

# 一种寿命设计曲线构建方法

杨晓光<sup>1,2</sup>, 黄 飞<sup>1</sup>, 苗国磊<sup>1</sup>, 石多奇<sup>1,2</sup>

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191)

**摘 要:** 针对现有建立寿命设计曲线方法的不足, 采用容忍法建立寿命设计曲线, 对比并分析了各种方法的差异. 对于大样本的疲劳试验数据, 试验结果表明在不同应力水平材料寿命的分散性不同. 为此在近似 Owen 容忍法基础上提出了一种包含应力水平的分散性模型建立设计曲线, 使其能够满足材料寿命在高应力分散性较小, 低应力分散性较大的特点. 根据 Ti-6246 疲劳试验结果, 利用该方法计算得到的设计寿命在疲劳载荷为 925 MPa 时提高了 146%, 在 820 MPa 时减小了 60.2%. 从而提高了设计的经济性和可靠性.

**关键词:** 设计曲线; 疲劳分散性; 容忍限; 置信水平; 可靠度; 疲劳寿命

中图分类号: V235.13

文献标志码: A

## Approach to construction of fatigue design curve

YANG Xiao-guang<sup>1,2</sup>, HUANG Fei<sup>1</sup>, MIAO Guo-lei<sup>1</sup>, SHI Duo-qi<sup>1,2</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Tolerance limit concept was used to construct design curves against the deficiencies of the existing methods. Comparative analysis was implemented to evaluate the safety of the design curve. Experimental result shows that fatigue scatter varies with stress levels. Based on approximate Owen tolerance limit, an improved design curve has been developed to comply with the feature of fatigue scatter that becomes small in high stress levels and large in low stress levels. According to the fatigue test results of Ti-6246, the fatigue life derived from the new method increased by 146% at 925 MPa and decreased by 60.2% at 820 MPa compared with other methods. Reliability and economy can be improved with the new fatigue design curve.

**Key words:** design curve; fatigue scatter; tolerance limit; confidence level; reliability; fatigue life

由于材料微观组织不均匀、材料缺陷的随机分布以及加工制造的不确定性通常使得同一载荷条件的疲劳寿命呈现一定的分散性<sup>[1]</sup>. 同时采用不同的疲劳模型描述应力/应变-寿命行为时也会带来相应的模型分散性. 疲劳分散性的存在为确定满足工程设计要求的寿命值带来了挑战. 通用的做法是根据不同载荷条件下的疲劳试验结果,

在疲劳试验寿命值较小的一侧通过外推方法建立一条最差性能曲线以考虑分散性的影响. 最差性能曲线能够保证大多数疲劳寿命位于安全的一侧. 为了提高设计经济性和可靠性, 在材料失效规律基础上结合对疲劳试验数据的统计学分析得到工程可用的最差性能曲线, 即为寿命设计曲线. 目前已有多种建立设计曲线的方法, 然而实际工程设

收稿日期: 2014-04-03

作者简介: 杨晓光(1962-), 男, 上海人, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事高温结构及材料的疲劳与断裂、本构理论及疲劳寿命预测等方面的研究.

计中受试验条件和试验成本的影响,如何根据有限的疲劳试验数据得到可靠性高、经济性好且能够准确描述材料疲劳行为的设计曲线仍然亟待解决。

一般的应力/应变-寿命模型只能表征某一应力/应变水平下的中值疲劳寿命,因此根据此模型得到应力-疲劳寿命(S-N)曲线其寿命值可靠度只有 50%,不满足工程设计要求。如美军标要求航空发动机部件材料具有 50%置信度 99.87%可靠度的疲劳寿命<sup>[2]</sup>。而采用失效概率-应力-疲劳寿命(P-S-N)曲线在确定材料某一可靠度下的寿命值时,通常需要在不同应力水平下做多组疲劳试验从而导致成本较高<sup>[3]</sup>。此外对于大分散疲劳试验数据 P-S-N 曲线会出现应力降低而设计寿命也降低的不合理现象<sup>[4]</sup>。建立设计曲线的另一方法是对中值寿命模型使用一定的安全系数,美国机械工程师学会(ASME)锅炉与压力容器准则规定对中值寿命模型的应力/应变使用 2 的安全因子或对寿命使用 20 的安全因子得到设计曲线<sup>[5]</sup>。然而计算结果表明此方法得到的设计曲线往往过于保守、经济性差且未考虑可靠度要求。为此 Shen 等基于 Owen 在工程中引入的容限思想,提出了建立设计曲线的近似 Owen 容限法<sup>[6-7]</sup>,将设计曲线和样本数量、置信度和可靠度相结合,并通过大量试验研究给出了计算容限系数的经验公式。Wei 等人在此基础上利用“等分原则”建立寿命设计曲线<sup>[8]</sup>,该方法简化了计算容限系数的过程。对于小样本疲劳试验数据,Wei 等还给出了建立设计曲线的蒙特卡洛模拟法<sup>[9]</sup>。

基于容限思想建立设计曲线时均认为疲劳寿命标准差相同,即各应力水平下分散性相同,而试验结果表明材料在不同应力水平下的寿命分散性不同。为了提高寿命设计曲线的精度,就需要寻求能够包含材料真实分散性特点的寿命设计曲线构建方法。本文基于 Owen 容限思想,提出了一种包含应力水平的分散性模型建立设计曲线。对 Ti-6246 疲劳试验数据分别采用容限法以及包含分散性模型的近似 Owen 容限法建立寿命设计曲线,对比并分析了各种方法的差异。结果表明该方法所得设计曲线能满足材料寿命在不同应力水平下的分散性特点。

## 1 容限法建立寿命设计曲线

### 1.1 理论基础

为了保证部件寿命设计的可靠性,通常需要根据疲劳试验结果确定一条表征不同载荷条件下

寿命下限值的设计曲线。设计曲线通常与材料特性、试验成本以及行业标准相关。航空发动机部件材料一般对寿命有可靠度和置信度要求,为此可利用容限思想确定材料的寿命设计曲线。

使  $y(x)$  代表对数寿命对应力水平  $X$  的中值疲劳寿命方程。假设疲劳试验数据同方差,即任意应力水平  $X$  下对数寿命  $Y$  的标准差  $\sigma_Y$  为常值。确定设计寿命  $y_d(x)$  的通用办法是根据可靠度  $p$  以及置信度  $\gamma$  的要求将中值寿命曲线  $y(x)$  向寿命值较小的方向偏移一定距离,如图 1 所示。

$$y_d(x) = y(x) - K(p, \gamma, n, x) \sigma_Y \quad (1)$$

式中容限系数  $K$  为可靠度  $p$ 、置信度  $\gamma$ 、样本数量  $n$  以及载荷水平  $x$  的函数。

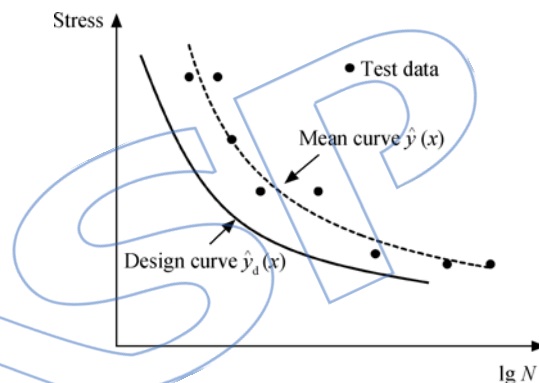


图 1 中值寿命曲线和设计曲线

Fig. 1 Mean curve and design curve

通常  $p, \gamma$  要求越高,则  $K$  值越大设计曲线越保守。中值寿命曲线  $y(x)$  以及对数寿命标准差  $\sigma_Y$  的估计量记为  $\hat{y}(x)$  和  $\hat{\sigma}_Y$ ,得到的设计曲线记为  $\hat{y}_d(x)$ 。

工程上通常用以下两种方法建立寿命设计曲线:

1) 2-Sigma/3-Sigma 设计曲线:由中值寿命曲线  $\hat{y}(x)$  减去  $K$  倍的样本标准差  $s$  得到,通常  $K=2$  或  $3$ 。由于该方法没有考虑对设计曲线置信度  $\gamma$  的要求经济性较差。

2) 一维容限:对于单变量正态分布,单侧容限系数  $K$  可用于构建寿命设计曲线<sup>[10-12]</sup>。

$$\hat{y}_d(x) = \hat{y}(x) - K(U) \hat{\sigma}_Y \quad (2)$$

式中  $U=(p, \gamma, n)$ 。该方法仅在一个应力水平且对数寿命  $Y$  为正态分布时有效。工程中也大多用此方法确定某一应力水平下规定可靠度和置信度的材料寿命。对于多个应力水平理论上不能使用。为了简化容限系数  $K$  的计算,可利用一个近似的计算公式<sup>[13]</sup>,并采用“等分原则”(equal partition

principle)确定容限系数  $K^{[8]}$ . 该方法可以简化计算  $K$  值的过程.

$$K = \frac{\{z_p(1-\phi) + \{z_p^2(1-\phi)^2 - [(1-\phi)^2 - z_\gamma^2/(2f)](z_p^2 - az_\gamma^2)\}^{1/2}\}}{[(1-\phi)^2 - z_\gamma^2/(2f)]} \quad (3)$$

式中  $\phi=1/(4f)$ ,  $f=n-1$ .  $z_p, z_\gamma$  为标准正态分布的  $p, \gamma$  分位点;  $a=1/(n/2)$ .

### 1.2 Owen 容限法与近似 Owen 容限法

一维容限方法理论上只能确定一个应力水平下材料的寿命设计值,鉴于实际载荷的复杂性,为此须考虑回归情况下寿命设计曲线构建方法. Owen 对容限法在工程上的运用开展相关研究,为建立回归情况下的设计曲线提供了基础.

对于疲劳试验数据点  $(S_i, N_i); i=1, 2, \dots, n$ . 通过对数转换可得  $(y_i, x_i)$ , 假设对数寿命  $Y$  服从正态分布且同方差(不同应力水平下的标准差均相同). 若中值寿命曲线可用多项式回归模型模拟<sup>[14]</sup>

$$y = \sum_{i=0}^d a_i x^i \quad (4)$$

式中  $d$  为多项式的自由度,则在某一特定应力水平  $x_0$  下可靠度  $p$ 、置信度  $\gamma$  的寿命设计值为<sup>[6]</sup>

$$\hat{y}_d(x_0) = \hat{y}(x_0) - K(x_0; p, \gamma, n, d, \mathbf{x}_i) s \quad (5)$$

其中  $s$  是对数寿命标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-d-1} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(X_i)]^2} \quad (6)$$

构建设计曲线的关键是确定容限系数  $K$  的值,此处的  $K$  值为

$$K(x_0; p, \gamma, n, d, \mathbf{x}_i) = -t_\gamma \sqrt{a(x_0, \mathbf{x})} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{x}$  为系数矩阵. 其中

$$a(x_0, \mathbf{x}) = \{x_0\}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \{x_0\} \quad (8)$$

$\mathbf{X}$  是关于不同应力幅值的矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\{x_0\}^T = [1 \quad x_0 \quad x_0^2 \quad \cdots \quad x_0^d] \quad (10)$$

$$P[T_f(\delta) > t_\gamma] = \gamma \quad (11)$$

式中  $P$  为概率分布,  $t_\gamma$  可由一个非中心  $t$  分布  $T_f(\delta)$  得出.

该分布的自由度

$$f = n - d - 1 \quad (12)$$

非中心参数

$$\delta = -K_p a^{-1/2} \quad (13)$$

Owen 容限系数  $K$  与应力水平相关,计算表明

在高应力与低应力区  $K$  值较大,而在中间应力区其值较小. 因此利用 Owen 容限法得到的设计曲线会出现与中值寿命曲线不一致的“双曲线”形状. 近似 Owen 容限法可在精度不显著衰减的情况下通过积分平均方法得到恒定的  $\bar{K}$  值<sup>[6]</sup>,得到与中值寿命曲线形状一致设计曲线,将置信度损失控制在一定范围之内并利用经验公式简化计算过程.

综上所述,基于容限思想构建寿命设计曲线方法均假设在各应力水平下疲劳寿命分散性相同. 而试验结果表明:材料寿命分散性在不同应力水平并不相同. 为了提高设计曲线精度,需要在 Owen 容限法基础上,考虑不同应力水平下寿命分散性变化的设计曲线构建方法.

## 2 分散性随应力水平变化的寿命设计曲线构建方法

当试验样本数较少时,根据正态分布理论可知,试件在中值疲劳寿命处断裂的概率最大. 试验数据点往往处于中值寿命附近. 此时难以发现寿命分散性随应力水平的变化规律,因此一般的容限法建立设计曲线时通常进行同方差假设,认为各应力水平下的寿命分散性相同. 而实际上,随着样本容量的增加材料寿命一般在高应力水平下分散性较小,低应力水平下分散性较大.

样本数量  $n$  的变化体现出高低应力水平下不同的疲劳分散性特点,同时也会直接影响设计曲线的构建.  $n$  的改变导致容限系数  $K$  以及寿命标准差的变化. 如图 2 反映了容限系数随样本数的变化规律. 当样本数量小于 5 时容限系数变化剧烈,尤其是可靠度和置信度要求较高的情况. 当样本数量大于 7 时容限系数趋于稳定,此时  $n$  的改变主要对寿命标准差(分散性)产生影响.

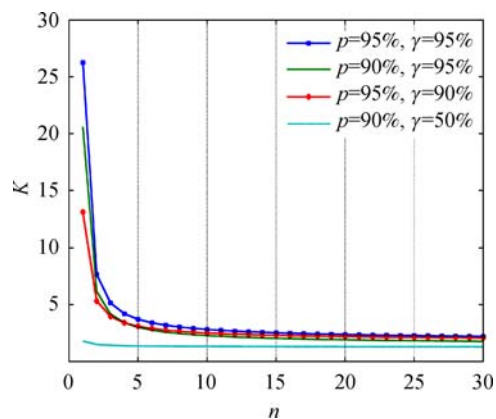


图 2 容限系数  $K$  随样本数  $n$  变化规律

Fig. 2 Tolerance limit  $K$  versus sample size

因此对于试验样本数量较少的情况下采用一般容限法建立设计曲线简单合理. 然而随样本数量增加不同应力水平下的疲劳寿命会表现出不同的分散性, 此时应该考虑分散性随应力水平变化对设计曲线的影响.

近似 Owen 容限法建立设计曲线时假设各应力水平下分散性相同(即各应力水平下的对数寿命标准差  $\sigma_Y$  为常值). 这种方法得到的设计曲线会使高应力水平下的设计寿命过于保守而低应力水平下的设计寿命不安全. 为此在近似 Owen 容限法的基础上, 利用一种包含应力水平的分散性模型建立设计曲线, 使其能够考虑不同应力水平下分散性的影响. 具体方法步骤为:

1) 根据疲劳试验数据得到材料的中值寿命曲线  $\hat{y}(x)$ .

2) 利用近似 Owen 容限法得到系数  $\bar{K}$

$$\bar{K} = K_a Q \quad (14)$$

其中

$$K_a = c_1 K_p + K_\gamma \sqrt{c_3 K_p^2 + c_2 a} \quad (15)$$

$$Q = b_1 + \frac{b_2}{f^{b_3}} + b_4 \exp(-f) \quad (16)$$

经验系数  $b_i (i=1, 2, 3, 4)$ ,  $c_i (i=1, 2, 3)$  分别由表 1 和表 2 确定<sup>[7]</sup>. 其中  $f$  如公式(12)所示.  $d=1$  时,  $a = 1.85/n$ ;  $d=2$  时  $a = 2.65/n$ .  $K_p = \Phi^{-1}(p)$ ,  $K_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$ .  $\Phi$  为标准正态分布.

表 1 经验系数  $b_i (i=1, 2, 3, 4)$

Table 1 Empirical coefficients  $b_i (i=1, 2, 3, 4)$

置信度 $\gamma/\%$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
95	0.9968	0.1596	0.60	-2.636
90	1.0030	-6.0160	3.00	1.099
85	1.0010	-0.7212	1.50	-1.486
80	1.0010	-0.6370	1.25	-1.554

表 2 经验系数  $c_i (i=1, 2, 3)$

Table 2 Empirical coefficients  $c_i (i=1, 2, 3)$

$f$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$f < 2$	1	1	$1/(2f)$
$f \geq 2$	$1+3/(4f-4.168)$	$f/(f-2)$	$c_2 - c_{12}$

3) 在每个应力水平下利用公式<sup>[15]</sup>

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{n_l - 1} \sum_{i=1}^{n_l} \left( y_i - \frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} y_i \right)^2} \quad (17)$$

$n_l$  为第  $l$  个应力水平  $x_l$  的样本数. 得到第  $l$  个应

力水平  $x_l$  下的对数疲劳寿命标准差  $\sigma_l$ .

4) 利用分散性模型

$$\sigma(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad (k = 1 \text{ 或 } 2) \quad (18)$$

根据各应力水平  $x_l$  下的  $\sigma_l$ , 拟合得到未知参数  $a_i (i=0, 1, 2)$ .

设计曲线

$$\hat{y}_d(x) = \hat{y}(x) - \bar{K}\sigma(x) \quad (19)$$

### 3 应用及分析

Ti-6246 作为先进航空发动机压气机叶片材料, 试验结果表明高应力水平分散性小, 低应力水平表现出较大分散性. 不同应力水平下材料的疲劳试验数据如表 3<sup>[16]</sup>(应力比  $R=0.05$ , 室温).

表 3 Ti-6246 疲劳试验数据 ( $R=0.05$ , 室温)

Table 3 Fatigue test results of Ti-6246 ( $R=0.05$ , room temperature)

编号	$\sigma_{max}/\text{MPa}$	N/cycle	编号	$\sigma_{max}/\text{MPa}$	N/cycle
1	820	20617	23	860	226120
2	820	60839	24	860	357854
3	820	64257	25	860	470294
4	820	121128	26	860	591634
5	820	1563151	27	860	1565031
6	820	1687442	28	860	1990498
7	820	2169694	29	860	2673786
8	820	2946633	30	860	2703170
9	820	3359605	31	860	3081965
10	820	3830456	32	860	5040154
11	820	4272785	33	900	27164
12	820	4562387	34	900	28069
13	820	5375202	35	900	34547
14	820	7461191	36	900	35699
15	860	21099	37	900	38119
16	860	34129	38	900	40260
17	860	57048	39	900	44421
18	860	60254	40	900	52335
19	860	60915	41	900	75066
20	860	69451	42	900	76725
21	860	73352	43	900	88439
22	860	99616	44	900	122759



续表

编号	$\sigma_{max}/\text{MPa}$	$N/\text{cycle}$	编号	$\sigma_{max}/\text{MPa}$	$N/\text{cycle}$
45	900	128 245	52	925	24 369
46	900	252 548	53	925	30 656
47	900	887 648	54	925	30 993
48	900	1 315 610	55	925	36 916
49	900	1 673 239	56	925	43 020
50	900	2 104 912	57	925	53 532
51	925	21 141	58	925	28 1928

利用容限法建立材料设计曲线时首先需根据疲劳试验数据得到中值寿命曲线. 对于线性相关性较好的疲劳试验数据可以利用线性模型描述其中值寿命特性, 否则采用非线性模型描述<sup>[17]</sup>. 利用最小二乘或最大似然估计确定未知参数<sup>[18]</sup>.

利用 Owen 容限法以及近似 Owen 容限法得到可靠度  $p=90\%$ , 置信度  $\gamma=95\%$  设计曲线如图 3. Owen 容限法得到的设计曲线与中值寿命曲线不平行, 呈现“双曲线”形状(在数据点少时尤为明显), 而近似 Owen 容限系数  $\bar{K}$  为定值, 从而所得设计曲线与中值寿命曲线平行.

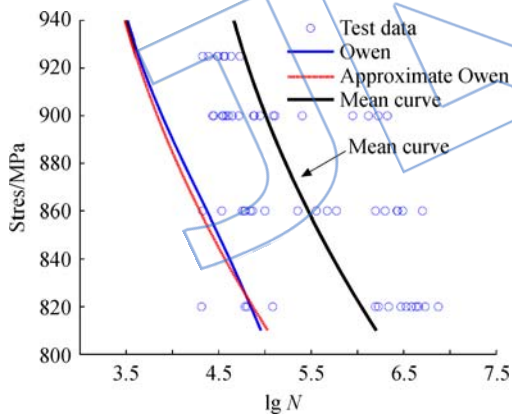


图 3 Owen 设计曲线以及近似 Owen 设计曲线 ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

Fig. 3 Owen tolerance limit and approximate Owen tolerance limit ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

图 4 反映了一般容限方法构建设计曲线的差别. 一维容限法得到的设计曲线相对不安全而 2-sigma 曲线最为保守. 这是因为在不考虑置信度的情况下, 只能通过提高容限系数  $K$  来提高设计可靠性. 其代价是使用寿命未达到规定要求的实际寿命从而使经济性变差. Owen 以及近似 Owen 容限法、等分原则、一维容限法构建的设计曲线相差并不明显. 一维容限理论上只能用于一个应力

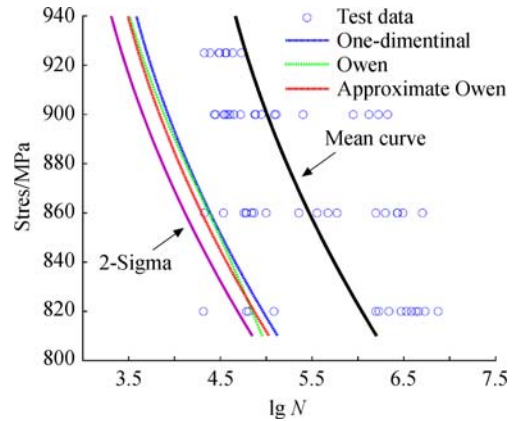


图 4 传统方法得到的设计曲线 ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

Fig. 4 Design curve constructed with traditional methods ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

水平, 但在多应力水平下由于其计算过程简便并能得到较为准确的结果而被采用.

容限法建立设计曲线时假设不同应力水平下疲劳寿命分散性相同, 因此得到的是等分散性的寿命设计曲线. 而实际寿命分散性在高应力水平较小而低应力水平较大, 为此采用包含分散性模型的近似 Owen 容限法(改进近似 Owen 容限法)建立设计曲线.

改进的近似 Owen 容限法得到的设计曲线如图 5, 通过与近似 Owen 容限法的对比可见, 改进方法在寿命分散性较小的高应力水平下设计寿命与中值寿命相差较小, 在疲劳寿命分散性较大的低应力水平下相差较大. 符合材料寿命的真实分散性特点. 经计算可得: 925 MPa 下利用改进方法所得设计寿命相比于近似 Owen 容限法提高了 1.46 倍, 820 MPa 时减少了约 60.2%.

图 6 反映了一般容限法以及改进 Owen 容限

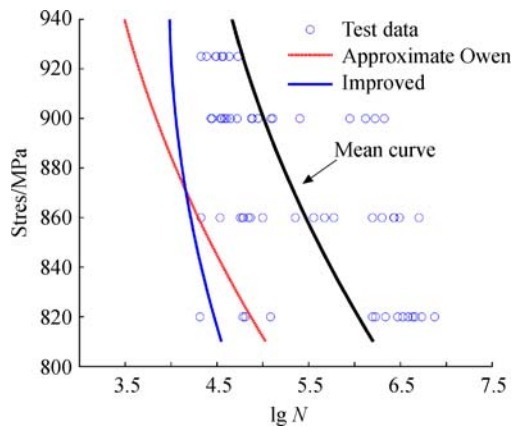


图 5 近似 Owen 设计曲线以及改进的设计曲线 ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

Fig. 5 Approximate Owen tolerance limit and improved design curve ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

法的对比,相比于一般方法高应力水平下改进方法得到的设计寿命较大,而低应力水平得到的设计寿命较小.传统方法基于各应力水平下的对数寿命标准差相同的假设,使得高应力水平下得到的设计寿命过于保守而造成浪费,而低应力水平分散性较大使得设计寿命偏于不安全.改进后的方法符合材料寿命在不同应力水平下的分散性特点,因而比传统方法更合理.

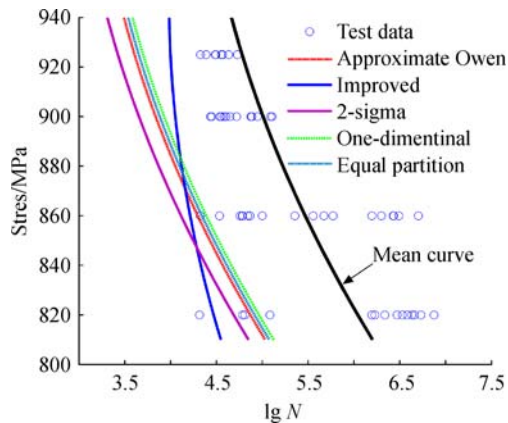


图 6 不同方法得到的设计曲线对比 ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )  
Fig. 6 Design curve constructed with different methods ( $p=90\%$ ,  $\gamma=95\%$ )

综上所述改进近似 Owen 容限法在分散性较小的高应力区提高设计寿命,在分散性较大的低应力区降低设计寿命值.满足疲劳寿命分散性特点以提高经济性及可靠性.

## 4 结 论

本文根据先进航空发动机压气机叶片材料 Ti-6246 的疲劳试验结果,首先利用容限法建立其疲劳寿命设计曲线,对比了各种方法的差异.结果表明 2-Sigma/3-Sigma 建立设计曲线最为保守,而一维容限法相对不安全.

计算结果表明当样本数超过某一特定值时,容限系数趋于稳定,影响设计曲线的主要因素是疲劳试验数据的分散性.因此对于大样本的试验数据建立设计曲线时应考虑材料的实际分散性特点.在近似 Owen 容限法的基础上提出了一种考虑应力水平的设计曲线构建方法,对比分析了该方法与传统方法的差别.利用该方法得到的设计寿命在疲劳载荷为 925 MPa 时提高了 1.46 倍,在 820 MPa 时减小了 60.2%,提高了抗疲劳设计的可靠性和经济性.

## 参考文献:

[1] Schijve J. Fatigue of structures and materials[M]. New

York:Springer-Verlag,2008.

- [2] 杨保华.航空发动机设计用材料数据手册;第4册[M].北京:航空工业出版社,2010.
- [3] 赵少汴.抗疲劳设计[M].北京:机械工业出版社,1994.
- [4] 高镇同,熊俊江.疲劳可靠性[M].北京:北京航空航天大学出版社,2000.
- [5] Moss D R, Basic M M. Pressure vessel design manual[M]. Oxford:Butterworth-Heinemann,2012.
- [6] Shen C L. The statistical analysis of fatigue data[D]. Tucson: The University of Arizona,1994.
- [7] Shen C L, Wirsching P H, Cashman G T. Design curve to characterize fatigue strength[J]. Journal of Engineering Materials and Technology,1996,118(4):535-541.
- [8] Wei Z G, Dogan B, Luo L M, et al. Design curve construction based on tolerance limit Concept[J]. Journal of Engineering Materials and Technology,2013,135(1):014501.1-014501.4.
- [9] Wei Z G, Luo L M, Lin B, et al. Design curve construction based on Monte Carlo simulation [R]. ASME Paper PVP2013-97631,2013.
- [10] Little R E, Ekvall J C. Review of statistical analysis of fatigue life data using one sided lower statistical tolerance limits[R]. ASTM STP 744,1981.
- [11] 傅惠民.正态分布百分位值和百分率的置信限和容忍限公式[J].航空学报,1994,15(1):94-101.  
FU Huimin. Formulas for tolerance limits and confidence limits of normal population percentiles and percentages [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,1994,15(1):94-101. (in Chinese)
- [12] 傅惠民,张勇波.正态分布定时无失效数据可靠性分析方法[J].航空动力学报,2010,25(2):384-387.  
FU Huimin, ZHANG Yongbo. Method of reliability analysis for timetruncated zero-failure data based on normal distribution[J]. Journal of Aerospace Power,2010,25(2):384-387. (in Chinese)
- [13] Link C L. An equation for one-sided tolerance limits for normal distributions[R]. Madison, WI: U. S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, FPL 458,1985.
- [14] Lee Y L, Pan J, Hathaway R, et al. Fatigue testing and analysis: theory and practice[M]. Burlington: Elsevier,2004.
- [15] Walpole R E, Myers R H, Myers S L, 等.理工科概论统计[M].8版.马响蓓,谢尚宇,王晓娟,等,译.北京:机械工业出版社,2009.
- [16] Jha S K, Larsen J M. Dual fatigue failure modes in Ti-6Al-2Sn-4Zr-6Mo and consequences on probabilistic life prediction[J]. Scripta Materialia,2003,48(12):1637-1642.
- [17] American Society for Testing and Materials. E739-10 Standard practice for statistical analysis of linear or linearized stress-life (S-N) and strain-life fatigue data[S]. Philadelphia: ASTM,1991:1-7.
- [18] Kutner M H, Nachtsheim C J, Neter J, et al. Applied linear statistical models[M]. New York: McGraw-Hill/Irwin,2005.

(编辑:叶青)