山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目名称：高等代数与解析几何　　　　　试题编号： 718

注意事项：1. 本试卷共 10 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 是否允许使用普通计算器 ＿＿否＿＿。

* *

一.（15 分）设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，证明：$(f(x),\ g(x))=(f_1(x),\ g_1(x))$.

二.（10 分）证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+xy & y & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+xy & y & \ddots & \vdots \\ 0 & x & 1+xy & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+xy \end{vmatrix}=1+xy+(xy)^2+\cdots+(xy)^n.$$

三.（15 分）设 $A=(a_{ij})_{nn}, B=(b_{ij})_{nn}$,

$$A^{(k)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{nk} \end{pmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n$$

证明：存在 n 级方阵 C，使 $AC=B$ 的充要条件是 $A, A^{(1)},\cdots,A^{(n)}$ 有相同的秩。

四.（15 分）设 P 是数域，$m<n,\ A\in P^{m\times n},\ B\in P^{(n-m)\times n},\ V_1,\ V_2$ 分别是齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间. 证明：$P^n=V_1\oplus V_2 \Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}X=0$ 只有零解.

五.（15 分）设 V 是数域 P 上四维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一组基。f 是 V 的线性变换，且 f 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

求 f 的核 $f^{-1}(0)$ 的一组基与维数。

六.（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是欧氏空间 R^n 中一正交向量组，$\beta_1,\beta_2\in R^n$，且

$$(\beta_1,\alpha_i)=0,\ (\beta_2,\alpha_i)=0,\ (i=1,2,\cdots,n-1).$$

证明：β_1,β_2 线性相关.

七.（15 分）证明：实系数线性方程组 $A_{nn}X=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 有解的充分必要条件是 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 与齐次线性方程组 $A_{nn}{}'X=0$ 的解空间正交。（$A_{nn}{}'$ 为 A_{nn} 的转置）

八.（15 分）求通过点（4, 2, -3）且平行于平面 $x+y+z-10=0$，又与直线

$$\begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ z-10=0 \end{cases}$$

垂直的直线方程.

九.（15 分）已知平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 顺次交三坐标轴 Ox,Oy,Oz 于点 A， B， C，试求：以 A， B， C 三点确定的圆为准线， 原点为顶点的锥面方程.

十.（20 分）求二次曲线 $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$ 的标准方程，并写出其相应的坐标变换公式。