

基于超声速边界层转捩的 WENO 格式对比分析

刘朝阳, 王振国, 孙明波, 汪洪波

(国防科学技术大学 航天科学与工程学院, 长沙 410073)

摘 要: 基于高精度 weighted essentially non-oscillation(WENO)格式对马赫数为 4.5, 雷诺数为 10000 的超声速来流条件下平板边界层转捩过程进行了大涡模拟. 无黏通量分别用 5 阶、7 阶、9 阶 WENO 格式进行离散, 黏性通量离散采用 4 阶中心差分格式, 时间推进采用具有总变差递减(TVD)性质的 3 阶精度 Runge-Kutta 方法. 通过在入口边界叠加一对等幅最不稳定第一模态谐波扰动, 分别采用 3 种 WENO 格式计算得到了平板层流边界层失稳转捩的演化过程. 结果表明: 5 阶 WENO 格式的数值耗散明显高于 7 阶和 9 阶 WENO 格式, 在捕捉湍流涡和流场脉动特性上存在明显不足. 9 阶 WENO 格式的耗散小, 能够捕捉到流场更小尺度的涡和高频脉动. 研究具有高频脉动特性的问题或者欲捕捉精细涡结构时, 建议采用 7 阶以上的高精度格式.

关键词: 边界层转捩; 大涡模拟; WENO 格式; 谐波扰动; 湍流

中图分类号: V435.12

文献标志码: A

Comparison and analysis of WENO schemes base on supersonic boundary layer transition

LIU Chao-yang, WANG Zhen-guo, SUN Ming-bo, WANG Hong-bo

(College of Aerospace Science and Engineering,

National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Large eddy simulations of the transition process in a supersonic flat-plate boundary layer at free-stream Mach number of 4.5 and Reynolds number of 10000 were carried out using high precision weighted essentially non-oscillation (WENO) schemes. The inviscid flux was discretized by fifth-order, seventh-order, ninth-order WENO schemes separately and the viscous flux was discretized by fourth-order center difference scheme. The temporal discretization was made by means of third-order Runge-Kutta with total variation diminishing (TVD). By imposing a pair of the most unstable oblique first-mode disturbances on the inflow boundary, the transition progress of the flow from laminar, transition process to full turbulence was compared using three WENO schemes. Results indicate that the fifth-order WENO scheme is more dissipative than the seventh-order and ninth-order schemes, so it's difficult to capture eddy and pulse in the flow field. The dissipation of ninth-order WENO scheme is small, enabling to capture smaller eddy and high frequency. To study a problem with high frequency fluctuation or capture fine eddy, it's advisable to use the scheme higher than seventh-order.

Key words: boundary layer transition; large eddy simulation;

收稿日期: 2014-03-17

基金项目: 霍英东教育基金高等院校青年教师基金(131055)

作者简介: 刘朝阳(1990-), 男, 吉林公主岭人, 硕士生, 主要从事高超声速推进技术的研究.

weighted essentially non-oscillation scheme;
oblique disturbance; turbulence

可压缩流动大涡模拟的离散方法主要包括有限差分或者有限体积两种形式,基于这两种离散形式的一些高精度和间断高分辨率格式正在得到越来越多的应用^[1].通常认为,高阶格式的作用与采用低阶格式并对网格进行加密的效果相当.但是,针对高频脉动的捕捉并非通过网格加密就能够获得,而且加密网格往往会比提高格式精度带来更多计算量^[2].WENO格式是由Shu和Osher提出的一系列高阶精度、高分辨率的格式^[3].通过选择性地对ENO(essentially non-oscillation)重构值进行加权处理,以满足光滑区更高阶的计算要求,而在间断区仍保持原有的ENO性质^[4].在高阶WENO格式的构建过程中已经发现,更高精度WENO格式计算量的增加并不显著,对流动精细程度的反映能力则增强很多,但是格式精度的增加会带来数值耗散的减小,因而会影响到计算的稳定性^[5].

国内外很多学者开展了基于5阶精度格式的大涡模拟研究,取得了很多有意义的研究成果.Toh^[6]基于5阶WENO格式和动力学亚格子湍流模型对三维超声速来流条件下双射流碰撞开展了大涡模拟研究,表明5阶WENO格式非常适合模拟带有弓形激波的湍流流动,并且能够捕捉到流场中的不稳定激波.Choi等^[7]采用5阶WENO格式研究了超声速湍流拾举火焰的稳定性问题,证明了采用高精度格式能够更好的求解超声速化学反应流场.孙明波^[8]采用5阶WENO格式发展了适合于超声速湍流流动和燃烧的大涡模拟方法,对超声速来流稳焰凹腔的流动及火焰稳定机制进行了深入研究.

可压缩湍流边界层转捩问题是超声速和高超声速飞行器发展面临的一个巨大挑战.当前,采用高精度格式模拟超声速边界层的转捩已成为一个研究热点.董平等^[9]分析了压力梯度对边界层转捩的影响.潘宏禄等^[10]针对边界层转捩问题,以5阶迎风格式和6阶对称紧致格式对马赫数为4.5的平板边界层转捩问题进行了大涡模拟研究.WANG等^[11]采用6阶对称紧致格式对边界层转捩进行了大涡模拟研究,分析了 Δ 涡的产生和发展、发卡涡和马蹄涡的发展过程.黄章峰^[12]采用直接数值模拟方法研究了超声速平板边界层转捩过程及充分发展的湍流,深入地探讨了转捩过程

中“breakdown”的根本机理,转捩时第一模态波被快速激发并生长,平均速度剖面得以修正.随着转捩过程中扰动波的发展,边界层内必然存在高频脉动,同时伴随着复杂的涡变化,如何能够更好的捕捉流场内的涡和高频脉动是一个很值得探讨的问题.

本文基于SHEN等^[13-14]发展的高精度WENO格式,在相同的计算网格和来流条件下分别采用5阶、7阶和9阶WENO格式对超声速边界层转捩过程进行大涡模拟研究.采用在入口施加扰动的方法使边界层发生转捩,并着重分析3种高精度格式的数值耗散特性以及不同格式对湍流和高频脉动的捕捉能力.

1 数学模型

1.1 控制方程和数值方法

基于Stokes假设、忽略彻体力的影响,将滤波函数应用到Navier-Stokes方程上,进行空间Favre滤波,得到超声速可压缩流的大涡模拟控制方程.在直角坐标系下,可压缩流大涡模拟控制方程可写成如下守恒形式:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \frac{1}{Re_\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z} \right) \quad (1)$$

其中 \mathbf{Q} 为守恒量矢量; \mathbf{E} 、 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 分别为3个方向上的无黏通量矢量; \mathbf{E}_v 、 \mathbf{F}_v 和 \mathbf{G}_v 分别为3个方向上的黏性通量矢量; Re_∞ 为来流雷诺数.

基于有限差分法对守恒方程进行离散,黏性项采用4阶中心差分格式^[6],无黏项采用Shu等发展的高精度WENO格式离散,WENO格式的离散方法具体参考文献^[14].时间推进上采用具有总变差递减(TVD)性质的3阶精度Runge-Kutta方法^[15],计算过程中柯朗数(CFL)取0.25.

1.2 湍流模型

在高雷诺数的超声速流场中,采用大涡模拟方法捕捉流场中的大尺度拟序结构.选取修正的Smagorinsky涡黏性模型来模拟亚格子应力张量和热通量项.该模型是基于混合长度假设,认为亚格子黏度正比于亚格子尺度的特征长度的平方和过滤后应变率张量 $\tilde{\mathbf{S}}$ 的2阶不变量^[16]

$$\nu_i = C_\tau \Delta^2 \sqrt{\overline{S_{ij} S_{ij}}} \quad (2)$$

模型系数 $C_\tau = 0.00423$, 涡黏性长度 Δ 定义为

$$\Delta = \left[\frac{1}{J} \right]^{1/3} D \quad D = 1 - e^{(-y^+/A^+)} \quad (3)$$

式中 J 为 Jacobian 行列式, D 为 van Driest 阻滞因子, 可使涡黏性在壁面附近呈现较好的极限行为. 其中常数 $A^+ = 25$, $y^+ = u_\tau y / \nu_w$. $u_\tau = \sqrt{\nu_w / \rho}$ 是壁面摩擦速度, ν_w 是壁面处的流体运动黏度.

1.3 边界条件

入口边界取上游层流计算结果作为三维计算条件, 为了能够使下游很快发展出湍流边界层, 在入口叠加一对随时空发展的等幅最不稳定第一模态谐波扰动^[11]

$$\begin{aligned} f^{t+}(x, y, z, t) &= A(y) \cdot e^{-\alpha_i x} \cdot \cos(\alpha_x x + \beta z - \omega) \\ f^{t-}(x, y, z, t) &= A(y) \cdot e^{-\alpha_i x} \cdot \cos(\alpha_x x - \beta z - \omega) \\ A(y) &= A \cdot e^{-by^2} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\alpha_i = -1.5586 \times 10^{-2}$, $\alpha_x = 0.48$, $\omega = 0.3878$, $\beta = 0.83$, $A = 0.02$, $b = 2$. 量符号具体含义参见文献[11].

下边界采用绝热、无滑移壁面边界条件, 壁面法向压力梯度、速度为零, 其他物理量的 1 阶导数为零; 远场采用无反射压力出口边界条件, 即各物理量的 1 阶导数为零的自由输出条件; 展向采用周期性边界条件, 以保证边界上不降阶处理.

2 问题描述

对来流马赫数 $Ma_\infty = 4.5$, 来流温度 $T_\infty = 61.11 \text{ K}$ 、高雷诺数 ($Re_\delta = 10000$) 的超声速边界层转换过程进行大涡模拟. 计算区域如图 1 中的实

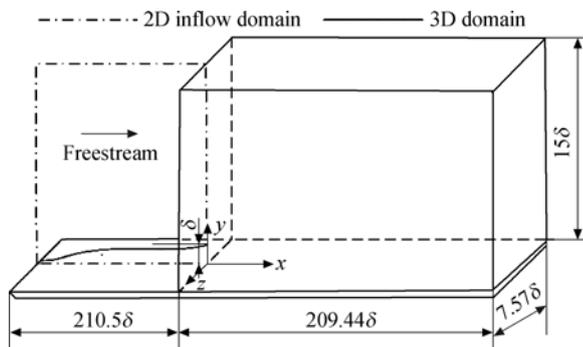


图 1 计算区域和坐标系示意图

Fig. 1 Schematic diagram of computational domain and coordinate system

线所示: 取流向为 $210.5\delta \sim 450\delta$, 壁面法线方向 15δ , 展向 7.57δ , 以入口边界层位移厚度 δ 作为特征长度. 从平板前缘到计算域的入口区域 $0 \sim 210.5\delta$ 内, 采用二维方法初步计算, 将计算的结果作为三维计算区域的入口参数以节省计算资源. x, y, z 分别表示流向, 壁面法向和展向, 相应 3 个方向上的网格划分为 $251 \times 61 \times 31$. 流向和展向网格均匀分布, 壁面法线方向上的网格按照双曲函数向外拉伸.

从平板前缘到 $x = 210.5\delta$ 这段区域内, 流场边界层出于层流边界层状态, 可以简单的认为是二维流场, 取 $x = 210.5\delta$ 位置的层流流场参数作为入口边界条件和计算初场.

3 结果讨论

计算采用的条件与文献[10]相同, 基于 9 阶 WENO 格式比较了 $251 \times 61 \times 31$ 和 $376 \times 91 \times 61$ 网格的平均流场壁面摩擦阻力系数曲线如图 2 所示. 结果表明较粗网格 $251 \times 61 \times 31$ 能够较好的计算壁面的摩擦阻力系数 C_f . 关于超声速平板边界层转换过程, 文献[10]已经做了详细的论述, 当前研究主要关注的是高精度格式本身的数值耗散特性, 及其对涡和低频脉动的捕捉能力.

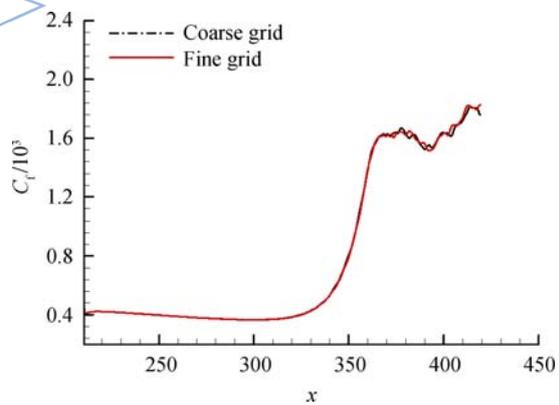


图 2 平均流场壁面摩擦阻力系数曲线

Fig. 2 Friction resistance coefficient of mean flow-field wall

3.1 对涡结构捕捉能力的对比

虽然入口施加了人为扰动, 但是扰动量相对于平均值很小, 流动基本上仍然处于层流状态, 入口阶段观察不到流向涡. 随着流动向下游发展, 入口施加的最不稳定第一模态谐波扰动呈线性和弱非线性发展, 开始处于层流状态的均匀来流出现有规则的轻微摆动, 速度等值面开始出现褶皱, 如

图3所示,其中 t^* 表示无量纲时间.

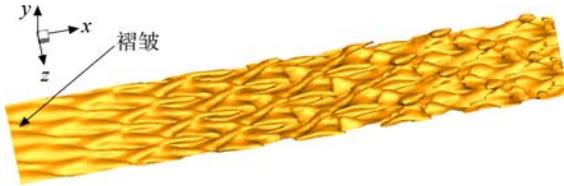


图3 $t^* = 799.5970$ 时刻转捩区流向速度等值面
Fig. 3 Iso-surface of streamwise velocity in transition zone at $t^* = 799.5970$

分别采用5阶、7阶和9阶WENO格式(分别记为WENO5, WENO7, WENO9)在相同的计算网格和来流条件下对超声速平板边界层的转捩过程进行大涡模拟,采用速度梯度张量第二不变量 Q 识别^[17]的方法显示流场的涡结构如图4所示.

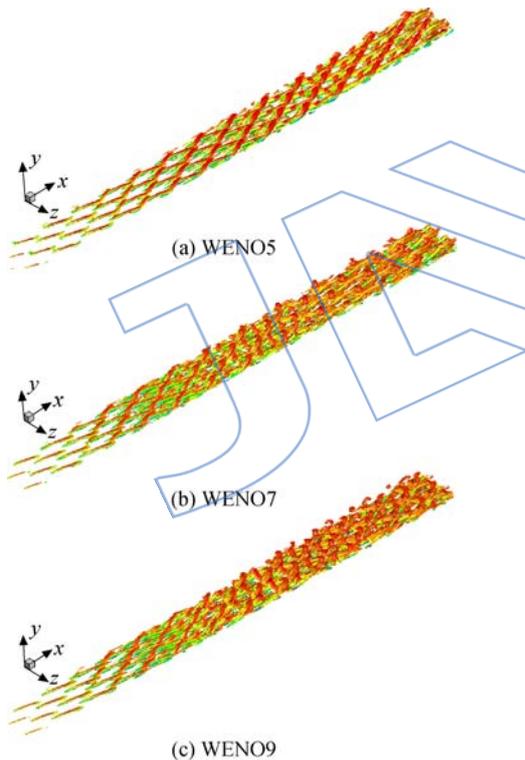


图4 速度梯度张量第二不变量 $Q=0.0015$ 等值面
Fig. 4 Iso-surface of the second constant velocity-gradient tensor $Q=0.0015$

上游发展出来的小尺度扰动逐渐积累,以非线性形式作用于流场,亚谐不稳定扰动波被依次激发,彼此相互作用放大,改变了层流流场的性质.此时速度剖面在扰动的作用下得到修正,变得更加饱满,在速度剪切的作用下逐渐形成流向涡,流向涡交错分布形成 Δ 涡结构.随着转捩过程的

继续, Δ 涡与剪切层之间相互作用, Δ 涡头部向上抬起,发展出更为复杂的发卡涡结构,如图4(c)中所示.随着扰动与流场之间的非线性作用,较大尺度的涡结构逐渐破碎成更小尺度的涡,流场最终发展成完全的湍流状态.

5阶WENO格式计算的结果只能捕捉到边界层中最大尺度的涡结构,如图4(a),虽然可以清楚地看出边界层转捩初期的 Δ 涡结构,但是随着流场向下游发展,下游的涡结构仍然很规整,流场没有发展出更为复杂的发卡涡等结构.与潘宏禄等^[10]的计算结果比较可以看出,采用5阶的WENO格式计算的结果下游没有完全发生转捩,这主要与格式本身的数值耗散特性有关.5阶WENO格式的数值耗散较大,在当前网格上难以捕捉到更为细小的涡结构.格式的数值耗散将物理上添加的人为小扰动能量耗散掉,进而抑制了扰动非线性发展,所以导致流场的下游没有足够的扰动量以维持流场边界层的进一步发展,最终导致超声速边界层在当前的计算区域内没有完全发生转捩,需要更长的距离或者更大的扰动量才会转捩.

由图4中的3幅图对比可以看出,随着WENO格式精度的提高,格式的数值耗散越小,越能够捕捉到流场中的尺度更小涡结构;7阶WENO的计算结果比5阶WENO的结果有了明显的改进,如图4(b).9阶WENO的结果比7阶的结果同样有很大改善,在当前网格上捕捉到了超声速平板边界层转捩过程中的 Δ 涡、发卡涡等细小的结构,再现了超声速平板边界层转捩过程.

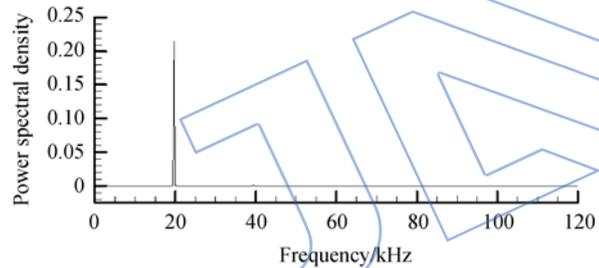
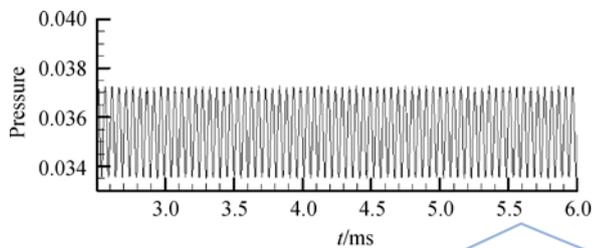
3.2 对高频脉动的捕捉能力对比

边界层内的压力脉动产生的原因主要有两个^[18]:一是入口施加的最不稳定第一模态谐波扰动及其与流场的非线性作用而激发出来的亚谐波不稳定扰动;二是随着边界层转捩,涡的合并与破碎也会对流场压力产生一定的扰动.但是涡结构的变化对压力变化的影响较小,在功率谱上一般对应较低的频率和功率谱密度.

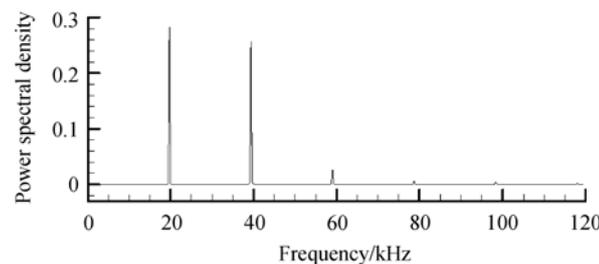
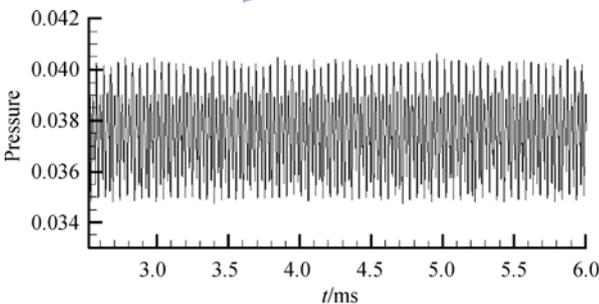
在超声速边界层的转捩前($x=269.4\delta$)、转捩初期($x=309.3\delta$)和转捩后期($x=413.4\delta$)的流场中心线上选取3个点,记录当地的压力随时间的变化及经过傅里叶变换以后得到频谱如图5所示.

3个位置上压力随时间的变化曲线和相应的频谱如图5所示,图中纵坐标的量均为无量纲.分析图5(a)可知:转捩前层流中的压力脉动主要受

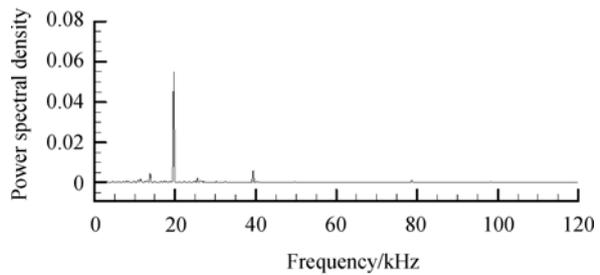
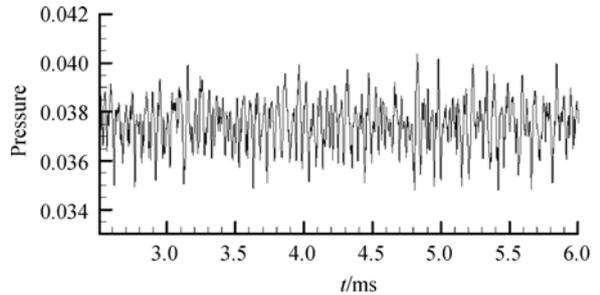
入口人为施加的不稳定扰动产生,流场中的压力脉动频率与入口扰动的频率相同.由图 5(b)可知随着小扰动与流场的非线性作用,更多的谐波被激发,扰动的振幅开始增大,流场中激发出更高的频率,功率谱密度增大,促使边界层迅速发生转捩.到转捩后期,如图 5(c)所示压力脉动随时间的振幅减小,相应的功率谱密度也降低,表明上游激发的扰动能量逐渐消耗减小;压力脉动比较杂乱,表明该空间位置大涡开始合并同时伴随着大涡破碎成小涡,受涡结构变化的影响,压力脉动随时间的变化变得更为复杂,体现在频谱上出现很多低频的毛刺.边界层内频率的变化与湍流涡的变化相对应,从频谱的角度也表明此时边界层正在发生转捩.



(a) $x=269.4\delta$



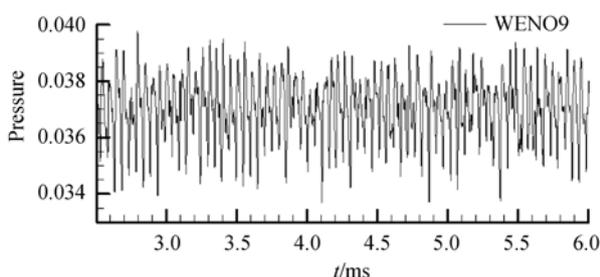
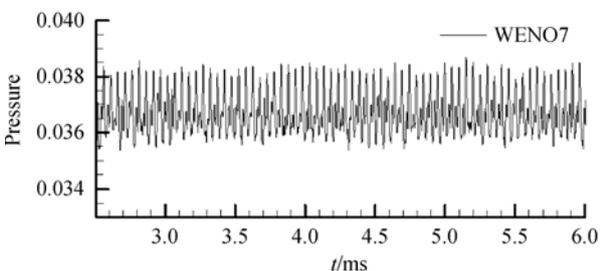
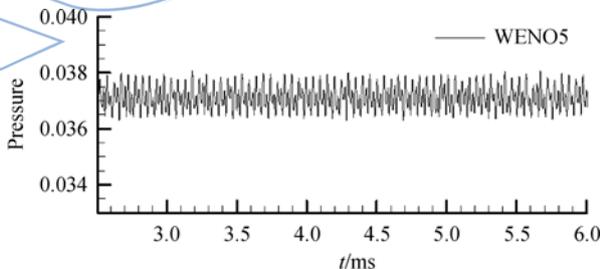
(b) $x=309.3\delta$



(c) $x=413.4\delta$

图 5 不同位置压力脉动及相应的频谱(WENO9)
 Fig. 5 Pressure fluctuation and frequency spectrum at different locations (WENO9)

在 $x=406.9\delta$ 流向中心位置处记录分别采用 3 种高精度格式计算得到的压力脉动随时间变化,并做傅里叶变换得到相应的功率谱如图 6 所示.



(a)

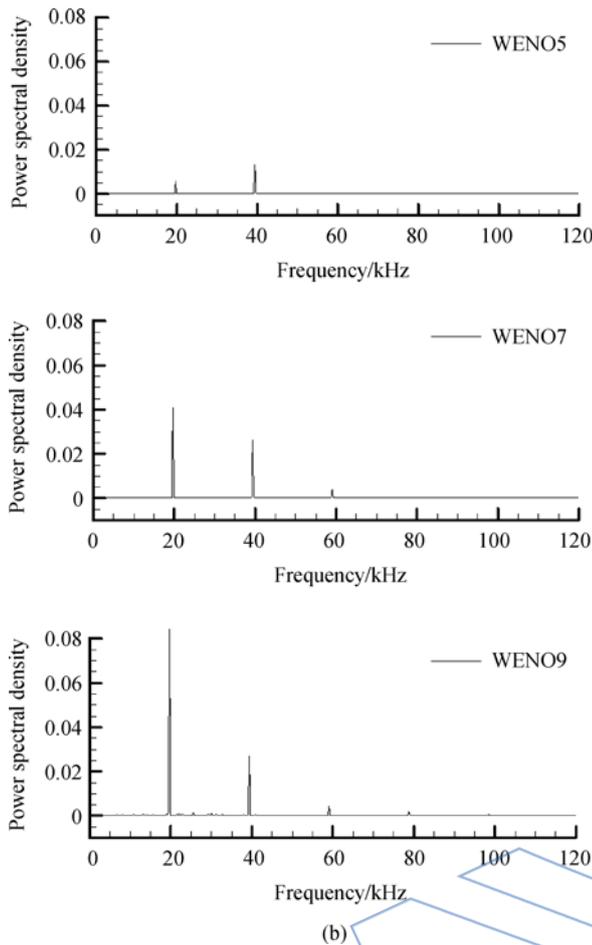


图6 $x=406.9\delta$ 处压力脉动及相应的频谱
Fig. 6 Pressure fluctuation and frequency spectrum at $x=406.9\delta$

基于3种格式计算得到的压力脉动随时间的变化曲线如图6(a)所示,对比发现格式的精度越高,采集到的压力脉动幅值越大;将压力脉动随时间的变化曲线做傅里叶变换后如图6(b)所示,随着采用格式精度的越高,能捕捉到流场中更高的频率,功率谱密度也更大.高频压力脉动对应的是流场中高波数或小尺度的涡结构,因此其分析应该跟涡结构捕捉特性一致.计算过程中采用的条件完全相同,只是应用的数值格式不同,因而相同频率下振幅或能量的不同应该是格式对压力脉动的耗散不同所致.5阶WENO格式的精度较低、数值耗散偏大,尤其是在计算边界层时流场中会出现复杂的涡系结构,流场中可能会出现不光滑的区域,这时WENO格式的精度会进一步降低、耗散更大,将实际的物理上的扰动和涡结构的变化抹平或减小.而采用更高精度的9阶WENO格式,在光滑区域的精度能够达到9阶,即使遇到不光滑的区域,格式的精度仍然能够达到5阶精度以上,所以采用9阶WENO能够在相同的网

格上分辨出更细小的涡结构以及相应的涡的变化;同时格式自身的数值耗散效应很小,对扰动能量的非物理损耗大大降低,所以格式精度提高,可以捕捉到流场中更多的频率,反应更丰富的流场信息,从这个角度表明发展高精度的格式更加有利于捕捉真实、完整的流场信息.

4 结 论

本文针对超声速边界层转捩问题开展了大涡模拟研究,对比分析了3种不同精度WENO格式的数值耗散特性及其对涡和脉动的捕捉能力,得到如下结论:

1) 采用9阶WENO格式成功模拟了超声速平板边界层转捩过程,捕捉到扰动的线性和弱非线性发展、转捩前期交替的 Δ 涡结构以及转捩后期的发卡涡结构.

2) 5阶WENO格式的数值耗散明显高于7阶和9阶WENO格式,因而对涡结构和高频脉动捕捉能力相对较差.

3) 在研究具有高频脉动特性的问题或者欲捕捉复杂流场中的精细涡结构时,建议采用7阶以上的WENO格式.

下一步工作中,希望将高精度的格式应用到更加复杂的流动问题中,进一步检验高阶WENO格式的精度和稳定性.

参 考 文 献:

- [1] Gerolymos G A, Sénéchal D, Vallet I. Very-high-order WENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(23): 8481-8524.
- [2] Yee H C, Sjogreen B, Hadjadj A. Comparative study of three high order schemes for LES of temporally evolving mixing layers[R]. Nashville: 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2012.
- [3] ZHANG Shuhai, SHU Chiwang. A new smoothness indicator for the WENO schemes and its effect on the convergence to steady state solutions[J]. Journal of Scientific Computing, 2007, 31(1/2): 273-305.
- [4] QIU Jingmei, SHU Chiwang, LIU Jiren, et al. A WENO algorithm for the growth of ionized regions at the reionization epoch[J]. New Astronomy, 2008, 13(1): 1-11.
- [5] XIONG Tao, SHU Chiwang, ZHANG Mengping. WENO scheme with subcell resolution for computing nonconservative Euler equations with applications to one-dimensional compressible two-medium flows[J]. Journal of Scientific Computing, 2012, 53(1): 222-247.
- [6] Toh H T. Large eddy simulation of supersonic twin-jet impingement using a fifth-order WENO scheme[D]. Blacks-

- burg, Virginia; Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- [7] Choi J Y, Yang V. Numerical study on the stability of the supersonic turbulent lifted flame using high resolution schemes[R]. San Jose, CA; 49th AIAA/ASME/SAE/AS-EE Joint Propulsion Conference, 2013.
- [8] 孙明波. 超声速来流稳焰凹腔的流动及火焰稳定机制研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2008.
SUN Mingbo. Flow and flame holding mechanisms of cavity flameholders in supersonic flows[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2008. (in Chinese).
- [9] 董平, 黄洪雁, 冯国泰. 带有压力梯度的平板边界层转换数值模拟[J]. 航空动力学报, 2007, 22(11): 1909-1914.
DONG Ping, HUANG Hongyan, FENG Guotai. Numerical simulation of boundary layer transition under pressure gradient[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(11): 1909-1914. (in Chinese)
- [10] 潘宏禄, 马汉东, 王强. 超声速边界层转捩拟序结构大涡模拟[J]. 宇航学报, 2006, 27(3): 498-502.
PAN Honglu, MA Hanwen, WANG Qiang. Large eddy simulation of transition coherent structures in a supersonic boundary layer[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(3): 498-502. (in Chinese)
- [11] WANG Suozhu, GAO Zhenxun, LEE Chunhian, et al. Large eddy simulation of supersonic boundary layer transition over a flat-plate based on the spatial mode[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014, 6: 1-10.
- [12] 黄章峰. 超声速平板边界层从层流到湍流的转换机理及湍流特性[D]. 天津:天津大学, 2006.
HUANG Zhangfeng. The mechanism of laminar-turbulent transition and the characteristics of turbulence in a supersonic boundary layer on a flat plate[D]. Tianjin: Tianjin University, 2006. (in Chinese).
- [13] SHEN Jun, SHU Chiwang, ZHANG Mengping. A high order WENO scheme for a hierarchical size-structured population model[J]. Journal of Scientific Computing, 2007, 33(3): 279-291.
- [14] Dinshaw, Balsara S, SHU Chiwang. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 160(2): 405-452.
- [15] Barth J, Deconinck H. High-order methods for computational physics[M]. Berlin: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 1999.
- [16] 马汉东, 潘宏禄, 王强. 超声速平板边界层斜波失稳转捩过程研究[J]. 力学学报, 2007, 39(2): 153-157.
MA Handong, PAN Honglu, WANG Qiang. The study of flow transition process induced by oblique wave instability in a supersonic flat-plate boundary layer[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(2): 153-157. (in Chinese).
- [17] Terzi D A, Sandberg R D, Fasel H E. Identification of large coherent structures in supersonic axisymmetric wakes[J]. Computers and Fluids, 2009, 38: 1638-1650.
- [18] 曹伟, 黄章峰, 周恒. 超音速平板边界层转捩中层流突变为湍流的机理研究[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(4): 379-386.
CAO Wei, HUANG Zhangfeng, ZHOU Heng. Study of the mechanism of breakdown in laminar turbulent transition of a supersonic boundary layer on a flat plate[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(4): 379-386. (in Chinese)

(编辑:王碧琚)