

# 基于 S-A 湍流模型和间歇因子输运方程的转捩流数值模拟

杜磊, 宁方飞

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 考虑到  $\gamma-Re_{\theta t}$  转捩模型中间歇因子输运方程并不依赖于具体的湍流模型, 因而提出了耦合 S-A 湍流模型和间歇因子输运方程的转捩流模拟方法. 其主要思想是构造与间歇因子相关的两个耦合函数, 分别作用到 S-A 模型的生成项和耗散项用以控制湍流的产生与发展, 从而实现层流到湍流的数值转捩. 结果表明: 该方法中模型方程具有完全当地性的特点, 易于实施, 可直接用以求解三维转捩流动. 4 个典型算例表明该方法模拟结果与  $\gamma-Re_{\theta t}$  模型准确度相当, 但少求解了两个输运方程, 计算耗时减少了 15%.

**关键词:** 湍流模型; 间歇因子; 层流; 湍流; 转捩模型

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

## Numerical simulation of transition flows based on S-A turbulence model and intermittency transport equation

DU Lei, NING Fang-fei

(School of Energy and Power Engineering,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Considering the intermittency transport equation in  $\gamma-Re_{\theta t}$  model independent of a specified turbulence model, a numerical simulation method for transitional flow by coupling the S-A turbulence model with intermittency transport equation was proposed. To control the generation and development of turbulence, two coupled functions related to the intermittency were applied on the production and destruction terms of S-A model respectively. As the model equations are local type, they can be easily implemented into an existent CFD code and 3-D transitional flows can also be solved directly. Four typical test cases indicate that the presented model has the equal accuracy as  $\gamma-Re_{\theta t}$  model. And due to pruning of two equations, the current model can decrease 15% time cost.

**Key words:** turbulence model; intermittency; laminar flow; turbulent; transition model

层流到湍流的转捩过程广泛存在于各种内流和外流流动之中, 是否考虑转捩在某些情况下是决定数值模拟结果准确性的主要因素, 如飞行器的阻力和升力大小, 叶轮机械的流动损失、换热以及堵塞等, 直接关系到对性能的评估. 因而准确有

效的模拟转捩流动对分析和设计高性能的流体装置有着重要作用.

理论上而言, 直接数值模拟(DNS)以及大涡模拟方法(LES)能够直接求解出层流到湍流的转捩过程<sup>[1]</sup>. 然而, 由于这两种方法要求极高的时空

分辨率,使得目前还难以用来解决雷诺数较高的工程实际流动,所以在雷诺平均的范畴内耦合现有湍流模型成为模拟转捩流动的主流研究方向. 具体来说主要有 4 种不同方式,分别是利用湍流模型自身的转捩能力、 $e^N$  方法、 $k-k_1-\omega$  转捩模型以及经验关系式法,文献[2]对以上各方法做了较为详细的综述.

早期使用经验关系式预测转捩时需要积分出边界层的动量厚度雷诺数,如使用较多的 Abu-Ghannam and Shaw(AGS)转捩模型<sup>[3]</sup>,因而不是当地型的方法,对于复杂的三维流动很难实施,尤其对非结构网格以及并行计算时这一缺陷将更加突出. 为此,Langtry 等<sup>[4]</sup>提出了基于转捩经验关系式且完全当地型的  $\gamma-Re_{\theta_t}$  转捩模型. 大量计算表明<sup>[5]</sup>,耦合 shear stress transport(SST)的  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 转捩模型能够有效预测各类转捩流动,显示出良好的工程应用前景. 国内也出现了众多有关该模型的相关研究,其中包括模型的验证和应用<sup>[6-7]</sup>、关联函数的构造<sup>[8]</sup>以及模型的改进<sup>[9-10]</sup>等. 需要指出的是, $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 作为一个四方程模型,计算量相对较大. 注意到,在此模型中  $\gamma$  和  $Re_{\theta_t}$  方程并不依赖于某个具体的湍流模型,因此耦合别的湍流模型来模拟转捩同样可行. 基于这一考虑,Medida 等<sup>[11]</sup>将  $\gamma-Re_{\theta_t}$  应用到了非常流行的 Spalart-Allmaras(S-A)湍流模型,发展了  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SA 转捩模型并对翼型的转捩流动进行了数值模拟,获得了不错的结果. 张晓东等<sup>[12]</sup>的计算表明使用  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SA 和  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 所得的转捩流模拟结果差别不大,但前者具有更高的计算效率.

由于  $\gamma-Re_{\theta_t}$  模型中转捩动量厚度雷诺数输运方程是建立在自由流的当地湍流度基础上,显然,对于 SST 模型这不是问题,但对于 S-A 此类无法给出流场中湍流度信息的模型,  $Re_{\theta_t}$  方程就失去了原有的意义,所以作者以为可以在  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SA 模型的基础上进一步简化,略去  $Re_{\theta_t}$  方程,而只保留间歇因子方程,这样就构成了以下将要介绍的可称为  $\gamma$ -SA 的转捩模型. 这样带来的好处是计算量可以更少,同时避免了构造  $Re_{\theta_t}$  方程中和  $\omega$  相关的保护函数  $F_{\theta_t}$  的难题,而无需像 Medida 等那样在计算中人为给定全场  $F_{\theta_t}$  分布.

## 1 模拟方法

### 1.1 模型方程

在  $\gamma$ -SA 模型中,使用的湍流方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\tilde{\nu})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} &= C_{b1} f_{t1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - \\ C_{w1} f_w f_{t2} \frac{\rho \tilde{\nu}^2}{d^2} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + \right. \\ &\left. C_{b2} \rho \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

相对于原始的 S-A 模型,式(1)的生成项和耗散项分别乘上了耦合函数  $f_{t1}$  和  $f_{t2}$ , 涡黏性系数表达式不变,为

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$$

式中  $d$  为到壁面距离,其余各模型函数为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^6}, f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \\ f_w &= g \left[ \frac{(1 + C_{w3}^6)}{(g^6 + C_{w3}^6)} \right]^{\frac{1}{6}}, g = r + C_{w2} (r^6 - r) \\ r &= \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, \tilde{S} = \min(S, \Omega) + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \end{aligned}$$

式中  $S$  和  $\Omega$  分别为

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}, S_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \\ \Omega &= \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i) \end{aligned}$$

这里  $\tilde{S}$  和通常定义不同,其中引入了取小函数<sup>[16]</sup>,目的是为了避开前缘驻点附近涡黏性的快速增长对之后的层流边界层造成污染,同时又不会对湍流边界层中的涡黏性生成带来影响.

S-A 模型中系数取值如下<sup>[13]</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2/3, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622 \\ \kappa &= 0.41, C_{w1} = C_{b1} / \kappa^2 + (1 + C_{b2}) / \sigma \\ C_{v1} &= 7.1, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2 \end{aligned}$$

在  $\gamma$ -SA 模型中,间歇因子方程即  $\gamma-Re_{\theta_t}$  模型中的  $\gamma$  方程,表达式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \gamma)}{\partial x_j} &= \\ P_\gamma - D_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left[ \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_f} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

其中生成项和耗散项定义分别为

$$P_\gamma = F_{\text{length}} c_{a1} \rho S \sqrt{\gamma F_{\text{onset}}} (1 - c_{e1} \gamma) \quad (3)$$

$$D_\gamma = F_{\text{turb}} c_{a2} \rho \Omega \gamma (c_{e2} \gamma - 1) \quad (4)$$

式中控制  $\gamma$  增长的开关函数  $F_{\text{onset}}$  构造如下:

$$F_{\text{onset}} = \max(F_{\text{onset}2} - F_{\text{onset}3}, 0) \quad (5)$$

$$F_{\text{onset}1} = \frac{Re_\nu}{2.193 Re_{\theta_c}} \quad (6)$$

$$F_{\text{onset}2} = \min[\max(F_{\text{onset}1}, F_{\text{onset}1}^4), 2.0] \quad (7)$$

$$F_{\text{onset3}} = \max\left[1 - \left(\frac{R_t}{2.5}\right)^3, 0\right] \quad (8)$$

$$R_t = \frac{\mu_t}{\mu}, Re_v = \frac{\rho d^2 S}{\mu} \quad (9)$$

另外,函数  $F_{\text{turb}}$  使得模型具备再层流化的模拟能力,其表达式为

$$F_{\text{turb}} = e^{-(R_t/4)^4} \quad (10)$$

式(2)中的模型系数取值为

$$c_{a1} = 2.0, c_{a2} = 0.06$$

$$\sigma_T = 2.0, c_{e1} = 1.0, c_{e2} = 50.0$$

### 1.2 耦合函数

如同  $\gamma-Re_{\theta_t}$  模型,需要将间歇因子恰当地耦合到湍流模型中才能实现层流到湍流的转捩模拟,这正是构造耦合函数的目的所在. Medida 在  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SA 中使用的是和  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 模型中形式相同的耦合函数,这导致平板转捩模拟中得到的摩擦因数曲线在增大过程中存在不光滑现象,所以这里并不采用. 显然  $f_{i1}$  和  $f_{i2}$  都是(有效)间歇因子的函数,同时还应具备以下特性:首先,在层流边界层内必须使  $f_{i1}$  足够小以保证涡黏性不会增长,而在转捩后的湍流边界层内  $f_{i1}$  和  $f_{i2}$  应当都为 1 以确保模型的完全湍流模式;其次,这两个函数应该都是单调的光滑函数;最后,取  $f_{i2} > f_{i1}$  有助于克服该方法计算得到的转捩区过短缺陷. 当然,  $f_{i1}$  和  $f_{i2}$  的取法并不唯一,这里给出本文采用的如图 1 所示的耦合函数,其具体形式如下:

$$f_{i1} = c_{11} \gamma_{\text{eff}} - c_{12}$$

$$f_{i2} = \min[c_{13} \ln(\gamma_{\text{eff}}^2 + c_{14}) + c_{15}, 1.0]$$

各系数取值为

$$c_{11} = 1.07, c_{12} = 0.07$$

$$c_{13} = 0.2, c_{14} = 0.01, c_{15} = 1.0$$

$$Re_{\theta_t} = \begin{cases} \left[1173.51 - 589.428 T_u + \frac{0.2196}{T_u^2}\right] F(\lambda_\theta) & T_u \leq 1.3\% \\ 331.5(T_u - 0.5658)^{-0.671} F(\lambda_\theta) & T_u > 1.3\% \end{cases}$$

其中函数  $F(\lambda_\theta)$  代表了当地压力梯度对转捩动量厚度雷诺数的影响,其表达式为

$$F(\lambda_\theta) = \begin{cases} 1 + (12.986\lambda_\theta + 123.66\lambda_\theta^2 + 405.689\lambda_\theta^3) e^{-(T_u/1.5)^{1.5}} & \lambda_\theta \leq 0 \\ 1 + 0.275(1 - e^{-35.0})^{-0.671\lambda_\theta} e^{-T_u/0.5} & \lambda_\theta > 0 \end{cases}$$

且

$$\lambda_\theta = \frac{\rho \theta^2}{\mu} \cdot \frac{dU}{ds}$$

式中  $\frac{dU}{ds}$  为沿流线方向的速度梯度,可由笛卡儿坐标系下的 3 个方向速度以及其导数大小确定,具体可见文献[4].  $\theta$  为动量厚度.

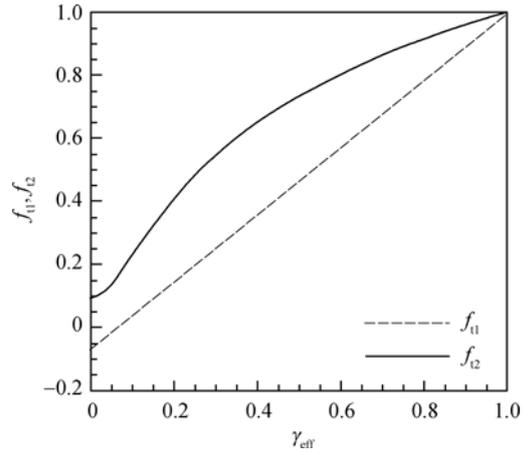


图 1 耦合函数  $f_{i1}, f_{i2}$

Fig. 1 Coupled functions:  $f_{i1}$  and  $f_{i2}$

### 1.3 关联函数

式(6)中的  $Re_{\theta_c}$  被称为临界动量厚度雷诺数,它的大小决定了边界层中间歇因子开始增长的位置,也就决定了转捩发生的位置. 在  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 模型中,需要通过构建  $Re_{\theta_c}$  关于  $Re_{\theta_t}$  的关联函数来实现转捩位置的准确预测. 实际上关联函数的具体形式多种多样,这也从一个侧面反映出该函数的经验性很强,特别是对于使用 S-A 模型而言,在湍流都无法知晓的情况下试图通过  $Re_{\theta_c}$  函数建立具有广泛通用性的转捩预测模型几乎是不可能的,所以这里简单取

$$Re_{\theta_c} = Re_{\theta_t} \quad (11)$$

如此则需要人工指定决定转捩位置的湍流速度,而不再是给定自由来流的湍流速度,这和使用 AGS 转捩模型预测转捩的做法一致. 在指定转捩湍流速度  $T_u$  后可根据 Langtry 等<sup>[14]</sup> 的转捩经验关系式求出全场对应的  $Re_{\theta_t}$  大小,即

另外,在  $\gamma-Re_{\theta_t}$ -SST 模型中,同样需要构造关  $F_{\text{length}}$  和  $Re_{\theta_t}$  之间的关联函数. 该函数用以控制转捩区的长度,  $F_{\text{length}}$  越大转捩区越小,其越小转捩区越大,但与此同时也会改变转捩点的位置. 在本文的计算中发现  $F_{\text{length}}$  改变转捩点位置的作用比调节转捩区大小的作用更加显著,如图 2 所示,图中  $C_f$  为壁面摩擦因数. 因而这里简化处理,取

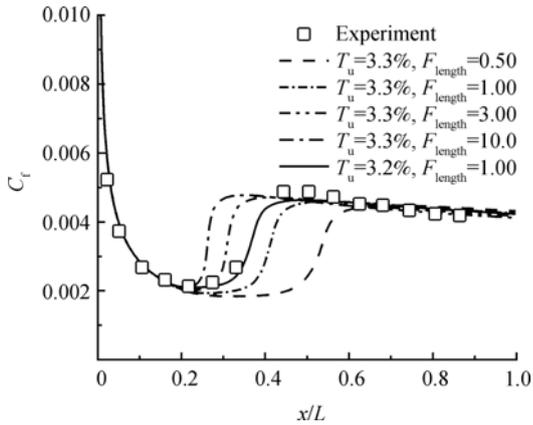


图 2  $F_{length}$  对壁面摩擦因数的影响(算例 T3A)

Fig.2 Influence of  $F_{length}$  on skin friction coefficient (case T3A)

$$F_{length} = 1.0 \quad (12)$$

### 1.4 分离诱导转捩

层流边界层在逆压梯度下容易出现分离,进而造成流动失稳引起转捩的发生,即所谓的分离诱导转捩,此类转捩形式在叶轮机械流动中比较常见.根据流动分离后边界层的涡量雷诺数  $Re_v$  急剧增加的特点,Menter 设计了有效间歇因子的概念<sup>[4]</sup>,同样适用于本文方法,即

$$\gamma_{sep} = \min \left[ \max \left( 0, \frac{Re_v}{3.235 Re_{\theta c}} - 1.0 \right), F_{reattach}, 1.0 \right]$$

$$F_{reattach} = e^{-(R_i/20)^4}, \gamma_{eff} = \max(\gamma, \gamma_{sep})$$

式中  $F_{reattach}$  能够使有效间隙因子在流动再附且变为完全湍流后与原始的间歇因子一致.

当出现层流分离时,边界层中  $Re_v$  快速增加以至于大大超过  $3.235 Re_{\theta c}$ ,此时根据以上关系式中  $\gamma_{sep}$  将迅速变大到 1,进而使有效间歇因子  $\gamma_{eff}$  亦达到 1,从而实现层流到湍流的快速转捩.同时该分离转捩方法不会干扰模型对自然转捩和旁路转捩的预测.这里和  $\gamma-Re_{\theta c}$ -SST 模型不同的是  $\gamma_{sep}$  的最大值被限定为 1.0 而不再是 2.0,这样将不用再构造函数  $F_{\theta c}$  以限制其只在边界层以内起作用,后面的计算结果表明这一修正没有影响模型对分离转捩的模拟.

## 2 数值求解

从以上介绍可以看出, $\gamma$ -SA 模型已经是封闭的可求解方程组,并且模型方程均为标准的输运方程,不存在求解困难,可以很方便的应用到已有 CFD 计算程序中.目前该转捩模型已在自主开发的气动程序 MAP<sup>[15]</sup> (multi-block aerodynamic

prediction code) 中实现.空间项使用有限体积离散,由预处理 LDFSS(low diffusion flux splitting schemes)<sup>[16]</sup> 格式计算控制体表面的对流量,并使用 MUSCL (monotonic upstream-centered scheme for conversation laws) 插值获得高阶精度.扩散通量采用中心差分格式计算,时间上采用隐式离散算法.

在求解模型方程时还需确定其边界条件,对于湍流模型,壁面上令  $\tilde{\nu} = 0$ ,进口处通常给定来流的涡黏性系数  $\mu_t$  和分子黏性系数  $\mu$  的比值即  $R_i$  的大小.计算中发现当给定的转捩湍流度不变,而只改变来流  $R_i$  会引起转捩位置的变化,如图 3 所示.可以看到,转捩位置随着来流涡黏性的增大而前移,这和文献[11]中的结果相一致.这表明来流  $R_i$  的取值不再像全湍流 S-A 模型那样对解无影响,需要根据具体流动给定.对于间歇因子,进口处为 1,在壁面上则令其法向梯度为零.

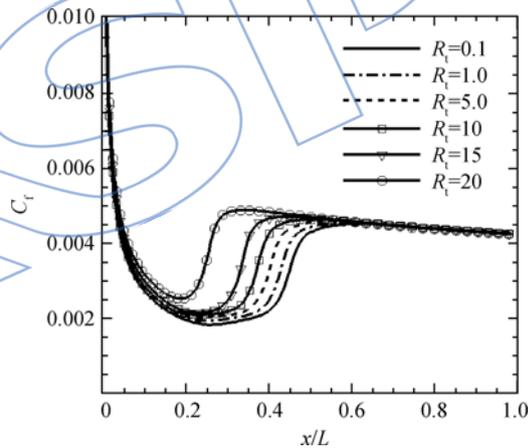


图 3 进口来流  $R_i$  对壁面摩擦系数的影响(算例 T3A)

Fig.3 Influence of free stream  $R_i$  on skin friction coefficient (case T3A)

## 3 算例分析

这部分将同时使用  $\gamma$ -SA 和  $\gamma-Re_{\theta c}$ -SST 模拟 4 种典型转捩流动,包括平板边界层转捩,低速风力机翼型绕流,压气机叶栅流动以及涡轮叶栅流动,并和实验进行比较.

### 3.1 平板边界层转捩

T3<sup>[17]</sup> 系列实验是校验转捩模型的基本算例.实验中包含了零压力梯度(ZPG)和有压力梯度条件下不同来流湍流度时的转捩流动.表 1 给出了具体流动条件,图中  $U$  表示速度,所有来流的密度约为  $1.2 \text{ kg/m}^3$ ,分子黏性系数约为  $1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ .其中 T3A, T3B 和 T3AM 系列为零

压力梯度条件下的旁路转捩, S&K<sup>[18]</sup>系列为零压力梯度下的自然转捩, T3C系列则为有压力梯度时的旁路转捩.

表1 平板前缘上游0.04 m处的来流条件<sup>[4,19]</sup>

Table 1 Inflow condition for flat-plate at 0.04 m upstream of plate leading edge

算例	U/(m/s)	T <sub>w</sub> /%	R <sub>t</sub>
T3A	5.4	3.3	12.0
T3B	9.4	6.5	100.0
T3AM	19.8	0.87	8.72
S&K	50.1	0.30	1.0
T3C1	6.1	7.78	44.0
T3C2	5.3	3.0	11.0
T3C3	4.0	3.0	6.0
T3C4	1.4	3.0	2.0
T3C5	9.0	4.0	15.0

计算中取平板长度 L=1.7 m, 将前缘上游 0.04 m 处作为进口来流位置, 计算域 y 方向高度 D=0.3 m. 具有相似压力梯度的 T3C1, T3C2, T3C3 和 T3C5 (以 T3CX 来表示), 可由式 (13)<sup>[20]</sup> 描述的上壁面形状来达到和实验相当的压力梯度, 即使得边界层外的自由流速度分布和实验一致<sup>[19]</sup>, 如图 4 所示, 对于 T3C4 可根据式 (14)<sup>[20]</sup> 确定其上壁面型线.

$$y/D = \min(1.356x^6 - 7.591x^5 + 16.513x^4 - 17.510x^3 + 9.486x^2 - 2.657x + 0.991, 1) \quad (13)$$

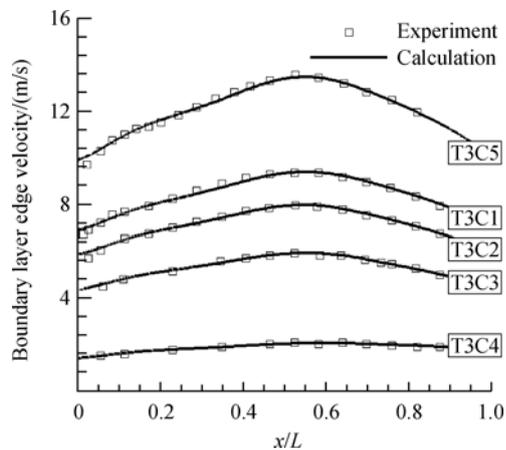


图4 有压力梯度条件下的自由流速度分布

Fig. 4 Free stream velocity distribution for non-zero pressure gradient cases

$$y/D = \min(1.231x^6 - 6.705x^5 + 14.061x^4 - 14.113x^3 + 7.109x^2 - 1.900x + 0.950, 1) \quad (14)$$

图5为平板算例中所使用的计算网格, 所有网格在平板部分的网格点数都是 200×101, 近壁面网格加密, 保证第1层网格单元中心处的 y<sup>+</sup> < 1.0. 在当前的网格条件下所得的计算结果能够满足网格收敛性要求.

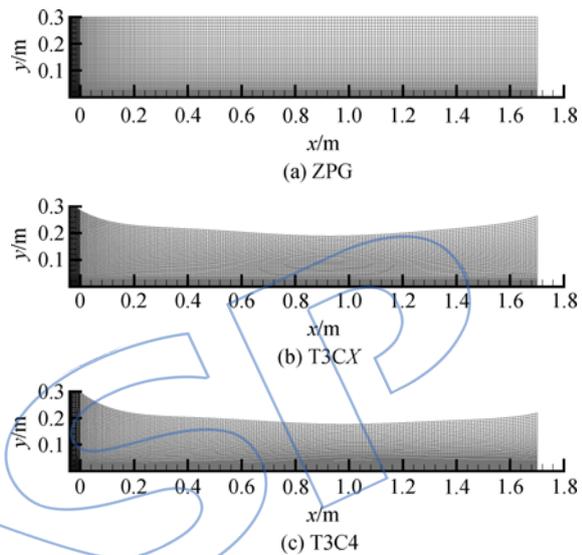
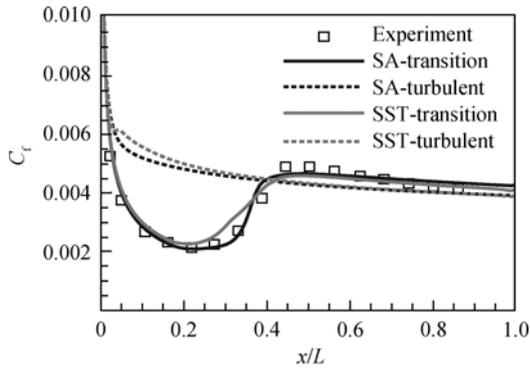


图5 平板转捩流模拟中的计算网格

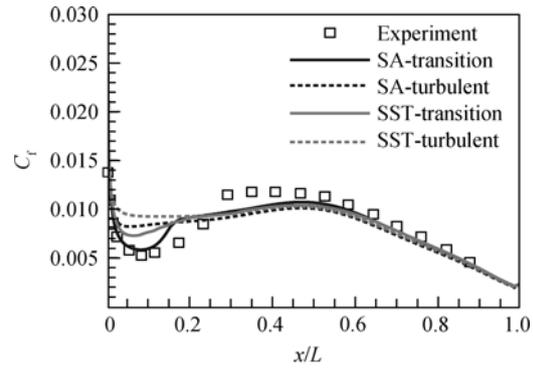
Fig. 5 Calculation mesh for flat plate transition flow simulations

图6~图8给出了计算得到的平板边界层转捩流动模拟结果, 图中 T<sub>w</sub> 和 R<sub>t</sub> 为 γ-SA 模拟时给定的转捩计算条件, 对于 γ-Re<sub>θt</sub>-SST 其进口条件则按照表1中的值给定. 可以看出, 总体上两种转捩模型模拟得到的壁面摩擦因数大小和实验值符合的很好, 转捩前的层流边界层和转捩后的湍流边界层都得以较为准确的模拟. 比较 γ-SA 和 γ-Re<sub>θt</sub>-SST之间的模拟结果不难看出, 两者最大的差别出现在转捩的过渡段, 其中 γ-SA 转捩区更短, 这应该是使用简化的 F<sub>length</sub> 所造成的结果, 但总的来说对结果的影响有限.

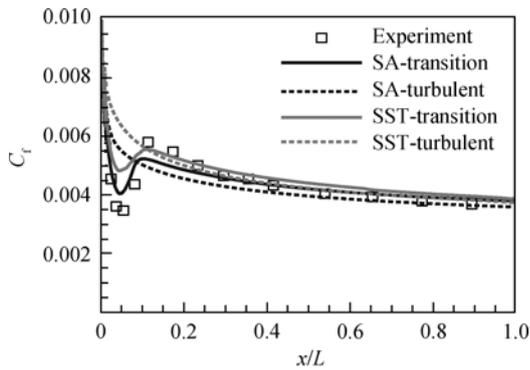
对比表1中的数据不难发现, γ-SA 模型中给定的转捩湍流速度与实验在进口位置处的来流湍流速度并不一致, 即转捩湍流速度要比进口来流湍流速度低一些, 这符合自由流中的湍流速度沿流向衰减的事实, 但具体衰减到多少作为给定的湍流速度合适则与很多因素有关, 难以给出具有通用性的定量准则, 这是 γ-SA 模拟转捩时存在的局限性. R<sub>t</sub> 大小应当与实验中的参考值保持一致, 但计算中发



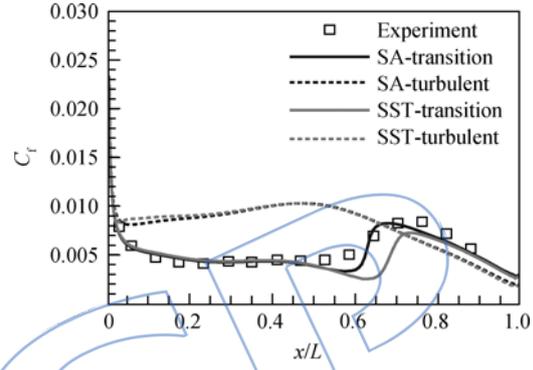
(a) T3A,  $T_u=3.2\%$ ,  $R_t=12.0$



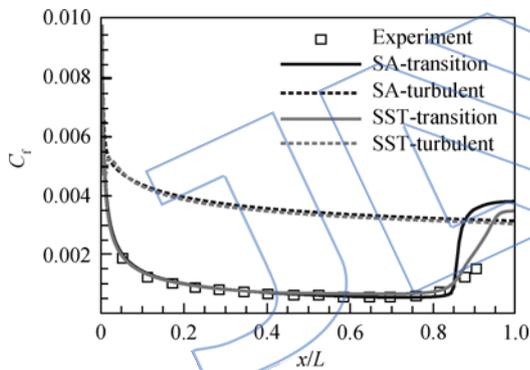
(a) T3C1,  $T_u=3.5\%$ ,  $R_t=25.0$



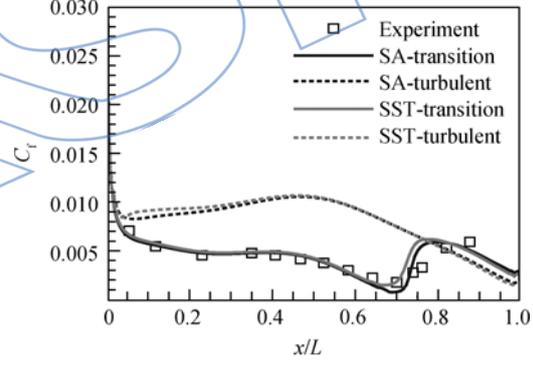
(b) T3B,  $T_u=6.0\%$ ,  $R_t=25.0$



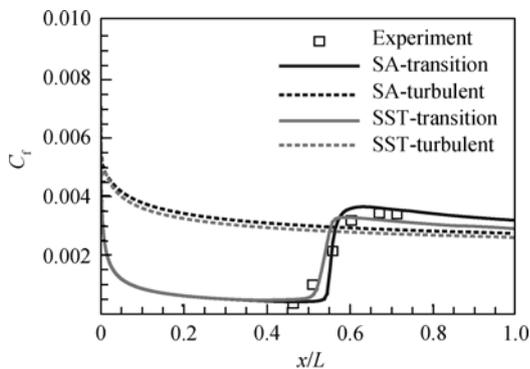
(b) T3C2,  $T_u=2.3\%$ ,  $R_t=11.0$



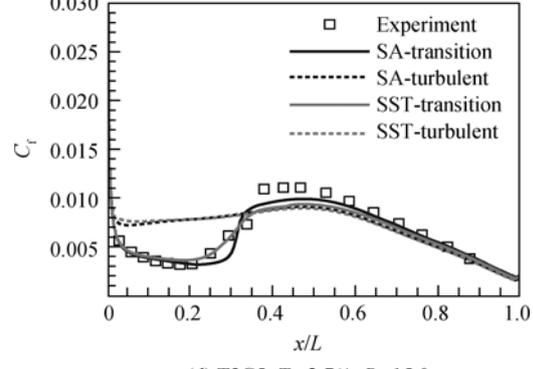
(c) T3AM,  $T_u=0.85\%$ ,  $R_t=8.72$



(c) T3C3,  $T_u=1.5\%$ ,  $R_t=6.0$



(d) S&K,  $T_u=0.456\%$ ,  $R_t=1.0$



(d) T3C5,  $T_u=2.7\%$ ,  $R_t=15.0$

图 6 零压力梯度条件下不同来流湍流度时平板边界层转捩数模拟结果

Fig. 6 Numerical simulation results of flat plate boundary layer transition for zero pressure gradient with different free stream  $T_u$

图 7 有压力梯度条件下不同来流湍流度时平板边界层转捩数模拟结果

Fig. 7 Numerical simulation results of flat plate boundary layer transition for non-zero pressure gradient with different free stream  $T_u$

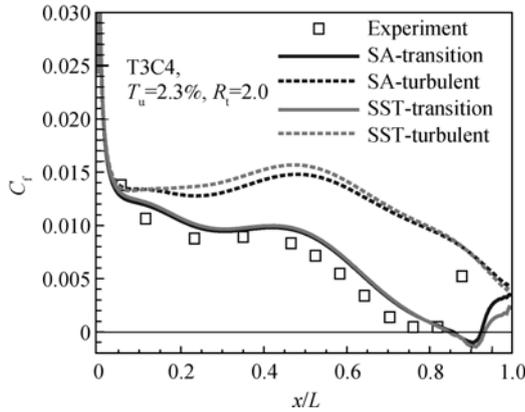


图8 分离转捩的 T3C4 模拟结果

Fig. 8 Simulation results for case T3C4 with separation transition

现对于高湍流度转捩如 T3B 和 T3C1, 过大的  $R_i$  会扩散到层流边界层内, 使得层流速度型难以保证, 进而破坏了转捩模拟能力, 这里建议将  $R_i = 25.0$  作为其取值上限. 如此,  $\gamma$ -SA 计算得到的 T3B 和 T3C1 在转捩完成前的摩擦因数比  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 得到的要小, 从而更接近实验结果.

### 3.2 低速翼型绕流

S809 为典型的低速风力机翼型, 在低来流湍流度和攻角不大的情况下, 其上下表面均存在很长一段的层流区, 之后在逆压梯度作用下出现分离进而流动转捩为湍流. Somers<sup>[21]</sup> 对该翼型做了详尽的实验研究, 提供了丰富的实验数据, 特别是实验中给出了具体的转捩点位置使其成为非常流行的转捩模型验证算例之一.

图 9 为计算中使用的 C 型网格, 大小为  $541 \times 109$ , 第 1 层网格点到壁面距离为  $8 \times 10^{-6} c$ , 其中弦长  $c = 1.0$  m. 来流马赫数为 0.1, 基于来流和弦长的流动雷诺数为  $1.0 \times 10^6$ , 计算中

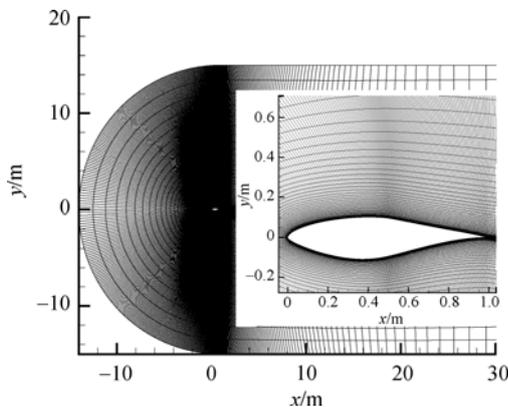


图9 S809 翼型计算网格

Fig. 9 Calculation mesh for S809 airfoil

对于  $\gamma$ -SA 指定  $T_u = 0.03\%$ ,  $R_i = 1.0$ , 对于  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 模型给定来流湍流度  $T_u = 0.07\%$ ,  $R_i = 1.0$ .

图 10 为  $0^\circ$  攻角下的壁面压力系数 ( $C_p$ ) 分布, 从中可以看出, 转捩计算在中间弦长位置存在与分离泡相应的压力“平台”, 随后转捩引起压力快速增大, 这和实验结果吻合的很好, 而全湍流时压力则表现为光滑分布. 图 11 给出的壁面摩擦因数显示出层流和湍流的巨大差别, 同时可以直观的看到转捩模型模拟出了上下壁面在中间位置处存在的层流分离泡.

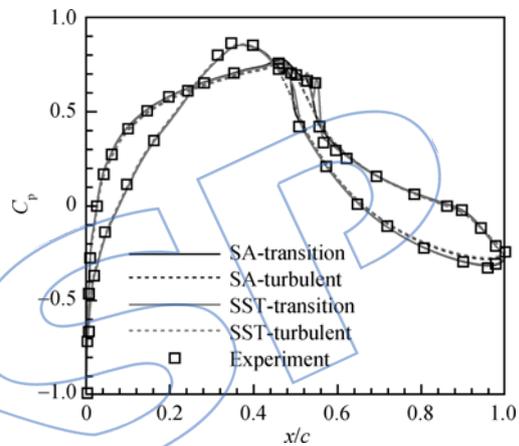


图 10  $0^\circ$  攻角下 S809 翼型壁面压力分布

Fig. 10 Skin pressure coefficient distribution for S809 airfoil at angle of attack is  $0^\circ$

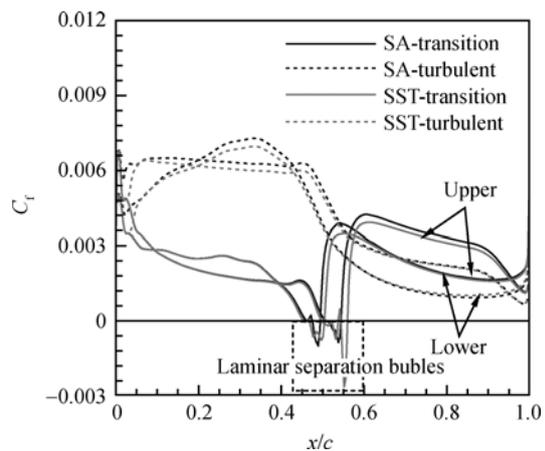


图 11  $0^\circ$  攻角下 S809 翼型壁面摩擦因数分布

Fig. 11 Skin friction coefficient distribution for S809 airfoil at angle of attack is  $0^\circ$

图 12、图 13 分别给出了数值模拟计算得到的阻力系数 ( $C_d$ ) 和升力系数 ( $C_l$ ) 在不同来流攻角下的变化曲线. 从图中可以看出, 翼型出现失速前

(来流攻角小于  $9^\circ$  时),  $\gamma$ -SA 和  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 转捩预测得到的阻力系数和升力系数大小相差不多,都和实验非常接近. 但全湍流计算结果较实验结果偏差明显, 计算升力偏小, 阻力则严重偏大. 这里也可以看出, 考虑转捩对于此类流动模拟的重要性. 不过, 在大攻角失速状态下, 转捩对气动力的影响不再显著, 计算结果和实验结果偏差也急剧增加, 这主要是定常 RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes)在模拟失速的大分离湍流时固有缺陷的结果, 可以通过配合使用转捩模型和脱体涡模拟(DES)的方法改善失速后的模拟结果<sup>[22]</sup>.

角时, 转捩位置和攻角同样近似成线性关系, 计算结果和实验结果符合较好. 当攻角大于  $5^\circ$  时, 上壁面的分离泡将消失, 此时成自然转捩, 随着攻角增大转捩位置快速前移. 此区间内计算与实验之间存在一定的差异, 这可能是由来流转捩条件不合适所引起的. 当攻角大于  $9^\circ$  时, 在非常靠近前缘处又出现分离诱导转捩, 此时上壁面几乎完全为湍流. 两种模型之间相比, 总体上差别不大,  $\gamma$ -SA 在下壁面更接近实验结果, 而  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 在上壁面转捩位置模拟的更准.

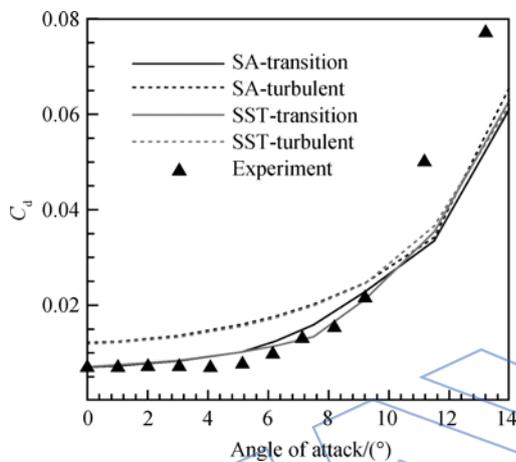


图 12 S809 翼型阻力系数分布

Fig. 12 Drag coefficient distribution for S809 airfoil

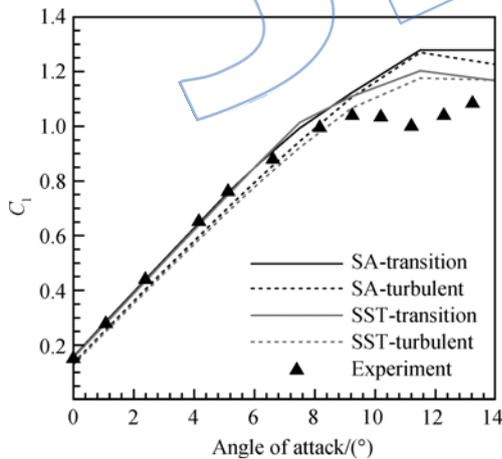


图 13 S809 翼型升力系数分布

Fig. 13 Lift coefficient distribution S809 airfoil

图 14 给出的是模拟得到的转捩位置 ( $x_t$ ) 和实验中测量结果的比较. 从图上可看到, 在翼型下壁面, 两种模型均很好的模拟出转捩位置和来流攻角之间的线性关系, 实际上对应于分离泡随攻角增大而后移的现象. 对于翼型上壁面,  $5^\circ$  以下攻

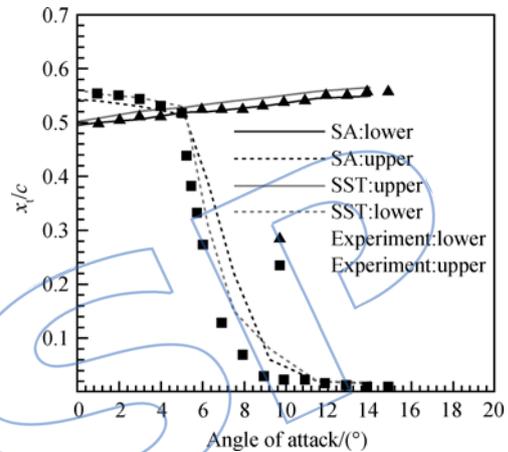


图 14 S809 翼型转捩位置随攻角变化曲线

Fig. 14 Variation curve of transition location with angle of attack for S809 airfoil

### 3.3 压气机叶栅绕流

这里选取某研究所做过吹风实验的亚声压气机叶栅作为模拟对象, 其弦长  $c=0.1\text{m}$ , 叶栅稠度为 1.64, 进口来流马赫数为 0.77, 流动雷诺数为  $2.0 \times 10^5$ . 实验中进口前缘湍流度参考值为 5.6%, 计算中  $\gamma$ -SA 给定  $T_u=2.0\%$ ,  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 给定  $T_u=8.0\%$ , 两者都取  $R_t=5.0$ . 采用多块结构化计算网格, 如图 15 所示, 壁面第 1 层网格单元中心处的  $y^+ < 1.0$ .

从图 16 的壁面压力系数分布以及图 17 的壁

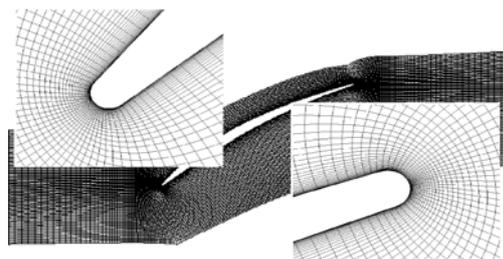


图 15 压气机叶栅计算网格

Fig. 15 Calculation mesh for compressor cascade

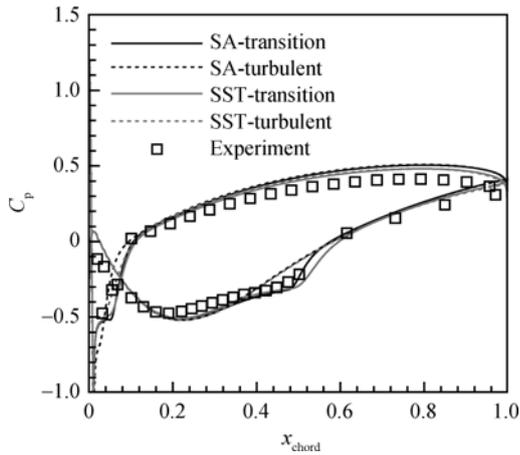


图 16 压气机叶栅壁面压力系数分布  
Fig. 16 Skin pressure coefficient distribution of compressor cascade

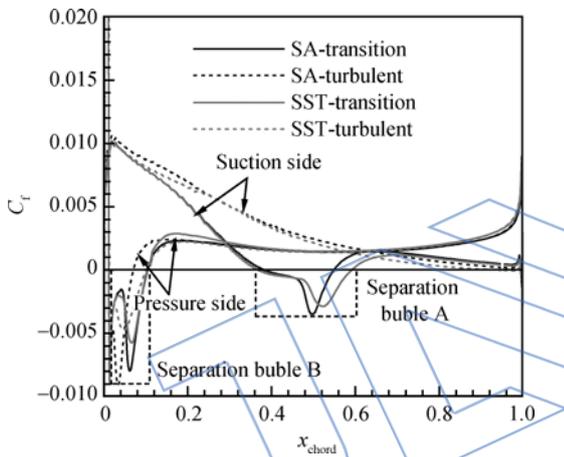


图 17 压气机叶栅壁面摩擦因数分布  
Fig. 17 Skin friction coefficient distribution of compressor cascade

面摩擦因数分布图中可知(横坐标  $x_{chord}$  为轴向弦长位置),  $\gamma$ -SA 和  $\gamma$ - $Re_{\theta t}$ -SST 在叶栅压力面模拟结果和全湍流模拟差别很小,这是因为负攻角引起的分离泡(B)使得流动在压力面非常靠近前缘处即已转捩为湍流,所以对于整个压力面而言转捩效应并不强.但吸力面上则不同,因为在吸力面  $x_{chord}=0.4$  之前的范围内都为层流流动,在之后的扩压段中,由于逆压梯度的作用出现了  $x_{chord}=0.15\sim 0.2$  的层流分离泡(A),而完全湍流模拟的吸力面上则不存在分离.从图 16 的壁面压力系数分布看,显然转捩模拟更为接近真实流动.同时还可以看到,在吸力面上  $\gamma$ - $Re_{\theta t}$ -SST 模拟得到的分离泡尺寸要比  $\gamma$ -SA 的更大.

图 18 给出了  $\gamma$ -SA 计算得到的压气机叶栅间歇因子分布( $\gamma$ - $Re_{\theta t}$ -SST 所得的歇因子结果与

此非常接近,这里不再给出),可以看到无论在压力面还是吸力面,层流分离后都会使  $\gamma$  快速增大到 1,进而使得图 19 中的涡黏性迅速增长,完成数值意义上的转捩过程,这一结果证明了  $\gamma$ -SA 具备对分离诱导转捩的模拟能力.

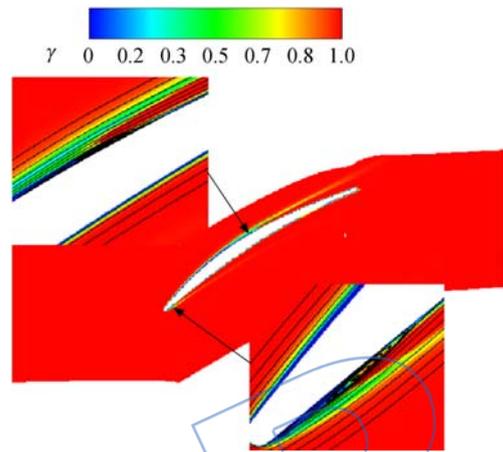


图 18 压气机叶栅的间歇因子云图  
Fig. 18 Intermittency contour of compressor cascade

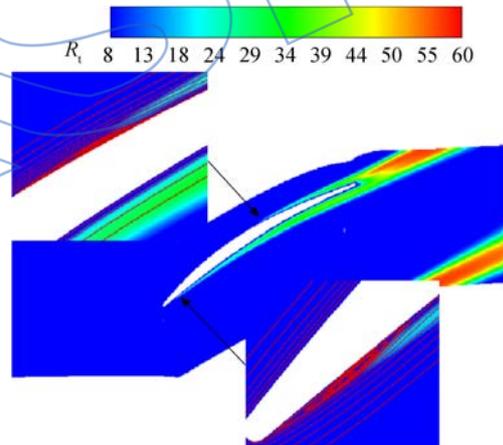


图 19 压气机叶栅的涡黏性云图  
Fig. 19 Eddy viscosity contour of compressor cascade

### 3.4 涡轮叶栅绕流

PAK-B 叶型取自 Pratt & Whitney 设计的典型高负荷低压涡轮叶片的叶中截面,Zhang 等<sup>[24]</sup>对该叶型构成的平面叶栅做了详细地实验研究.实验结果显示当流动雷诺数和来流湍流都很低时,在叶栅的吸力面出现了长的“开式”分离,此时流动损失巨大,而在较高雷诺数下吸力面出现“闭式”分离泡,且来流湍流度的不同会影响分离泡的大小.本文计算的是实验中  $Re=10^5$  的高雷诺数工况,计算中  $\gamma$ -SA 给定的转捩湍流度为 0.2% 和 1.5%,分别对应于实验中 0.4% 的低来

流湍流度和 4.5% 的高来流湍流度,对于  $\gamma-Re_{\theta_1}$ -SST 则是实验中的参考来流湍流度.

从图 20 的壁面压力系数分布上看数值模拟结果和实验符合的很好,两种转捩模型都准确计算出吸力面大约  $x_{chord}=0.7$  处开始的流动分离,这在图 21 的壁面摩擦因数结果中更为直观.两种湍流度下分离开始的位置变化不大,主要是再附点位置明显不同,低来流湍流度时再附点更靠近尾缘,其分离泡更大,这与实验结果一致.对于这种可再附的“闭式”分离,其只对分离所在的局部流动产生影响,所以计算结果在分离前以及压力面上差别不大.需要指出的是文献[23]中没有提及压力面上的流动情况,但根据转捩模拟结果可见在叶栅压力面上亦有分离存在,而且低来流湍流度时分离比较明显,但完全湍流吸力面上则没有出现任何分离.

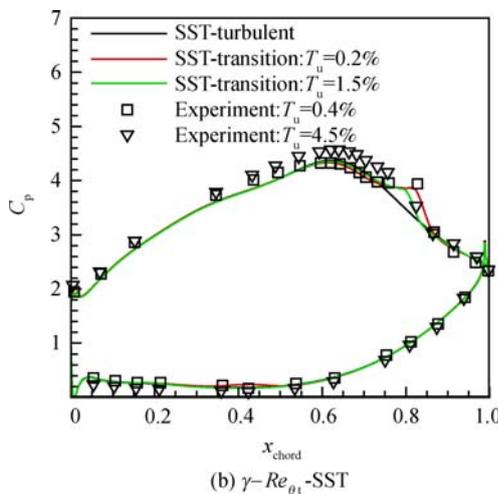
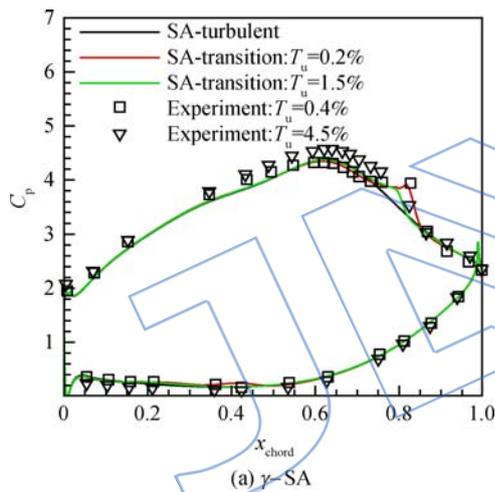


图 20 PAK-B 叶栅壁面压力系数分布  
Fig. 20 Skin pressure coefficient distribution of PAK-B cascade

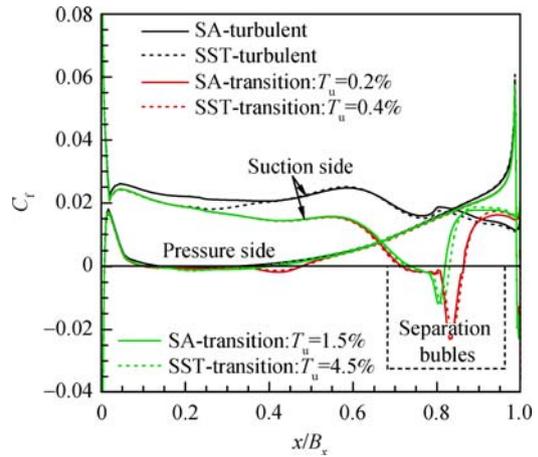


图 21 PAK-B 叶栅壁面摩擦因数分布  
Fig. 21 Skin friction coefficient distribution of PAK-B cascade

从图 22 马赫数云图也可看到,在叶栅压力面前半部存在较大的低速区,低湍流度时最为明显,实际上反应了此处存在的分离流.在吸力面后半部随着转捩的发生边界层开始快速增长,低来流

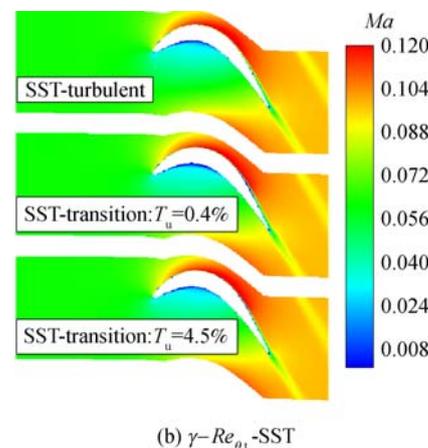
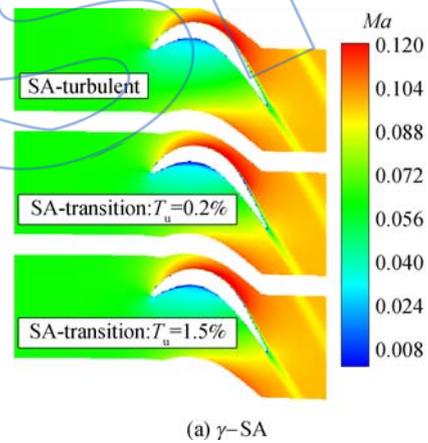


图 22 PAK-B 叶栅流场马赫数分布云图  
Fig. 22 Mach number distribution contour of PAK-B cascade

湍流度时,由于出现的分离泡更大,导致低湍流度的边界层更厚以及尾迹更宽,对应的流动损失更大,这也正确的反应了实验结果.此外,两种不同模型之间的结果则非常接近.

### 3.5 计算时间比较

从以上给出的算例可以看到, $\gamma$ -SA 能够获得与  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 准确性相当的模拟结果,但前者要比后者少求解两个输运方程,显然具备计算效率上的优势.为直观加以说明,表 2 给出了两种模型在所有算例中迭代 100 步的计算耗时.表中数据是在 CPU 为 Intel 酷睿 i5 处理器,主频为 2.5 GHz 的笔记本上单核运行所得.通过简单比较可知  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 相对  $\gamma$ -SA 至少要多出 15% 的计算时间.

表 2 两种模型计算耗时的比较

Table 2 Comparison of calculation time cost between two models

算例	控制体单元数	$\gamma$ -SA 耗时/s	$\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 耗时/s
平板	63900	80	93
翼型	215280	289	344
压气机叶栅	98840	126	146
涡轮叶栅	104280	141	163

## 4 结论

以  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$  为基础,同时考虑到 S-A 湍流模型自身特点,发展了可用以模拟转捩流动的  $\gamma$ -SA 模型.对 4 种典型转捩流动进行的计算表明, $\gamma$ -SA 模型能够获得和已有的  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$ -SST 模型准确性相当的数值结果,但前者比后者少求解两个输运方程,所以可有效地减少计算时间.此外, $\gamma$ -SA 同样也是完全当地模型,容易实现求解.需要指出的是,在使用  $\gamma$ -SA 时存在需要指定转捩湍流条件的局限性,但作为一种工程化的转捩模拟方法, $\gamma$ -SA 转捩模型具备较好的应用价值.

## 参考文献:

[1] Durbin P A, Jacobs R G, Wu X. DNS of bypass transition [R]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.  
 [2] 符松,王亮.湍流转捩模式研究进展[J].力学进展,2007,37(3):409-416.  
 FU Song, WANG Liang. Progress of turbulence/transition models[J]. Advances in Mechanics, 2007, 37(3): 409-416.

(in Chinese)  
 [3] Abu-Ghannam B J, Shaw R. Natural transition of boundary layers: the effect of turbulence, pressure gradient and flow history [J]. Journal of Mechanical Engineering and Science, 1980, 22(5): 213-228.  
 [4] Langtry R B, Menter F R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes [J]. AIAA Journal, 2009, 47(12): 2894-2906.  
 [5] Langtry R B, Gola J, Menter F R. Predicting 2D airfoil and 3D wind turbine rotor performance using a transition model for general CFD codes [R]. AIAA-2006-395, 2006.  
 [6] 孟德虹,张玉伦,王光学,等.  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  转捩模型在二维低速问题中的应用 [J]. 航空学报, 2011, 32(5): 792-801.  
 MENG Dehong, ZHANG Yulun, WANG Guangxue, et al. Application of  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  transition model to two-dimensional low speed flows [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(5): 792-801. (in Chinese)  
 [7] 陈奕,高正红. Gamma-Theta 转捩模型在绕翼型流动问题中的应用 [J]. 空气动力学学报, 2009, 27(4): 411-418.  
 CHENG Yi, GAO Zhenghong. Application of Gamma-Theta transition model to flows around airfoils [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2009, 27(4): 411-418. (in Chinese)  
 [8] 张玉伦,王光学,孟德虹,等.  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  转捩模型的标定研究 [J]. 空气动力学学报, 2011, 29(3): 295-301.  
 ZHANG Yulun, WANG Guangxue, MENG Dehong, et al. Calibration of  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  transition model [J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2011, 29(3): 295-301. (in Chinese)  
 [9] 颜培刚,董学智,韩万金.应用  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  湍流模型和 PSE 方法研究高超声速流动 [J]. 航空动力学报, 2010, 25(6): 1284-1290.  
 YAN Peigang, DONG Xue zhi, HAN Wanjin. Investigation on supersonic flow with  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  turbulence model and PSE method [J]. Journal of Aerospace Power 2010, 25(6): 1284-1290. (in Chinese)  
 [10] 罗天培,柳阳威,陆利蓬. 低压涡轮叶栅流动中转捩模型的校验及改进研究 [J]. 航空学报, 2013, 34(7): 1548-1562.  
 LUO Tianpei, LIU Yangwei, LU Lipeng. Transition model assessment and modification in low-pressure turbine cascade [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(7): 1548-1562. (in Chinese)  
 [11] Medida S, Baeder D J. Application of the correlation-based  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$  transition model to the Spalart-Allmaras turbulence model [R]. AIAA-2011-3979, 2011.  
 [12] 张晓东,高正红,傅林. 基于 SA 和 SST  $\gamma$ - $Re_{\theta_t}$  模型对边界层转捩预测的比较 [J]. 航空计算技术, 2012, 42(5): 51-55.  
 ZHANG Xiaodong, GAO Zhenghong, FU Lin. Comparison of boundary layer transition prediction based on SA and SST  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  model [J]. Aeronautical Computing Technique, 2012, 42(5): 51-55. (in Chinese)  
 [13] Spalart P R, Allmaras S R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows [R]. AIAA 92-0439, 1992.

- [14] Langtry R B, Sjolander S A. Prediction of transition for attached and separated shear layers in turbomachinery[R]. AIAA-2002-3641, 2002.
- [15] NING Fangfei. MAP: A CFD package for turbomachinery flow simulation and aerodynamic design optimization[R]. ASME Paper GT 2014-26515, 2014.
- [16] Edwards J R. Towards unified CFD simulation of real fluid flows[R]. AIAA-2001-2524, 2001.
- [17] Savill A M. Some recent progress in the turbulence modeling of bypass transition, near-wall turbulent flows[M]. New York: Elsevier, 1993.
- [18] Schubauer G B, Klebanoff P S. Contribution on the mechanics of boundary layer transition[R]. National Advisory Committee for Aeronautics, NACA Report-1289, 1956.
- [19] Suluksna K, Juntasaro E. Assessment of intermittency transport equations for modeling transition in boundary layers subjected to freestream turbulence[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, 29(1): 48-61.
- [20] Malan P, Suluksna K, Juntasaro E. Calibrating the  $\gamma$ - $Re_{\theta}$  transition model for commercial CFD[R]. AIAA-2009-1142, 2009.
- [21] Somers D M. Design and experimental results for the S809 airfoil [R]. National Renewable Energy Laboratory, NREL/SR-440-6918, 1997.
- [22] Medida S, Baeder D J. Numerical investigation of 3-D dynamic stall using delayed detached eddy simulation[R]. AIAA-2012-0099, 2012.
- [23] Zhang X F, Mahallati A, Sjolander S. A hot-film measurements of boundary layer transition, separation and reattachment on a low-pressure turbine airfoil at low Reynolds Numbers[R]. AIAA-2002-3403, 2002.

(编辑:王碧珺)

JASFP