

宁波大学 2014 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(A卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目: 数学分析 科目代码: 671 适用专业: 基础数学、应用数学

一. 填空题 (每题 5 分, 共 15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2}\right)^{\tan x} =$ _____;

2. 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为 _____;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} =$ _____;

二. 单项选择题 (每题 5 分, 共 15 分)

1. 下列叙述正确的是 ()

(A) 若数列 $\{a_n\}$ 无界, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(B) 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处不连续.

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则一定存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$, 使得 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内的任意点处都可导.

(D) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则在 x_0 的某个邻域内一定有界.

2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积; $f(x)$ 的反常积分在 $[a, +\infty)$ 上收敛, 则 $f^2(x)$ 的反常积分在 $[a, +\infty)$ 上 ()

(A) 收敛; (B) 不收敛; (C) 不一定收敛; (D) 以上三个答案都不正确

3. 设 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导, 则 $f'(a) =$ ()

A. 不存在 B. $\varphi'(a)$ C. $\varphi(a)$ D. $-\varphi'(a)$

三. 计算与证明题 (每题 10 分, 共 50 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan u} du}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin u} du}$

2. 求 $f(x) = e^x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

宁波大学 2014 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(A卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目: 数学分析 科目代码: 671 适用专业: 基础数学、应用数学

3. 设 $F(xz, yz) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 若 $x \geq 0, \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, 证明:

(1) $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

5. 计算曲线积分 $\int_{AMB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$.

其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AMB 是连接点 $A(1, 2), B(2, 4)$ 的任意路径, M 在线段 AB 的下方, 且该路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AMBA$.

四. 证明题 (共 70 分)

1 (15分). 若 $f(x)$ 是开区间 (a, b) 上的单调函数, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的间断点, 证明 $f(x)$ 在 x_0 处必存在左右极限.

2 (15分). 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ 的敛散性.

3 (15分) 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

4 (15分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

证明:

(1) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的某个领域内有偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;

(2) $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续, 且在 $(0, 0)$ 的任何领域内无界;

(3) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

5 (10分). 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{y} dx$ 关于 y 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛 (其中 $\delta > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛