的面积。

16. 计算积分 $I = \iint_D xy dx dy$, 其中 D 为曲线 $x = y^2$ 与 $y = x - 2$ 所围成的区域。