杭州电子科技大学

2015年攻读硕士学位研究生招生考试

《 数学分析 》试题

（试题共 4 大题，共 2 页，总分 150 分）

姓名__________报考专业______________准考证号____________________

【所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效！】

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，本大题共 40 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{4x+4}$ 的值等于 ____________ .

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0\\ a & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & -1<x<0\end{cases}$ ，在 $x=0$ 处连续，则必有 $a=$ ______ .

3. 设 $e^x-e^y=\sin xy$, $y'|_{x=0}=$ ____________________.

4. 设 $\int f(x)dx=\sin x+c$ ，则 $\int f^{(n)}(x)dx=$ ______________ .

5. 设 $\int_0^x f(t)\,dt=\dfrac{1}{2}f(x)-\dfrac{1}{2}$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$______________ .

6. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$ ____________.

7. 已知 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $dz=$ ________________________.

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$ 的收敛半径 $R=$ ______________.

二、计算题（本大题共 4 小题，本大题共 30 分）

1. **（本小题 5 分）**求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

2. **（本小题 5 分）**计算 $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$， n 为正整数.

3. **（本小题 10 分）**设 $z=x^3 f(xy^2,\sin xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. **（本小题 10 分）**计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 $\sum$ 是 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$，其曲面正侧法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

三、综合题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，本大题共 30 分）

1. 证明积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $[a,b]\,(a>0)$ 上一致收敛，而在 $[0,b]$ 上非一致收敛.

2. 设曲面 $S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$，平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$.

   (1)试在曲面 S 上求平行于平面 π 的切平面方程.

   (2)试求曲面 S 与平面 π 之间的最短距离.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}(\alpha>0)$，讨论函数在 $(0,0)$ 的连续性.

四、证明题（本大题共 5 小题，每小题 10 分，本大题共 50 分）

1. 设 $x>0$，常数 $a>e$. 证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

2. 试证椭圆抛物面 $x^2+y^2=2az$ 和双曲抛物面 $x^2-y^2=2az$ 被圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所载得的部分面积相等.（$a\neq 0$）

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(x)\neq 0, x\in(a,b)$，若 $f(a)=f(b)=0$，证明对任意实数 K 存在点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=K$.

4. 证明 $f(x)=x^3$ 在任意有限闭区间 $[a,b]$ 上一致连续，但在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数且 $f(0)=0$. 证明：

$$\left(\max_{0\le x\le 1} f(x)\right)^2<\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx.$$