关于弹性力学平面应力问题与应变问题的判别 1)

任 珊 罗 艳 2)

(成都理工大学环境与土木工程学院力学与工程系，成都 610059)

摘要 大部分《弹性力学》教材都是从构件形状和载荷的角度去定义两类平面问题，但这种定义有一定的局限性，没有给出两类平面问题本质的区别. 本文从三维空间问题出发，推导得到按应力求解平面问题需要满足的条件，并给出平面应力问题与平面应变问题的判别条件.

关键词 平面应力问题，平面应变问题，应力，应变

中图分类号：O343 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-14-216

引 言

弹性力学的平面问题，在工程实践中具有重要意义，因此对于工科专业的弹性力学本科教学，平面问题是其重点，而两类平面问题的判别是关键. 在常用的教科书中对两类平面问题都是从构件形状和载荷的角度去定义的，即：平面应力问题表述为：很薄的等厚度薄板，体力平行于板面且不沿厚度变化，并且只在板边受平行于板面且不沿厚度变化的面力或约束；平面应变问题表述为：等截面的长柱体，体力平行于横截面且不沿长度变化，并且柱面上受平行于横截面且不沿长度变化的面力或约束 [1-4]. 但实际问题中，在一定条件下，长柱体也可以是平面应力问题，而薄板也可能是平面应变问题. 因此给出两类平面问题的判别条件，可以使得学生从本质上理解两类平面问题的区别.

本文从弹性力学空间问题按应力求解需要满足的条件 (平衡微分方程、变形协调方程及边界条件) 出发，推导了平面问题按应力求解需要满足的条件；给出了连续、均匀、完全弹性、各向同性的材料在小变形情况下，平面应力问题与平面应变问题的判别条件.

1 平面应力问题的判别条件

平面应力问题中，应力分量和应变分量为 x, y 的函数，且 $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$.

1.1 平衡微分方程

将平面应力问题的应力分量代入弹性力学空间问题的平衡微分方程 [1] 中，简化得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0 \tag{1b}$$

$$f_z=0 \tag{1c}$$

式 (1c) 表明平面应力问题中要求体力是面内载荷，与 z 无关.

1.2 变形协调方程

由各向同性材料的广义胡克定律 [1] 可知平面应力问题中有 $\varepsilon_x\neq0$, $\varepsilon_y\neq0$, $\gamma_{xy}\neq0$, $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$, 而 $\varepsilon_z=-\dfrac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$, 一般情况下 $\varepsilon_z\neq0$, 且不为零的应变分量都为 x, y 的函数，因此空间问题的变形协调方程 [1] 可以简化为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=0 \tag{2b}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}=0 \tag{2c}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y\partial x}=0 \tag{2d}$$

式 (2b), (2c), (2d) 的解为 $\varepsilon_z=Ax+By+C$, 将 $\varepsilon_z=-\dfrac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$ 代入，有 $\sigma_x+\sigma_y=ax+by+c$.

2014–07–01 收到第 1 稿，2014–12–03 收到修改稿.

1) 成都理工大学 2013—2016 年高等教育人才培养质量和教学改革项目 (13JGY12，13JGY11), 成都理工大学人才队伍建设培养计划 (000036) 和成都理工大学复杂地质边坡破坏力学机理科研创新团队资助项目.

2) 罗艳, 副教授, 主要研究方向为材料的损伤、疲劳及本构关系. E-mail：luoyan08@cdut.cn

引用格式：任珊, 罗艳. 关于弹性力学平面应力问题与应变问题的判别. 力学与实践, 2015, 37(5)：644-646

Ren Shan, Luo Yan. The discrimination of plane stress problem and plane strain problem. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(5)：644-646

因此，当同时满足变形协调方程 (2a) 和 $\sigma_x + \sigma_y = ax + by + c$ 这个线性变化条件时为平面应力问题. 但一般情况下应力、应变的线性条件较难满足，教科书 [1-4] 中陈述的平面应力问题是近似理论，可在近似接受的条件下成立，即 “很薄的等厚度薄板，体力平行于板面且不沿厚度变化，并且只在板边受平行于板面且不沿厚度变化的面力或约束，这时即使不满足线性条件也可近似看作平面应力状态”.

1.3　几何方程

将各向同性材料的广义胡克定律推得的平面应力问题的应变分量代入空间问题的几何方程 [1]，简化得

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x \tag{3a}$$

$$\varepsilon_y = \partial v/\partial y \tag{3b}$$

$$\varepsilon_z = \partial w/\partial z \tag{3c}$$

$$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \tag{3d}$$

$$\gamma_{yz} = \partial w/\partial y + \partial v/\partial z = 0 \tag{3e}$$

$$\gamma_{zx} = \partial w/\partial x + \partial u/\partial z = 0 \tag{3f}$$

由式 (3a)，式 (3b) 可分别求得平面应力问题的位移分量 u, v, 而由式 (3c) 可推出轴向位移 $w = \int \varepsilon_z(x,y)\mathrm{d}z = \varepsilon_z(x,y)z + w_0(x,y)$, 即，平面应力问题中有 u, v, w 3 个位移分量. $w_0(x,y)$ 可由约束条件得到，例如取固定端或对称面处为 $z = 0$, 有 $w_0(x,y) = 0$.

由 1.2 节中的讨论可知，ε_z 满足线性变化条件 $(\varepsilon_z = Ax + By + C)$，则有 $w = (Ax + By + C)z$，即平面应力状态截面能自然地保持平面无翘曲.

1.4　边界条件

空间问题应力边界条件可由斜面应力公式得到

$$(\bar{f}_x)_s = (\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z))_s \tag{4a}$$

$$(\bar{f}_y)_s = (\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z))_s \tag{4b}$$

$$(\bar{f}_z)_s = (\tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y) + \sigma_z\cos(n,z))_s \tag{4c}$$

式中 n 表示边界面的外法线.

先讨论侧面 (即法向与 z 轴垂直的面) 的边界条件，对于侧面有 $\cos(n,z) = 0$, 在平面应力问题中，侧面上有 $(\tau_{xz} = \tau_{yz})_s = 0$, 故式 (4) 可以简化为

$$(\bar{f}_x)_s = (\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y))_s \tag{5a}$$

$$(\bar{f}_y)_s = (\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y))_s \tag{5b}$$

$$(\bar{f}_z)_s = 0 \tag{5c}$$

式 (5c) 表明要求侧面所受的面力不能有 z 轴方向的分量，即侧面只能受 x, y 方向的载荷.

再讨论端面，平面应力问题 $(\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$ 要求端面自由，则有

$$\left.\begin{aligned}
&(\bar{f}_x)_s = (\tau_{zx})_s = 0\\
&(\bar{f}_y)_s = (\tau_{zy})_s = 0\\
&(\bar{f}_z)_s = (\sigma_z)_s = 0\\
&(\bar{M}_x)_s = \iint y(\sigma_z)_s \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\\
&(\bar{M}_y)_s = \iint x(\sigma_z)_s \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2　平面应变问题的判别条件

对于平面应变问题，应力分量和应变分量为 x, y 的函数，且 $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

2.1　平衡微分方程

由各向同性材料的广义胡克定律 [1] 可知平面应变问题中有 $\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, 且应力分量都为 x, y 的函数. 将平面应变问题的应力分量代入空间问题的平衡微分方程 [1]，可得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \tag{7a}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \tag{7b}$$

$$f_z = 0 \tag{7c}$$

式 (7c) 表明平面应变问题中要求体力是面内载荷，与 z 无关. 对比式 (1) 发现两类平面问题应满足的平衡微分方程是相同的，并且都要求体力是面内载荷，与 z 无关.

2.2　变形协调方程

对于平面应变问题，有 $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$, $\gamma_{xy} \neq 0$, 且为 x, y 的函数，将此条件代入空间问题的变形协调方程 [1] 中，得到平面应变问题的变形协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{8}$$

与式 (2) 对比，平面应变问题只需要满足一个相容方程 (8)，而平面应力问题除了满足相容方程 (2a) 外还要同时满足线性变化条件 $\sigma_x+\sigma_y=ax+by+c$.

2.3 几何方程

将 $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$, $\varepsilon_z=0$ 代入空间问题的几何方程 [1] 中，可得

$$\varepsilon_x=\partial u/\partial x \tag{9a}$$

$$\varepsilon_y=\partial v/\partial y \tag{9b}$$

$$\varepsilon_z=\partial w/\partial z=0 \tag{9c}$$

$$\gamma_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x \tag{9d}$$

$$\gamma_{yz}=\partial w/\partial y+\partial v/\partial z=0 \tag{9e}$$

$$\gamma_{zx}=\partial w/\partial x+\partial u/\partial z=0 \tag{9f}$$

将式 (9c) 积分，由约束条件可确定积分常数，例如取固定端或对称面处为 $z=0$, 可得 $w=0$, 则平面应变问题有两个位移分量 $u(x,y), v(x,y)$, 故平面应变状态要求约束能保证无 z 向位移.

2.4 边界条件

先讨论侧面 (即法向与 z 轴垂直的面) 的边界条件，对于侧面有 $\cos(n,z)=0$, 在平面应变问题中，侧面上有 $(\tau_{xz}=\tau_{yz})_s=0$, 故式 (4) 可以简化为

$$(\bar{f}_x)_s=(\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{yx}\cos(n,y))_s \tag{10a}$$

$$(\bar{f}_y)_s=(\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y))_s \tag{10b}$$

$$(\bar{f}_z)_s=0 \tag{10c}$$

式 (10c) 表明要求侧面所受的面力不能有 z 轴方向的分量，即侧面只能受 x,y 方向的载荷. 对比式 (5) 可知两类平面问题侧面应满足的边界条件相同，都要求侧面只承受 x,y 方向的载荷.

再讨论端面，平面应变问题 ($\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$, $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$) 要求端面无切应力，则在端面上有

$$\left.\begin{aligned}(\bar{F}_{sx})_s&=\iint(\tau_{zx})_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\(\bar{F}_{sy})_s&=\iint(\tau_{zy})_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\(\bar{F}_N)_s&=\iint(\sigma_z)_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\(\bar{M}_x)_s&=\iint y(\sigma_z)_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\(\bar{M}_y)_s&=\iint x(\sigma_z)_s\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

对于纯平面应变状态，要求端面的约束按 $(\sigma_z)_s=\mu(\sigma_x+\sigma_y)_s$ 分布；若约束未知，去掉约束，以力边界替代，则按 $(\sigma_z)_s=\mu(\sigma_x+\sigma_y)_s$ 分布加在构件端面时构件也为纯平面应变状态. 若不是纯平面应变状态，可利用圣维南原理，即 $(\sigma_z)_s$ 可以不按上述分布，但端面的载荷与上述分布静力等效时，则构件端面附近是圣维南区，不是平面应变状态，而过了圣维南区，中间部分就是平面应变状态.

3 结 论

通过上述讨论，可知空间问题 (几何形状与 z 轴无关, 如柱形体；约束、侧面载荷、体力与 z 轴无关) 在下列情况下，可简化为平面问题：

(1) 平面应力问题：对于薄板型构件或自由表面层，无端面约束和载荷时可视为平面应力问题；对于长柱体构件，要求端面无约束或载荷，且满足线性分布条件 $\sigma_x+\sigma_y=ax+by+c$，即变形后截面自然地保持平面，也为平面应力问题.

(2) 平面应变问题：约束能保证无 z 向位移时为平面应变问题；当端面受力满足 $(\sigma_z)_s=\mu(\sigma_x+\sigma_y)_s$ 的分布时也可视为平面应变问题；或当端面的载荷与 $(\sigma_z)_s=\mu(\sigma_x+\sigma_y)_s$ 静力等效时，越过构件近端的圣维南区，构件中间部分同样可视作平面应变问题.

参 考 文 献

1 徐芝纶. 弹性力学简明教程 (第 3 版). 北京：高等教育出版社，2002
2 王光钦. 弹性力学. 北京：中国铁道出版社，2008
3 李世清. 弹性力学 (第 2 版). 成都：电子科技大学出版社，2005
4 徐芝纶. 弹性力学 (第 4 版). 北京：高等教育出版社，2011

(责任编辑：胡 漫)