中 山 大 学

二〇一五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：622

科目名称：一元微积分

考试时间： 12 月 28 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一. 填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，$e^{\tan^3 x} - 1$ 与 x^n 为等价无穷小，则 $n=$______。

2. 设 $y = x^{\ln x} + \arctan x^2$, 则 $\mathrm{d}y =$____________。

3. 函数 $f(x) = x\ln(x-1)$ 在 $x=2$ 处的 Taylor 公式中 $(x-2)^3$ 的系数是______。

4. 设函数 $f: \overset{\circ}{U}(x_0) \to \mathbf{R}$，写出 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在的 Cauchy 收敛原理：

____________________________________。

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(t)dt = x(1+\cos x)$, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$________。

6. 设函数 $f(x) = x^2\cos 2x$，则 $f^{(10)}(0) =$__________。

二. 选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设 $f(x) = |x-2|\varphi(x)$ 而 $\varphi(x)$ 在 $x=2$ 处连续且 $\varphi(2)\neq 0$，$f'(2) =$(　　)。

（A）$\varphi(1)$　　（B）$-\varphi(1)$　　（C）0　　（D）不存在

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$，则常数 a,b 满足（　　）。

（A）$a<0,b<0$　（B）$a>0,b>0$　（C）$a\ge 0,b<0$　（D）$a\le 0,b>0$

3. 关于数列 $\{x_n\}$ 的子列，下列叙述错误的是（　　）

（A）若 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列，则 $\{x_n\}$ 的任一子列都收敛.

（B）若 $\{x_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_n\}$ 必有一子列收敛.

（C）若 $\{x_n\}$ 是无界数列，则 $\{x_n\}$ 的任一子列都不收敛.

（D）若当 $n\to\infty$ 时 $\{x_n\}$ 是无穷大量，则 $\{x_n\}$ 的任一子列都不收敛

4. 下列结论正确的是（　　）

(A) 若$[a,b]\supseteq[c,d]$，则必有$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx$

(B) 若$|f(x)|$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积

(C)若$f(x)$是周期为T的连续函数，则对任意常数a都有$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

(D)若$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在(a,b)内必定有原函数.

5. 设$f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$，　则$f'(x)$不存在的点的个数为（　　）

（A）0，　　（B）1，　　（C）2，　　（D）3

6. 设$f(x)$有连续的导数，则$\int f'(2x)dx =$（　　）.

(A). $f(x)+C$.　(B). $f(2x)+C$.　(C). $\frac{1}{2}f(2x)+C$.　(D). $\frac{1}{2}f(x)+C$

三、计算题(第 1 和 2 小题各 7 分，其余各 9 分，共 50 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)\cot x$

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n+i}{n}}$

3. 计算定积分$\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$；

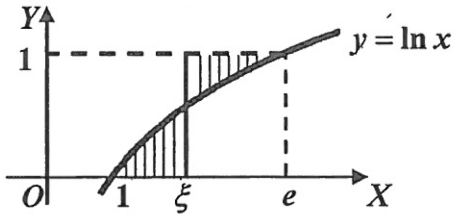
4. 设 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leq 0 \\ \frac{2}{x}\ln(1+x), & 0<x\leq 1 \\ 2+(x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$，讨论并指出

① 函数的定义域；　　② 函数的间断点及其类型；

5. 作下列函数的图形（要求列表之后再画图）：

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

6. 在区间$[1,e]$上求一点ξ，使得图中所示阴影部分绕x轴旋转所得旋转体的体积最小。



四. 证明题（第 1 题 10 分，其余各 15 分，共 40 分）

1. 证明函数$f(x)=\ln x$在$(0,1)$内并非一致连续。

2. 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，求证：

(1) 在(a,b)内$g(x)\neq 0$

(2) 在(a,b)内至少存在一点ξ，使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且单调增加，证明$\int_a^b tf(t)dt \geqslant \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$