中 山 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：601

科目名称：高等数学（A）

考试时间：12 月 28 日上午

> **考 生 须 知**
> 全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

本卷共十二大题，满分为 150 分。

一、（40 分，每题 8 分）完成下列各题：

1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$。

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(0.1)^n}{n}$ 是收敛的，并判断是条件收敛还是绝对收敛。

3. 设函数 $g(x,y,z)=xe^y+z^2$，求 g 在点 $P_0=(1,\ln 2,\dfrac{1}{2})$ 处函数值增加和减少最快的方向，并求出相应的方向导数。

4. 求函数 $F(y)=\int_{y^2}^{e^y}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x \quad (0<y<+\infty)$ 的导数。

5. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 皆为 n 阶矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$，证明 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$。

二、（10 分）设 D 是由 xOy 平面上曲线 $y=\dfrac{4}{x^2+4}$ 和直线 $x=0, x=2, y=0$ 所围成的闭区域，求闭区域 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积。

三、（10 分）计算 $\oint\limits_{L}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$，其中 $\vec{F}=\left(3xy-\dfrac{x}{1+y^2},e^x+\arctan y\right)$，$\vec{n}$ 是心脏线 $r=a(1+\cos\theta),a>0$ 向外的单位法向量。

四、（10 分）计算累次积分 $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

五、（10 分）求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\xi_1=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}$。

六、　（10 分）设三阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\mathbf{A}$ 的二重特征值。若 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量（记号 T 表示转置)。(1) 求 $\mathbf{A}$ 的另一特征值和相应的特征向量；(2) 求矩阵 $\mathbf{A}$。

七、　（10 分）设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 皆为 n 阶正定方阵，且 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{AB}$，求证 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\geq|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$。

八、　（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3x+1)^n}{2n+2}$ 的收敛半径和收敛域。

九、　（10 分）请问含参变量的无穷积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$ 是否在 $t\in[0,d]$ 一致收敛？说明理由。

十、　（10 分）设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<\pi\\ 2, & \pi\leq x<2\pi\end{cases}$。求该函数的傅氏级数及其和函数。

十一、（10 分）求微分方程 $y'''+3y''+3y'+y=\mathrm{e}^x(x-5)$ 的通解。

十二、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数。