

河南师范大学

2013 年硕士研究生入学考试业务课试卷

考试科目代码: 601 名称: 数学(理) 适用专业或方向: 环境工程

(必须在答题纸上答题, 答题纸可向监考老师索要)

一、单项选择题(1-8 题, 每小题 4 分, 共 32 分) 请将答案写在答题纸上。

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时为 ()

- (A) 无穷大量 (B) 无穷小量
(C) 有界、但不是无穷大量 (D) 有界、但不是无穷小量

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a(1+x)^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 ()

- (A) $a=e, b=1$ (B) $a=\frac{1}{e}, b=1$
(C) $a=e, b=-1$ (D) $a=\frac{1}{e}, b=-1$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 则 ()

- (A) $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在且相等 (B) $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$ 存在但不相等
(C) $f'_+(0)$ 存在但 $f'_-(0)$ 不存在 (D) $f'_-(0)$ 存在但 $f'_+(0)$ 不存在

4. 下列等式不成立的是 ()

- (A) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$ (B) $d \int f(x) dx = f(x) dx$
(C) $\int f'(x) dx = f(x) + C$ (D) $\int df(x) = f(x)$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ e^{-x}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 则 $\int_0^2 f(x) dx =$ ()

$$(A) e^{-1} + e^{-2} + \frac{2}{3}$$

$$(B) e^{-1} + e^{-2} - \frac{2}{3}$$

$$(C) e^{-1} - e^{-2} + \frac{2}{3}$$

$$(D) e^{-1} - e^{-2} - \frac{2}{3}$$

6. $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ 是 $f(x, y)$ 在该点取得极值的 ()

- (A) 充分而非必要条件 (B) 必要而非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

7. 设 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 为平面圆域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则以下正确的是 ()

$$(A) \iint_D x dx dy = 4 \iint_{D_1} x dx dy$$

$$(B) \iint_D y dx dy = 4 \iint_{D_1} y dx dy$$

$$(C) \iint_D xy dx dy = 4 \iint_{D_1} xy dx dy$$

$$(D) \iint_D x^2 dx dy = 4 \iint_{D_1} x^2 dx dy$$

8. $\int_b^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx =$ ()

$$(A) e^{-1}$$

$$(B) e^{-1} - 1$$

$$(C) -e^{-1}$$

$$(D) -e^{-1} - 1$$

二、填空题 (9-14 题, 每小题 4 分, 共 24 分) 请将答案写在答题纸上。

9. 若 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ a + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则常数 $a =$ _____。

10. 曲线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程为 _____。

11. 若 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____。

12. 设函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 则 $\text{grad} f(1, -1, 2) =$ _____。

13. $\int_1^2 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$ _____。

14. 设 $z = \ln(x^2 + y^2)$, 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.1$ 时, $dz =$ _____。

三、解答题 (15-23题, 共94分) 请将答案写在答题纸上。

15. 求下列极限: (12分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

16. 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的单调区间与极值、凹凸区间与拐点。(10分)

17. 证明: 当 $x \geq 1$ 时,

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad (10分)$$

18. 已知, 曲线 $y = x^2$ ($x \geq 0$) 上一点 A 处的切线, 与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$. 求

(1) 该切线方程;

(2) 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。(12分)

19. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 的通解。(10分)

20. 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 求 $u_{xy}'' \left(2, \frac{1}{\pi} \right)$ 。(10分)

21. 计算: (10分)

$$(1) \int \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$(2) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

22. 求函数 $F(x) = \int_x^{-x} f(t) dt$ 的导数。(10分)

23. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x\}$ 。(10分)