

文章编号:1003-207(2015)10-0139-08

DOI:10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2015.10.016

基于区间灰数的灰色定权聚类

王俊杰¹, 党耀国¹, 李雪梅¹, 崔杰²

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 211100;

2. 淮阴工学院经济与管理学院, 江苏 淮安 223001)

摘要:针对灰色定权聚类模型中白化权函数转折点只能为实数的情况,提出了当转折点为区间灰数时的白化权函数构造方法与计算过程。首先定义了区间灰数的标准化方法,将区间灰数的标准化形式带入实数型白化权函数,给出了区间灰数型白化权函数的表达式。然后分别对区间灰数型白化权函数中分段曲线只有一端为区间灰数和分段曲线两端均为区间灰数的情况进行讨论,得出两种情况下区间灰数型白化权函数值,并给出了区间灰数型典型白化权函数的四个转折点均为区间灰数的一般表达式。最后将该模型应用于许昌市民营企业核心竞争力的聚类评价中,取得了良好的结论。

关键词:灰色聚类;区间灰数;白化权函数;标准化

中图分类号: N941.5

文献标识码: A

1 引言

灰色聚类是灰色系统理论中的一个重要组成部分。邓聚龙教授^[1]首先提出了灰色关联聚类与灰色白化权函数聚类方法。随后,许多学者对灰色聚类模型进行了改进与优化。刘思峰教授^[2]提出了灰色定权聚类决策分析方法与基于三角白化权函数的灰色聚类方法。刘勇^[3]在粗糙集理论的基础上,首先利用灰聚类模型对不同量纲的知识表示系统进行处理,生成多属性决策表,再对研究对象进行决策分析。Li Xican 和 Zhang Guangbo 等^[4]提出了一种自适应分类的灰色聚类评价模型,对土壤的有机成分进行聚类评价,不仅充分利用了集群对象的内在信息,同时也避免了利用专家经验确定权重。张岐山^[5-6]则提出在灰朦胧集上进行灰色聚类,并研究了聚类结果的灰性,指出聚类信息的灰度越大,则构建的白化权函数灰度越大,聚类结果的灰度越大。Yuan Chaoqing 等^[7]通过研究灰色聚类模型的白化

权函数,针对每一个灰类的不确定性问题,提出了灰类核的概念,并将其运用在江苏省科技强度的分析中。党耀国和刘思峰^[8]针对灰色聚类系数无显著性差异时,无法将对象进行准确分类,提出了一种新的灰色综合聚类方法。米传民等^[9]针借鉴信息熵的思想,提出了基于熵权确定权重的方法,构造了基于熵权的灰色定权聚类评估方法的算法。王正新等^[10]通过定义白化权函数的分类区分度来度量各指标对聚类对象的分类所作的贡献,并据此确定分类指标的权重。董一哲和党耀国^[11]利用离差最大化的方法来确定指标权重,从而建立了指标白化权函数值离差最大化的灰色聚类模型并进行求解,体现出了指标间差异度。宋捷等^[12]将灰色聚类方法应用到群决策中,考虑到在决策者较多的情况下对决策者进行聚类处理可以提高决策质量。随着灰色聚类模型的不断优化,在实际中的应用也越来越广泛。Ghazanfar 等^[13]利用灰色聚类方法,有效地解决了客户信息不相同的问题,对客户信息进行聚类分析,实现分类推荐产品。Wang Jianling 和 Wu Junyan^[14]利用灰色聚类模型分析客户对航空公司特色服务的需求,取得了良好的效果。Xie Naiming 等^[15]利用灰色聚类模型从干旱、洪水、热带风暴等角度分析中国不同区域的气象灾害损失,取得了良好的效果。Wang Shuwei 和 Sun Lishan 等^[16]基于行人出行仿真和灰色聚类模型,对各类公交车站的拥堵指数进行聚类分

收稿日期:2013-04-01; 修订日期:2015-03-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71371098, 71071077, 71301060);南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金项目(BCXJ15-10);江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYZZ15_0093);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(NC2012001)

作者简介:王俊杰(1988-),男(汉族),江苏常州人,南京航空航天大学经济与管理学院博士研究生,研究方向:灰色系统理论。

析,为解决北京市公交车站拥堵提供对策建议。

学者对灰色聚类模型从白化权函数的构造、聚类结果的差异性、聚类准则的改进等方面进行了深入研究,但对于区间灰数在灰聚类模型中的应用研究较少。张志勇和吴声^[17]根据区间灰数空间映射的思想,利用白化权函数来表征区间灰数的分布信息,并构建了区间灰数关联度的计算模型,但并未将区间灰数引入灰聚类中。周俊杰等^[18]研究了观测值为区间灰数的灰聚类模型构建。引入积分均值函数将区间灰数白化后进行聚类。当观测值为区间灰数时,说明观测对象的信息较为模糊,因此在构建各灰类的白化权函数时无法准确划分界限,采用积分均值函数对区间灰数进行白化将损失部分有效信息。所以当观测值为区间灰数时,构建区间灰数型白化权函数既能较高级别的保留原始信息,又能体现其灰性。本文针对观测值为区间灰数的情形,构建转折点为区间灰数的白化权函数,并对区间灰数型白化权函数的求解方式进行研究。该模型充分考虑到白化权函数构造时的不确定性,并完全保留观测值的有效信息。最后将该模型应用于许昌市民营企业核心竞争力的聚类评价中,取得了合理的结论,验证了该方法的有效性和合理性,不仅拓宽了灰色聚类的应用范围,同时也符合灰色系统的内涵。

2 区间灰数型白化权函数构造

定义 1 既有下界 \otimes^- 又有上界 \otimes^+ 的灰数称为区间灰数,记为 $\otimes \in [\otimes^-, \otimes^+]$ 。对于区间灰数 $\otimes \in [\otimes^-, \otimes^+](\otimes^- \leq \otimes^+)$, 记

$$\otimes(\gamma) = \otimes^- + (\otimes^+ - \otimes^-)\gamma, 0 \leq \gamma \leq 1$$

为区间灰数 \otimes 的标准化形式。

定义 2 设有 n 个聚类对象, m 个聚类指标, s 个不同灰类,根据第 $i(i = 1, 2, \dots, n)$ 个对象关于 $j(j = 1, 2, \dots, m)$ 指标的观测值 x_{ij} 将第 i 个对象归入第 $k(k \in \{1, 2, \dots, s\})$ 个灰类,称为灰色聚类。将 n 个对象关于指标 j 的取值相应地分为 s 个灰类,称为 j 指标 k 子类。 j 指标 k 子类的区间灰数型白化权函数记为 $f_j^k(\otimes)$ 。

定义 3 设 j 指标 k 子类的区间灰数型白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 为如图 1 所示(假设分段曲线为分段直线,并且观测值均为实数值),则称 $\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2), \otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)$ 为 $f_j^k(\otimes)$ 的转折点。

(1)若白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 的四个转折点都存在,则称 $f_j^k(\otimes)$ 为区间灰数型典型白化权函数,记为 $f_j^k[\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2), \otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)]$ 。

(2)若白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 无第一个和第二个转折点 $\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2)$, 则称 $f_j^k(\otimes)$ 为区间灰数型下限测度白化权函数,记为 $f_j^k[-, -, \otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)]$ 。

(3)若白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 第二个和第三个转折点 $\otimes_j^k(2), \otimes_j^k(3)$ 重合,则称 $f_j^k(\otimes)$ 为区间灰数型适中测度白化权函数,记为 $f_j^k[\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2), -, \otimes_j^k(4)]$ 。

(4)若白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 无第三个和第四个转折点 $\otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)$, 则称 $f_j^k(\otimes)$ 为区间灰数型上限测度白化权函数,记为 $f_j^k[\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2), -, -]$ 。

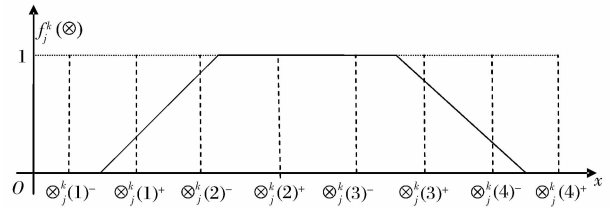


图 1 区间灰数型的典型白化权函数

定义 4 设 $x_{ij}(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ 为对象 i 关于指标 j 的观测值, $f_j^k(\otimes)(k = 1, 2, \dots, s)$ 为 j 指标 k 子类的区间灰数型白化权函数。若 j 指标 k 子类的权 η_j^k 与 k 无关,此时可将 η_j^k 的上标 k 去掉,记为 η_j , 并称:

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \eta_j$$

为对象 i 属于 k 灰类的灰色定权聚类系数。若 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\sigma_i^k\} = \sigma_i^{k^*}$, 则称对象 i 属于灰类 k^* 。

定义 5 设 $x_{ij}(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ 为对象 i 关于指标 j 的观测值, $f_j^k(x_{ij})(k = 1, 2, \dots, s)$ 为 j 指标 k 子类的区间灰数型白化权函数,则

(1)对于区间灰数型典型白化权函数有:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(4)] \\ \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)}{\otimes_j^k(2) - \otimes_j^k(1)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2), \otimes_j^k(3)] \\ \frac{\otimes_j^k(4) - x_{ij}}{\otimes_j^k(4) - \otimes_j^k(3)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)] \end{cases} \quad (1)$$

(2)对于区间灰数型下限测度白化权函数有:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [0, \otimes_j^k(4)] \\ 1, & x_{ij} \in [0, \otimes_j^k(3)] \\ \frac{\otimes_j^k(3) - x_{ij}}{\otimes_j^k(4) - \otimes_j^k(3)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3), \otimes_j^k(4)] \end{cases} \quad (2)$$

(3) 对于区间灰数型适中测度白化权函数有:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(4)] \\ \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(2)}{\otimes_j^k(2) - \otimes_j^k(1)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2)] \\ \frac{\otimes_j^k(4) - x_{ij}}{\otimes_j^k(4) - \otimes_j^k(2)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2), \otimes_j^k(4)] \end{cases} \quad (3)$$

(4) 对于区间灰数型上限测度白化权函数有:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} < \otimes_j^k(1) \\ \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)}{\otimes_j^k(2) - \otimes_j^k(1)}, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1), \otimes_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \geq \otimes_j^k(2) \end{cases} \quad (4)$$

3 区间灰数型白化权函数的表达式

区间灰数型白化权函数可分为四种,其中区间灰数型上限测度白化权函数、适中测度白化权函数、

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(4)] \\ [0, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+] \\ [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^+}, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, x_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \in [x_j^k(2), x_j^k(3)] \\ \frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - x_j^k(3)}, & x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)] \end{cases} \quad (5)$$

若第二个转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(2)$, $\otimes_j^k(2) \in [\otimes_j^k(2)^-, \otimes_j^k(2)^+]$, 第一、三、四转折点均为实数

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [x_j^k(1), x_j^k(4)] \\ [\frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{\otimes_j^k(2)^+ - x_j^k(1)}, \frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{\otimes_j^k(2)^- - x_j^k(1)}], & x_{ij} \in [x_j^k(1), \otimes_j^k(2)^-] \\ [\frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{\otimes_j^k(2)^+ - x_j^k(1)}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^-, \otimes_j^k(2)^+] \\ 1, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^+, x_j^k(3)] \\ \frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - x_j^k(3)}, & x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)] \end{cases} \quad (6)$$

若第三个转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(3)$, $\otimes_j^k(3) \in [\otimes_j^k(3)^-, \otimes_j^k(3)^+]$, 第一、二、四转折点均为实数

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [x_j^k(1), x_j^k(4)] \\ \frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{x_j^k(2) - x_j^k(1)}, & x_{ij} \in [x_j^k(1), x_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \in [x_j^k(2), \otimes_j^k(3)^-] \\ [\frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - \otimes_j^k(3)^-}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^-, \otimes_j^k(3)^+] \\ [\frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - \otimes_j^k(3)^-}, \frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - \otimes_j^k(3)^+}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^+, x_j^k(4)] \end{cases} \quad (7)$$

下限测度白化权函数均为区间灰数型典型白化权函数的特例,因此以下均对区间灰数型典型白化权函数进行讨论。区间灰数型典型白化权函数由分段曲线构成,每条曲线连接着两个转折点,以下分别讨论分段曲线一端为区间灰数和两端均为区间灰数的情况。根据定义 3 中的假设,分段曲线均以分段直线代替研究,观测值为实数值。

3.1 分段直线的某一端转折点为区间灰数

命题 1 设 j 指标 k 子类的区间灰数型典型白化权函数为 $f_j^k(\otimes)$, $f_j^k(\otimes)$ 的四个转折点中有且仅有一个为区间灰数。若第一个转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(1)$, $\otimes_j^k(1) \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+]$, 第二、三、四转折点均为实数值 $x_j^k(2)$, $x_j^k(3)$, $x_j^k(4)$, 对象 i 在指标 j 下的观测值 x_{ij} 的区间灰数型白化权函数值为 $f_j^k(x_{ij})$, 则:

$$\begin{aligned} & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, x_j^k(4)] \\ & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+] \\ & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, x_j^k(2)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(2), x_j^k(3)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)] \end{aligned} \quad (5)$$

值则:

$$\begin{aligned} & x_{ij} \notin [x_j^k(1), x_j^k(4)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(1), \otimes_j^k(2)^-] \\ & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^-, \otimes_j^k(2)^+] \\ & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^+, x_j^k(3)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)] \end{aligned} \quad (6)$$

值则:

$$\begin{aligned} & x_{ij} \notin [x_j^k(1), x_j^k(4)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(1), x_j^k(2)] \\ & x_{ij} \in [x_j^k(2), \otimes_j^k(3)^-] \\ & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^-, \otimes_j^k(3)^+] \end{aligned} \quad (7)$$

若第四个转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(4)$, $\otimes_j^k(4) \in [\otimes_j^k(4)^-, \otimes_j^k(4)^+]$, 第一、二、三转折点均为实数

值则:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [x_j^k(1), x_j^k(4)] \\ \frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{x_j^k(2) - x_j^k(1)}, & x_{ij} \in [x_j^k(1), x_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \in [x_j^k(2), x_j^k(3)] \\ \left[\frac{\otimes_j^k(4)^- - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^- - x_j^k(3)}, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - x_j^k(3)} \right], & x_{ij} \in [x_j^k(3), \otimes_j^k(4)^-] \\ \left[0, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - x_j^k(3)} \right], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(4)^-, \otimes_j^k(4)^+] \end{cases} \quad (8)$$

此处仅对公式 5 进行证明, 另外三种情况证明以此类推。

证明 (1) 当 $x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, x_j^k(2)]$ 时, 由实数型白化权函数即可得到 $f_j^k(x_{ij})$ 的值。

(2) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, x_j^k(2)]$ 时, 根据图 1 所示, 需要将其分为两段区间讨论, 即 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, x_j^k(2)]$ 和 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+]$ 两段区间。

设 $\otimes_j^k(\gamma_1) = \otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1$, $0 \leq \gamma_1 \leq 1$ 为 $\otimes_j^k(1)$ 的标准化形式。则:

1) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, x_j^k(2)]$ 时,

$$f_j^k(x_{ij}) = \frac{x_{ij} - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1]}{x_j^k(2) - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1]} \quad (9)$$

对式 9 求导, 得 $\frac{df_j^k(x_{ij})}{d\gamma_1} =$

$$\frac{[x_{ij} - x_j^k(2)][(\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)]}{[x_j^k(2) - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1]]^2},$$

因为 $[x_{ij} - x_j^k(2)] < 0$ 且 $[(\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)] > 0$, 所以 $\frac{df_j^k(x_{ij})}{d\gamma_1} < 0$, 则 $f_j^k(x_{ij})$ 随着 γ_1

增大而减小, 所以 $f_j^k(x_{ij}) \in \left[\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^+}, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-} \right]$ 。

2) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+]$ 时, 需要再分为两种情况:

当 $\otimes_j^k(1)^- \leq x_{ij} \leq \otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1$ 时, $f_j^k(x_{ij}) = 0$;

当 $\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-)\gamma_1 \leq x_{ij} \leq \otimes_j^k(1)^+$ 时, $f_j^k(x_{ij})$ 可由式(9)可求得:

$f_j^k(x_{ij}) \in \left[0, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-} \right]$ 。由白化权函数本身涵义可知, $[x_j^k(2) - \otimes_j^k(\gamma_1)] \geq [x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-] > [\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-] \geq [x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-]$ 因为若白化权函数的第二个转折点到第一个转折点间的距离与第一个转折点区间灰数的区间长度差不多, 那么白化权函数对于各个类的区分度就太小, 将导致白化权函数的失去分类意义, 故 $\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-}$ 应当趋近于 0。因此, 可以将 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+]$ 的两种情况合并, 得到当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+]$ 时,

$$f_j^k(x_{ij}) \in \left[0, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{x_j^k(2) - \otimes_j^k(1)^-} \right]。$$

综上所述, 式(5)得证。

3.2 分段直线的两端转折点均为区间灰数

以上讨论了四个转折点中仅有一个为区间灰数的白化权函数求解方法, 下面探讨分段直线两段均为区间灰数的白化权函数值的求解方法。同样取区间灰数典型白化权函数为研究对象, 在此仅讨论第一、第二转折点为区间灰数的情况, 第三、第四转折点为区间灰数的情况以此类推。

命题 2 设 j 指标 k 子类的区间灰数典型白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 有四个转折点, 若第一和第二个转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(1)$ 和 $\otimes_j^k(2)$, 第三、四转折点均为实数值 $x_j^k(3)$, $x_j^k(4)$, 对象 i 在指标 j 下的观测值 x_{ij} 的区间灰数型白化权函数值为 $f_j^k(x_{ij})$, 则:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(4)^+] \\ [0, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{\otimes_j^k(2)^- - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+] \\ [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(1)^+}, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{\otimes_j^k(2)^- - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, \otimes_j^k(2)^-] \\ [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(1)^+}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^-, \otimes_j^k(2)^+] \\ 1, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^+, x_j^k(3)] \\ \frac{x_j^k(4) - x_{ij}}{x_j^k(4) - x_j^k(3)}, & x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)] \end{cases} \quad (10)$$

若第三、第四转折点为区间灰数 $\otimes_j^k(3)$ 和 $\otimes_j^k(4)$, 第一、二转折点均为实数值 $x_j^k(3), x_j^k(4)$, 则:

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [x_j^k(1), \otimes_j^k(4)^+] \\ \frac{x_{ij} - x_j^k(1)}{x_j^k(2) - x_j^k(1)}, & x_{ij} \in [x_j^k(1), x_j^k(2)] \\ 1, & x_{ij} \in [x_j^k(2), \otimes_j^k(3)^-] \\ [\frac{\otimes_j^k(4)^- - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^- - \otimes_j^k(3)^-}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^-, \otimes_j^k(3)^+] \\ [\frac{\otimes_j^k(4)^- - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^- - \otimes_j^k(3)^-}, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - \otimes_j^k(3)^+}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^+, \otimes_j^k(4)^-] \\ [0, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - \otimes_j^k(3)^+}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(4)^-, \otimes_j^k(4)^+] \end{cases} \quad (11)$$

此处仅对公式 10 证明, 公式 11 以此类推。

证明 (1) 当 $x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, x_j^k(4)]$ 时, x_{ij} 不在白化权函数上, 所以 $f_j^k(x_{ij}) = 0$;

(2) 当 $x_{ij} \in [x_j^k(3), x_j^k(4)]$ 时, 由实数型白化权函数可直接得到 $f_j^k(x_{ij})$ 的值。

(3) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^+, x_j^k(3)]$ 时, 由图 1 可以得到 $f_j^k(x_{ij}) = 1$;

(4) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+] \cup [\otimes_j^k(2)^-,$

$$f_j^k(x_{ij}) = \frac{x_{ij} - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]}{\otimes_j^k(2)^- + (\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) \gamma_2 - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]}, \gamma_1 \in [0, 1], \gamma_2 \in$$

$[0, 1]$ 则分别对 γ_1 和 γ_2 求偏导数, 得:

$$\frac{\partial f_j^k(x_{ij})}{\partial \gamma_1} = \frac{(\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) [x_{ij} - \otimes_j^k(2)^- - (\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) \gamma_2]}{[\otimes_j^k(2)^- + (\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) \gamma_2 - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]^2} < 0;$$

$$\frac{\partial f_j^k(x_{ij})}{\partial \gamma_2} = \frac{-(\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) [x_{ij} - \otimes_j^k(1)^- - (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]}{[\otimes_j^k(2)^- + (\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) \gamma_2 - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]^2} < 0.$$

所以 $f_j^k(x_{ij})$ 分别关于 γ_1 和 γ_2 单调递减, 根据单调性可以求得:

$$f_j^k(x_{ij}) \in [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(1)^+}, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{\otimes_j^k(2)^- - \otimes_j^k(1)^-}]$$

综上所述, 公式 10 得证。

3.3 四个转折点均为区间灰数

以上分别讨论区间灰数型典型白化权函数中一个转折点为区间灰数和两个相邻转折点为区间灰数的情况, 总结 3.1 与 3.2 中的六种情况, 可以得到区

$\otimes_j^k(2)^+$ 时, 根据公式 5 与公式 6, 可以得到 $f_j^k(x_{ij})$, 此处不再重复证明。

(5) 当 $x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, \otimes_j^k(2)^-]$ 时,

根据定义 1, 设 $\otimes_j^k(\gamma_i) = \otimes_j^k(i)^- + (\otimes_j^k(i)^+ - \otimes_j^k(i)^-) \gamma_i, 0 \leq \gamma_i \leq 1$ 为区间灰数 $\otimes_j^k(1)$ 和 $\otimes_j^k(2)$ 的标准化形式。则根据式 1 可得:

$$f_j^k(x_{ij}) = \frac{x_{ij} - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]}{\otimes_j^k(2)^- + (\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(2)^-) \gamma_2 - [\otimes_j^k(1)^- + (\otimes_j^k(1)^+ - \otimes_j^k(1)^-) \gamma_1]}, \gamma_1 \in [0, 1], \gamma_2 \in$$

间灰数型典型白化权函数中四个转折点均为区间灰数的一般情况下的 $f_j^k(x_{ij})$ 的表达式。

命题 3 设 j 指标 k 子类的区间灰数型典型白化权函数 $f_j^k(\otimes)$ 有四个转折点, 若四个点都是区间灰数, 分别为 $\otimes_j^k(1)$ 、 $\otimes_j^k(2)$ 、 $\otimes_j^k(3)$ 和 $\otimes_j^k(4)$, 对象

i 在指标 j 下的观测值 x_{ij} 的区间灰数型白化权函数值为 $f_j^k(x_{ij})$, 则可得公式(12)。

$$f_j^k(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} \notin [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(4)^+] \\ [0, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{\otimes_j^k(2)^- - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^-, \otimes_j^k(1)^+] \\ [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(1)^+}, \frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^-}{\otimes_j^k(2)^- - \otimes_j^k(1)^-}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(1)^+, \otimes_j^k(2)^-] \\ [\frac{x_{ij} - \otimes_j^k(1)^+}{\otimes_j^k(2)^+ - \otimes_j^k(1)^+}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^-, \otimes_j^k(2)^+] \\ 1, & x_{ij} \in [\otimes_j^k(2)^+, \otimes_j^k(3)^-] \\ [\frac{\otimes_j^k(4)^- - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^- - \otimes_j^k(3)^-}, 1], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^-, \otimes_j^k(3)^+] \\ [\frac{\otimes_j^k(4)^- - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^- - \otimes_j^k(3)^-}, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - \otimes_j^k(3)^+}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(3)^+, \otimes_j^k(4)^-] \\ [0, \frac{\otimes_j^k(4)^+ - x_{ij}}{\otimes_j^k(4)^+ - \otimes_j^k(3)^+}], & x_{ij} \in [\otimes_j^k(4)^-, \otimes_j^k(4)^+] \end{cases} \quad (12)$$

4 实例分析

为了分析许昌市民营企业核心竞争力发展情况,在许昌选取了 8 家本地民营企业进行调研。从以下五个方面对民营企业核心竞争力进行评估:技术能力、管理能力、财政能力、企业家素质和企业文化。8 家民营企业将被划分为三个类别:核心竞争力强、核心竞争力一般和核心竞争力较差。在获取数据时,技术能力、管理能力和财政能力均可通过公司业绩、硬件设备、管理成效等定量分析,但企业家素质和企业文化只能通过定性分析,无法准确量化,因此采用区间灰数来表示更为合理。8 家企业的各类指标得分如表 1 所示:

表 1 八家民营企业评价指标得分

	技术能力	管理能力	财政能力	企业家素质	企业文化
1	79.03	51.69	65.00	(78.77,80.21)	(81.20,83.40)
2	52.42	50.14	61.41	(84.39,86.76)	(82.37,83.86)
3	61.87	57.10	63.97	(95.00,97.00)	(81.66,82.98)
4	43.12	43.21	27.49	(11.11,12.34)	(16.75,18.93)
5	25.92	33.32	46.89	(69.24,70.35)	(43.59,44.98)
6	45.94	92.05	61.93	(90.48,92.19)	(30.71,32.08)
7	37.89	9.01	48.86	(79.25,79.98)	(51.19,53.76)
8	18.66	10.31	60.27	(55.14,57.89)	(52.36,53.63)

从上表可以看出,企业家素质和企业文化均为区间灰数,因此构建区间灰数型白化权函数更为合理。传统的灰色聚类模型无法处理这类问题。根据 20 位专家的调研,各指标在不同灰类的区间灰数型白化权函数确定如下:

技术能力指标的三类白化权函数:

证明与公式 5、公式 10 的证明过程类似。

$$f_1^1[50,75,-,-]; f_1^2[35,50,-,75]; f_1^3[-,-,35,50];$$

管理能力指标的三类白化权函数:

$$f_2^1[38,60,-,-]; f_2^2[20,38,-,60]; f_2^3[-,-,20,38];$$

财务能力指标的三类白化权函数:

$$f_3^1[47,63,-,-]; f_3^2[29,47,-,63]; f_3^3[-,-,29,47];$$

企业家素质能力指标的三类白化权函数:

$$f_4^1[(77,82),(95,100),-,-]; f_4^2[(55,58),(77,82),-,(95,100)]; f_4^3[-,-,(55,58),(77,82)];$$

企业文化指标的三类白化权函数:

$$f_5^1[(54,57),(75,80),-,-]; f_5^2[(37,40),(54,57),-,(75,80)]; f_5^3[-,-,(37,40),(54,57)];$$

采用灰色定权聚类,确定各指标权重为 $\eta_j = \frac{1}{5}$ 。根据定义 4 中的公式 $\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij})\eta_j$, 得到灰色定权聚类系数矩阵:

$$\Sigma = [\sigma_i^k] \in \begin{bmatrix} (0.72,0.75) & (0.27,0.28) & (0,0.02) \\ (0.52,0.60) & (0.36,0.45) & 0 \\ (0.81,0.87) & (0.13,0.16) & 0 \\ 0.05 & 0.26 & 0.69 \\ 0 & (0.48,0.64) & (0.42,0.52) \\ (0.48,0.55) & (0.19,0.27) & 0.26 \\ (0.02,0.06) & (0.51,0.61) & (0.36,0.46) \\ 0.16 & (0.17,0.26) & (0.58,0.65) \end{bmatrix}$$

根据周伟杰等^[18]中的区间灰数排序方法,得到

如下结果:

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_1^k\} = \sigma_1^1 \in [0.72, 0.75]; \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_2^k\} = \sigma_2^1 \in [0.52, 0.60]$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_3^k\} = \sigma_3^1 \in [0.81, 0.87]; \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_4^k\} = \sigma_4^3 = 0.69$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_5^k\} = \sigma_5^2 \in [0.48, 0.64]; \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_6^k\} = \sigma_6^1 \in [0.48, 0.55]$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_7^k\} = \sigma_7^2 \in [0.51, 0.61]; \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_8^k\} = \sigma_8^3 \in [0.58, 0.65]$$

总体来看,许昌市民营企业核心竞争力较强。其中企业 1、企业 2、企业 3、企业 6 的核心竞争力较强,企业 5 和企业 7 的核心竞争力一般,企业 4 和企业 8 的核心竞争力较弱。聚类过程中也可得到各企业的弱势和强势指标,为提升该企业的核心竞争力提供依据。

5 结语

本文针对灰色定权聚类只适用于实数型白化权函数的缺陷,提出了区间灰数型白化权函数。通过对区间灰数的标准化,给出了区间灰数型白化权函数的表达式。并选取区间灰数型典型白化权函数作为研究对象,讨论了区间灰数型白化权函数分段曲线为直线的情况。分别探究了白化权函数分段直线一端为区间灰数和两端均为区间灰数的情况,最后给出了四个转折点均为区间灰数的一般区间灰数型白化权函数计算公式。通过实例分析验证了区间灰数型白化权函数的可行性,对区间灰数在灰色聚类模型中的继续探索具有较大的理论与实际意义。

参考文献:

[1] Deng Julong. Control problems of unknown system[J]. Proceedings of the Bilateral Meeting on Control systems, 1981, 156—171.

[2] 刘思峰,谢乃明. 基于改进三角白化权函数的灰评估新方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 244—250.

[3] 刘勇, 营利荣, 刘思峰. 杂合灰色聚类与变精度粗糙模糊集的概率决策方法[J]. 系统工程, 2012, 30(5): 89—95.

[4] Li Xican, Zhang Guangbo, Qi Fengyan, et al. Grey cluster estimating model of soil organic matter content based on hyper-spectral data[J]. Journal of Grey System, 2014, 26(2): 28—37.

[5] 张岐山. 灰聚类分析结果灰性的测度[J]. 中国管理科学, 2002, 10(1): 54—56.

[6] Zhang Qishan, Wang Haiyan. Measuring the greyness of grey cluster knowledge[J]. Journal of Grey System, 2009, 21(3): 259—268.

[7] Yuan Chaoqing, Liu Sifeng. Core of grey cluster and its application in evaluation of scientific and technological strength[J]. Journal of Grey System, 2012, 24(4): 327—336.

[8] 党耀国, 刘思峰. 聚类系数无显著性差异下的灰色综合聚类方法研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(4): 69—73.

[9] 米传民, 刘思峰, 党耀国, 等. 灰色熵权聚类决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(12): 1823—1825.

[10] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 基于白化权函数分类区分度的变权灰色聚类[J]. 统计与信息论坛, 2011, 26(6): 23—27.

[11] 董一哲, 党耀国. 基于离差最大化的灰色聚类方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(9): 141—146.

[12] 宋捷, 党耀国, 花增木. 基于灰色聚类的群决策方法研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1593—1597.

[13] Ghazanfar M A, Prugel-Bennett A. Leveraging clustering approaches to solve the gray-sheep users problem in recommender systems[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(7): 3261—3275.

[14] Wang Jianling, Wu Junyan. The empirical study of airline service dimension based on grey incidence cluster[J]. Journal of Grey System, 2014, 26(2): 154—161.

[15] Xie Naiming, Xin Jianghui, Liu Sifeng. China's regional meteorological disaster loss analysis and evaluation based on grey cluster model[J]. Natural Hazards, 2014, 71(2): 1067—1089.

[16] Wang Shuwei, Sun Lishan, Rong Jian, et al. Transit station congestion index research based on pedestrian simulation and gray clustering evaluation[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013, ID 891048, 1—8.

[17] 张志勇, 吴声. 基于白化权函数的区间灰数关联度模型[J]. 中国管理科学, 2015, 23(1): 154—162.

[18] 周伟杰, 党耀国, 熊萍萍, 等. 区间灰数的灰色变权与定权聚类模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2590—2595.

[19] 郭海英, 庞彦军. 确认度意义下区间灰数的一种序关系[J]. 河北建筑科技学院学报, 2003, 20(1): 85—86.

Grey Clusters Method with Fixed Weights Based on the Interval Grey Number

WANG Jun-jie¹, DANG Yao-guo¹, LI Xue-mei¹, CUI Jie²

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211100, China;

2. College of Economics and Management, Huai Yin Institute of Technology, Huaian 223001, China)

Abstract: As the society and economy developing, more and more problems need to use interval grey number. Aiming at the situation that the turn point of the whitenization function must be real number, the method of building and calculating the function when the turn point is an interval grey number was discussed in this paper. Firstly, this paper constructed weight function with interval gray number was constructed through defining the standardized methods of the interval grey number. Then use the standardized interval grey number replace the real number of the whitenization function. And the expression of the whitenization function with interval grey number was given. Secondly, discuss the two circumstances that there was only one interval grey number in the piecewise curve of the whitening function or two endpoints were both interval grey numbers. And when the four turn points were all interval grey numbers, the expression of whitenization function $f_j^k(\otimes)$ was given. At last, the interval grey clusters model was used to evaluate the core competencies of eight private enterprises in Xuchang. Our group had investigated the eight enterprises to get the data. And twenty experts had been asked to build the whitenization function. The result indicated the model is effective and reasonable.

Key words: grey clusters; interval grey number; whitenization function; standardization