考试科目：(826)信号处理与系统 共 2 页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

注意：本试卷中，$u(t)$ 和 $u[n]$ 分别为连续和离散时间单位阶跃信号；$\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 分别为连续和离散时间单位冲激信号。

一、(30 分)

一线性常系数微分方程为：

$$y''(t)-\alpha y'(t)-\beta y(t)=\gamma x(t)+x(t)$$

其中 α，β 和 γ 均为常数。

(a) 设该方程表示一因果线性时不变系统的输入输出关系。已知：当 $t\geq 0_-$，输入信号 $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时，系统的全响应为 $y(t)=e^{-t}+2e^{-2t}-4e^{-3t}\quad(t\geq 0_-)$。

(i) 确定 α，β 和 γ，及初始条件 $y(0_-)=I_0$ 和 $y'(0_-)=I_1$ 的值； **(10 分)**

(ii)求系统的零输入和零状态响应； **(10 分)**

(b) 由(a)部分所得上述方程中的系数，求该微分方程在 $x(t)=e^{-4t}u(t)$ 时的全解。 **(10 分)**

二、(20 分)

(a) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，试用 $X(j\omega)$ 表示信号 $y(t)=\int_{-\infty}^{\alpha-\beta t}x(\tau)d\tau$ 的傅里叶变换，其中 α，β 均为常数，且 $\beta\neq 0$。 **(10 分)**

(b) $y[n]$ 是一系统在输入为 $x[n]$ 时的输出。设 $X(e^{j\Omega})$ 和 $Y(e^{j\Omega})$ 分别为 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的 DTFT，且满足：

$$Y(e^{j\Omega})=3X(e^{j\Omega})+e^{-j2\Omega}X(e^{j\Omega})+\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

(i) 该系统是 LTI 吗？给出理由； **(5 分)**

(ii) 求出该系统的时域输入-输出关系。 **(5 分)**

三、(30 分)

设 $y(t)$ 为一个 LTI 系统在输入为 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 下的输出，其中 $x_1(t)$ 是固定但未知的。已知：(i) 当 $x_2(t)=u(t)$ 时，$y(t)=4e^{-3t}u(t)$；(ii) 当 $x_2(t)=-2u(t)$ 时，$y(t)=e^{-3t}u(t)-3u(t)$。

(a) 确定该系统的单位冲激响应 $h(t)$； **(10 分)**

(b) 求出当系统在输入为 $x_1(t)$ 下的输出； **(10 分)**

(c) 确定所有可能的 $x_1(t)$。 **(10 分)**

四、(30 分)

(a) 设 $x[n]=\cos(\frac{\pi}{8}n-\frac{\pi}{6})+2\cos(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{4})$，计算该信号的离散时间傅里叶级数(DTFS)系数；

(10 分)

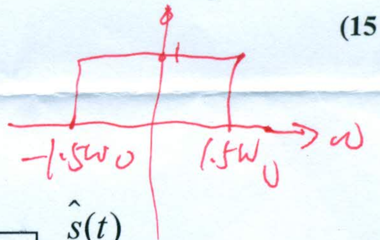
(b) 设 $x_0(t)$ 为任意信号，证明：对任意常数 $T_0>0$，信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_0(t-kT_0)$ 是周期的;

(5 分)

(c) 令 $x_0(t)=e^{-t}u(t)$。有一个 LTI 系统，其频率响应为

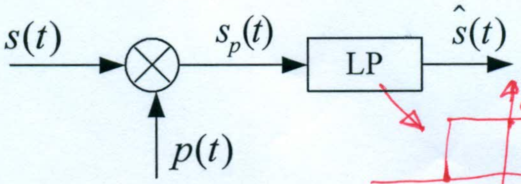
$$H(j\omega)=e^{-j2\omega}[u(\omega+1.5\omega_0)-u(\omega-1.5\omega_0)],\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

求(b)部分 $x(t)$ 输入至该 LTI 系统时的输出信号 $y(t)$。 **(15 分)**



五、(20 分)

图-1 所示为一个抽样恢复系统：



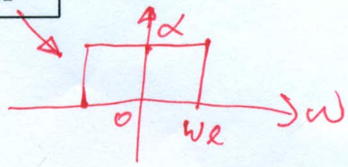


图-1

其中，$p(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT_s)$，LP 是一个带宽为 ω_l，幅度为 α 的理想低通滤波器。设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为频谱分别限制于 ω_1 和 $2\omega_1$ 的低频信号。试就下列情况分别确定满足 $\hat{s}(t)=s(t)$ 的 LP 系统的频率响应。

(a) $s(t)=x_1(t)+2x_2(2t)$； **(10 分)**

(b) $s(t)=x_1(t)x_2(t)$。 **(10 分)**

六、(20 分)

(a) 设 p 为任意实数，α 为任意复数且 α^* 为其复共轭。证明

$$F(z)=\frac{z^p(1-\alpha^* z)}{1-\alpha z^{-1}}$$

为全通滤波器。 **(10 分)**

(b) 如果一个滤波器 $G(z)$ 的零极点均在单位圆 $|z|=1$ 内，则该滤波器称为最小相位系统。已知

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}-6z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

求一个二阶最小相位滤波器 $H_{\min}(z)$，使得 $|H(e^{j\Omega})|=|H_{\min}(e^{j\Omega})|$，$\forall\Omega$。 **(10 分)**