

河南师范大学

2012 年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：601 名称：数学（理）适用专业或方向：环境科学
 （必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空题（每小题 3 分，共 45 分）

1. 设常数 $k > 0$ ，函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为_____。
2. $f(x)$ 在 x_0 点可导是 $f(x)$ 在 x_0 点连续的_____条件。
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，且在 x_0 的某领域内 $f(x)$ 具有二阶连续导数，则必有 $f''(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且当_____时，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$ 。
6. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ，则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 若 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，则 $\int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) f\left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 e^x ，则 $\int xf(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. $y = f(x)$ 由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定， $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (n 为正整数， $\lambda > 0$)
11. $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分是 $f(x, y)$ 在该点连续的_____条件。

12. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 的间断点是_____。

13. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 二次积分 $\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$ 交换积分次序后所成的二次积分是_____。

15. 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解为_____。

二、解答题 (每小题 8 分, 共 88 分)

16. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}$

17. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$ 。

18. 设某函数的图形上有拐点 $p(2, 4)$, 在 p 点处曲线的切线斜率为 -3, 又知这个函数的二阶导数 $y'' = 6x + C$, 求这个函数。

19. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x f'(x) dx$ 。

20. 验证函数 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

21. 求 $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 。

22. 设 $z = uv + \sin t$, 而 $u = e^t, v = \cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$ 。

23. 计算 $\iint_D xy d\sigma$ 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及其直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域。

24. 计算 $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的闭区域。

25. 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解。

26. 溶液自深 18cm 顶直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中。开始时漏斗中盛满了溶液。已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min。问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

三、论证题

27. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且不变号, 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

28. (9 分) 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数. 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.