

文章编号:1003-207(2014)11-0114-08

# 重尾索赔条件下现代风险模型的破产 概率估计:多险种混合情形

白建明,尹晓玲,陈云

(兰州大学管理学院,甘肃兰州 730000)

**摘要:**破产概率是非寿险保险风险理论的核心问题。与经典的 Cramér-Lundberg 模型相比,由 Li Zehui 等建立的现代风险模型更为准确地描述了非寿险保险运营的主要特征,对现实保险业务具有较好的解释力。本文基于现代风险模型,考虑保险公司多个险种混合经营这一更为现实的情形,在索赔额服从正则尾分布条件下获得了破产概率的渐近等价估计。我们发现,在具有大额索赔特征的多个险种混合的条件下,公司面临的极端索赔风险将由索赔额分布尾部最厚的那些险种决定,而索赔额分布尾部相对较薄的那些险种的影响作用将被淹没。该结论的有效性可用 MATLAB 数值模拟得到理想的验证。本文结果是对风险模型研究的重要推广,也为多险种混合情形下保险公司的风险控制与初始保证金界定提供了依据。

**关键词:**现代风险模型;混合险种;破产概率;渐近等价;正则尾分布;数值模拟

**中图分类号:**F224.7;O211.9 **文献标识码:**A

## 1 引言

经典风险模型(即 Cramér-Lundberg 模型)是保险风险理论的核心内容之一,基本形式为:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i, t \geq 0 \quad (1)$$

其中  $u \geq 0$  为公司的初始保证金,  $c > 0$  为保费收入率,  $M(t)$  表示时间  $t$  之前的索赔次数,  $Y_i$  为第  $i$  次索赔的索赔额,  $i = 1, 2, \dots$ 。于是  $R(t)$  及和式  $\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i$  就分别表示时间  $t$  之前公司的总盈余及累计索赔额。称  $\{M(t); t \geq 0\}$  为索赔过程,  $\{R(t); t \geq 0\}$  为盈余过程(或风险过程)。规定  $R(0) = u$ 。

模型的中心问题为破产概率。此处“破产”并非字面含义,而指盈余过程  $\{R(t)\}$  在某时刻跌至 0 水平以下的一种状态。在过去的一百余年里,关于经典模型的研究从未中断,产生了丰硕的成果,形成了破产理论,极大地促进了风险理论的发展和完善。大体而言,关于破产概率的求解或估计一般在齐次 Poisson 索赔过程假设及索赔额随机变量分别服从轻尾和重尾分布等条件下进行。索赔额具有轻

尾分布意味着“小额索赔”条件成立(典型的例子如汽车保险险种),这一方面的代表性工作可见 Cramér<sup>[1]</sup>, Feller<sup>[2]</sup>, Gerber<sup>[3]</sup>, Embrechts 等<sup>[4]</sup>, Rolski 等<sup>[5]</sup>, Grandell<sup>[6]</sup> 等。索赔额服从重尾分布对应于“大额索赔”背景(例如现实中常见的火灾险、风暴险及洪水险等巨灾险种),此时破产概率没有精确表达,只能讨论其渐近结果,一些重要的结果包括 Embrechts 等<sup>[4]</sup>, Goldie 等<sup>[7]</sup> 及 Asmussen<sup>[8-9]</sup> 等。此外还有许多学者对模型进行了各种推广,细节可见 Embrechts 等<sup>[4]</sup>。然而,经典模型的结构简单,忽略保单信息,对保费收入进行线性估计,关于索赔过程的假设过强,只是一个“易于计算的模型”<sup>[6,10]</sup>,而对非寿险保险业务的现实特征缺乏足够的描述力。

不同于经典模型及其众多推广模型粗略估计保费收入、直接考虑索赔过程而忽略保单进入的思想,由 Li Zehui 等<sup>[11]</sup> 提出的现代风险模型首先从保单售出与索赔产生的因果关系出发,利用保单进入过程自然地引出索赔过程,清晰地描述了保险风险的产生机制;其次,模型还引入随机保期的概念,并允许所有保单在保期内可产生多次索赔,充分强调了保险业务的完整信息记录。总体上,这一模型更为贴近现代保险业务的现实运行规律。但由于模型的结构复杂,破产概率研究的难度相对较大。目前,关于这一模型的工作主要包括三个方面:风险过程

收稿日期:2013-04-07; 修订日期:2013-08-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71171103)

作者简介:白建明(1966-),男(汉族),甘肃天水人,兰州大学管理学院,博士,副教授,研究方向:风险分析与管理、系统可靠性、应用随机过程。

的弱收敛性质<sup>[12-13]</sup>, 索赔额服从轻尾及重尾分布条件下的破产概率估计<sup>[14-16]</sup>, 不同条件下风险过程的精细大偏差<sup>[17-18]</sup>。

另一方面, 无论经典模型或现代模型, 现有工作均侧重于讨论单一风险, 其中索赔额一般被假设为独立同分布的随机变量, 这意味着保单及险种是单一类型的。然而现实中, 保险公司经常面对多个险种业务一揽子管理的情形, 此时公司面临的索赔风险分散地来自于所有险种, 呈现聚合特征, 风险控制需要新的依据。为解决这一问题, 本文针对现代风险模型, 以巨灾风险为背景, 在多个险种的混合条件下寻求破产概率的估计方法。同时, 考虑到重尾分布尾部特征的模糊性, 为在多险种混合条件下尽可能清晰地描述大额索赔的风险性质, 获得更具说服力的结论, 我们选取重尾分布族中最具代表性、尾部特征刻画相对更为清晰的正则尾分布作为主要工具。正则尾分布是重尾分布族的重要子族之一, 是描述“极端事件”(包括大型自然灾害、恶性事故、金融风暴及巨额索赔等)的有效工具。关于正则尾分布的定义及主要性质, 可参见附录 1。

## 2 模型及假设

我们在现代风险模型的基础上建立多险种混合结构。数学上只需考虑两个险种即可, 其结果可直接推广到有限多个险种的情形。记两个险种为 I 和 II。从非寿险保险的现实特点出发, 规定两个险种具有如下风险结构(为方便, 以下只叙述险种 I; 险种 II 完全类似, 只需将各符号的上标“I”换为“II”即可):

(1) 保单依次售出, 一经售出立即生效。记售出时刻为  $S_1^I, S_2^I, \dots$ , 其中  $S_i^I$  表示险种 I 的第  $i$  张保单的售出时刻,  $i = 1, 2, \dots$ 。序列  $\{S_i^I\}$  形成一个计数过程  $\{N^I(t); t \geq 0\}$ , 称为险种 I 的保单售出过程。

(2) 保单价格由保期决定, 保期越长, 保单价格越高。记第  $i$  张保单的保期为  $C_i^I$ , 价格为  $f(C_i^I)$ 。其中  $f$  为严格正的单调增函数。至时间  $t$ , 险种 I 为公司产生的保费收入为  $\sum_{i=1}^{N^I(t)} f(C_i^I)$ 。

(3) 保单在保期内可多次索赔, 索赔一经产生立即赔付。对第  $i$  张保单, 从售出时刻  $S_i^I$  开始, 记其第  $j$  次索赔的发生时刻为  $S_i^I + T_{ij}^I$ , 索赔额为  $Y_{ij}^I, j = 1, 2, \dots$ 。索赔时刻序列  $\{T_{ij}^I\}$  形成一个计数过程  $\{M_i^I(t); t \geq 0\}$ , 称为第  $i$  张保单的索赔过

程。这样, 至时间  $t$ , 第  $i$  张保单产生的索赔次数及相应的累计索赔额分别为:

$$M_i^I((t - S_i^I) \wedge C_i^I) = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{S_i^I + T_{ij}^I \leq t, T_{ij}^I \leq C_i^I\}}$$

$$\sum_{j=1}^{M_i^I((t - S_i^I) \wedge C_i^I)} Y_{ij}^I = \sum_{j=1}^{\infty} Y_{ij}^I \cdot 1_{\{S_i^I + T_{ij}^I \leq t, T_{ij}^I \leq C_i^I\}}$$

其中“ $\wedge$ ”为取最小值运算, “ $1_{\{\cdot\}}$ ”为随机事件  $\{\cdot\}$  的示性函数,  $\{S_i^I + T_{ij}^I \leq t, T_{ij}^I \leq C_i^I\}$  表示只计算发生在保期内及时间  $t$  之前的索赔。

(4) 每张保单为公司产生的净利润等于其保单收入与累计索赔之差。

根据上述规定, 至时间  $t$ , 险种 I 和险种 II 产生的净收益分别为:

$$\sum_{i=1}^{N^I(t)} f(C_i^I) - \sum_{i=1}^{N^I(t)} \sum_{j=1}^{\infty} Y_{ij}^I \cdot 1_{\{S_i^I + T_{ij}^I \leq t, T_{ij}^I \leq C_i^I\}}$$

$$\sum_{i=1}^{N^{II}(t)} f(C_i^{II}) - \sum_{i=1}^{N^{II}(t)} \sum_{j=1}^{\infty} Y_{ij}^{II} \cdot 1_{\{S_i^{II} + T_{ij}^{II} \leq t, T_{ij}^{II} \leq C_i^{II}\}}$$

两个险种产生的混合总收益及混合索赔总支付分别为:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N^I(t)} f(C_i^I) + \sum_{i=1}^{N^{II}(t)} f(C_i^{II})$$

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N^I(t)} \sum_{j=1}^{M_i^I((t - S_i^I) \wedge C_i^I)} Y_{ij}^I + \sum_{i=1}^{N^{II}(t)} \sum_{j=1}^{M_i^{II}((t - S_i^{II}) \wedge C_i^{II})} Y_{ij}^{II} \tag{2}$$

从而, 保险公司至时间  $t$  的总盈余可表示为

$$R_u(t) = u + X(t) - Y(t), t \geq 0. \tag{3}$$

其中  $u \geq 0$  为初始保证金。称由上式决定的随机过程  $\{R_u(t); t \geq 0\}$  为公司的盈余过程, 约定  $R_u(0) = u$ 。

我们称 (3) 为具有多险种混合结构的现代风险模型, 其破产时刻及破产概率可仿照经典模型分别定义如下:

$$\tau = \tau(u) = \inf\{t: R_u(t) < 0\}, \tag{4}$$

$$\varphi(T) = \varphi(u, T) = P\{\tau \leq T\}, T < \infty. \tag{5}$$

显然,  $\varphi(T)$  表示盈余过程  $\{R_u(t)\}$  在某有限时间  $T$  内跌至水平 0 以下的概率, 风险理论中称之为有限时间破产概率。

关于多险种混合结构的现代风险模型 (3), 我们首先规定独立险种假设, 即两个险种 I 和 II 是独立的; 其次, 对于每一个险种, 以下假设成立:

A<sub>1</sub> 保单售出过程为非齐次 Poisson 过程, 在有限时间内只能出售有限张保单;

A<sub>2</sub> 索赔过程为一族独立同分布的随机点过

程, 在有限时间内只能产生有限次索赔;

A<sub>3</sub> 所有保单的保期为独立同分布的非负离散随机变量, 且只取有限个值;

A<sub>4</sub> 索赔额为独立同分布的非负随机变量, 服从正则尾分布;

A<sub>5</sub> 保单售出过程、索赔过程、保期、索赔额之间彼此独立。

假设 A<sub>1</sub> 中选取非齐次 Poisson 过程是考虑到某些非寿险保单销售在季节上的不均匀性。假设 A<sub>2</sub> 允许索赔过程可以是一般的计数过程, 放宽了经典模型中齐次 Poisson 过程假设的限制。假设 A<sub>3</sub> 将保期处理为随机变量, 意味着客户可在公司提供的若干种保期(以及相应的保单价格)中进行选择。假设 A<sub>4</sub> 表明索赔额服从重尾分布, 因而大额索赔条件成立。

本文目标即在上述假设条件下寻求有限时间破产概率  $\varphi(T)$  的渐近等价估计。为便于讨论, 我们利用 (3) 式定义一个新的随机过程  $\{\xi_u(t); t \geq 0\}$  如下:

$$\xi_u(t) = Y(t) - X(t) = u - R_u(t), t \geq 0 \quad (6)$$

显然  $\xi_u(t)$  表示时间  $t$  前保险公司的累计净支付, 称  $\{\xi_u(t)\}$  为现代风险模型的净支付过程。利用上述关系, 有限时间破产概率可等价表示为:

$$\varphi(T) = P\{\text{存在 } t \in (0, T], \text{ 使得 } \xi_u(t) > u\} \quad (7)$$

### 3 主要结果

由假设 A<sub>1</sub>, 设两个险种的非齐次 Poisson 保单售出过程  $\{N^I(t)\}$  和  $\{N^{II}(t)\}$  分别具有来到强度函数  $\lambda_I(t)$  和  $\lambda_{II}(t)$ , 以及累积强度函数  $\Lambda_I(t) = \int_0^t \lambda_I(s) ds$  和  $\Lambda_{II}(t) = \int_0^t \lambda_{II}(s) ds$ 。由假设 A<sub>4</sub>, 我们记两个险种对应的索赔额分布函数为  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$ , 分别具有正则变化指数  $\alpha$  和  $\beta$ 。由附录 1 的性质 1,  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$  的尾部可以分别表示为(对足够大的  $y$ ):

$$\overline{F}_I(y) = y^{-\alpha} L_1(y), \overline{F}_{II}(y) = y^{-\beta} L_2(y), \alpha > 0, \beta > 0 \quad (8)$$

其中  $L_1(y)$  及  $L_2(y)$  为缓变函数。

以下给出有限时间破产概率  $\varphi(T)$  的渐近等价估计结果。与经典模型的研究思路完全一致, 重尾索赔情形下破产概率的讨论仍在初始保证金  $u$  趋于无穷大的极限条件下进行。我们使用符号“ $\approx$ ”表示极限等价关系。结果由一个引理和两个定理组成, 定理证明见附录 2。

**引理 1** 对任意有限时间  $T < \infty$ , 有:

$$P\{\xi_u(T) > u\} \leq \varphi(T) \leq P\{Y(T) > u\}$$

由 (6), (7) 两式, 引理 1 的结论是显然的, 它不依赖于本文假设, 与索赔额的分布类型无关。依据两个险种 I 和 II 混合产生的索赔总支付  $Y(T)$  及净支付  $\xi_u(T)$  的特征, 引理 1 给出了有限时间破产概率  $\varphi(T)$  的上界与下界, 提供了估计  $\varphi(T)$  的基本思路。

**定理 1** 若本文假设成立, 并且  $\alpha = \beta$ , 即两个险种的索赔额分布  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$  具有相同尾部指数, 则对任意有限时间  $T < \infty$ , 当  $u \rightarrow \infty$  时:

$$\varphi(T) \approx E[N^I(T)] \cdot E[M_1^I((T - U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u) + E[N^{II}(T)] \cdot E[M_1^{II}((T - U_1^{II}) \wedge C_1^{II})] \cdot \overline{F}_{II}(u) \quad (9)$$

其中  $U_1^I$  和  $U_1^{II}$  均为  $(0, t]$  上的随机变量, 分别具有分布函数  $\Delta_I(s)/\Delta_I(t)$  和  $\Delta_{II}(s)/\Delta_{II}(t)$ ,  $s \in (0, t]$ 。

**定理 2** 若本文假设成立, 并且  $\alpha < \beta$ , 即两个险种的索赔额分布  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$  具有不同尾部指数, 则对任意有限时间  $T < \infty$ , 当  $u \rightarrow \infty$  时:

$$\varphi(T) \approx E[N^I(T)] \cdot E[M_1^I((T - U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u) \quad (10)$$

其中  $U_1^I$  是定义在  $(0, t]$  上的随机变量, 具有分布函数  $\Delta_I(s)/\Delta_I(t)$ ,  $s \in (0, t]$ 。

定理 1 表明, 在双险种混合风险情形下, 如果两个险种对应的索赔额分布具有相同的正则变化指数, 则两类索赔额的分布具有相同级别的尾部厚度, 两个险种具有同等风险级别; 此时, 保险公司的风险将由两个险种共同决定。具体而言, 若初始保证金足够大, 那么有限时间破产概率将由两个险种的保单售出数量、索赔次数及其索赔额分布的尾部厚度等六个因素决定。定理 2 则揭示了另一种情形, 如果两个险种的索赔额分布具有不同的正则变化指数, 那么其中指数较小、尾部更厚、从而极端行为更为强烈的那个险种将单独地决定混合风险的性质, 而另一个险种(其索赔额分布尾部相对较薄)的影响将被“淹没”。

由证明过程可以看出, 两个定理的结论可直接推广至任意有限多个险种混合的情形。具体地, 设保险公司同时经营  $k$  个不同的非寿险险种,  $k \geq 2$ ; 相应的索赔额分别服从指数为  $\alpha_i$  的正则尾分布,  $i = 1, 2, \dots, k$ 。那么, 在本文假设下,

(1) 若  $k$  个指数  $\alpha_i$  完全相同, 即  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ , 则公司面临的混合索赔风险将由  $k$  个险种(的

保单数量、索赔次数及索赔额分布尾部)共同决定;

(2)若  $k$  个指数  $\alpha_i$  不全相同,令  $\alpha_M = \min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , 则保险公司的混合索赔风险将由  $k$  个险种中具有最小正则指数  $\alpha_M$  的某  $l$  个 ( $1 \leq l < k$ ) 险种决定,其余  $k-l$  个险种的影响将被淹没。

特别需要指出,如果保险公司的混合险种中既包括轻尾索赔的类型,又包括重尾索赔的类型,那么由附录 1 的性质 2 之(5),此时极端索赔风险将完全取决于重尾索赔险种,轻尾索赔险种的影响可忽略不计。

上述结论一方面充分体现了重尾分布完全不同于轻尾分布的特性,另一方面,它们为多险种混合条件及聚合风险情形下保险公司风险控制的目标与方向、初始保证金的合理界定提供了明确的理论依据和现实指导。

#### 4 数值模拟

本节给出 MATLAB 数值模拟算例,对上节主要结果(定理 1 和定理 2)进行验证。根据两个定理中有限时间破产概率  $\varphi(T)$  的渐近等价表达形式,模拟过程设计为如下 4 个步骤:

- (1) 对各随机过程及各随机变量的分布特征进行选取,并对所有参数赋值;
- (2) 给定时间  $T$ ,对(9)、(10)两式右端的估计函数分别进行模拟与计算,得到估计函数关于初始保证金  $u$  的变化趋势;
- (3) 对(9)、(10)两式左端的破产概率进行模拟,得到  $\varphi(T)$  的模拟值及其关于  $u$  的变化趋势;
- (4) 将(2)、(3)的模拟结果进行比较。

有关保单保期与价格、索赔次数、索赔额等参数的选取主要参考了保险公司非寿险业务(包括巨灾保险与建筑工程意外保险等具有大额索赔特征的险种)的实际数据,为模拟和计算方便进行了一定的简化处理,并满足本文基本假设。其中险种 I 的参数取值如下:保单售出过程  $\{N^I(t)\}$  为齐次 Pois-

son 过程,来到速率为 1;保单价格  $f(C_i^I) \equiv 10$ ,保期  $C_i^I \equiv 10$ ;索赔过程  $\{M_i^I(t)\}$  为独立同分布齐次 Poisson 过程族,来到速率为 0.001;索赔额均值  $E[Y_{ij}^I] = 400$ 。险种 II 的参数取值如下:保单售出过程  $\{N^{II}(t)\}$  为齐次 Poisson 过程,来到速率为 1;保单价格  $f(C_i^{II}) \equiv 15$ ,保期  $C_i^{II} \equiv 10$ ;索赔过程  $\{M_i^{II}(t)\}$  为独立同分布齐次 Poisson 过程族,来到速率为 0.0015;索赔额均值  $E[Y_{ij}^{II}] = 500$ 。模拟时间  $T = 500$ ,模拟次数为 5000 次。

为更好地验证定理的有效性,我们分别选用 Pareto 分布与 Weibull 分布两类典型的重尾分布对索赔额分布进行两次重复模拟。在上述参数条件下,对于定理 1,  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$  具有相同尾部指数,在 Pareto 分布情形,根据 MATLAB 编程中的广义 Pareto 分布生成命令 `gprnd(k, sigma, theta)`,取  $F_I = \text{gprnd}(0.6, 96, 160)$ ,  $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ ;在 Weibull 分布情形,根据 MATLAB 编程中相应的函数 `wblrnd(c, tau)` 取  $F_I = \text{wblrnd}(400, 0.4)$ ,  $F_{II} = \text{wblrnd}(500, 0.4)$ 。对于定理 2,  $F_I(y)$  和  $F_{II}(y)$  尾部指数不同,在 Pareto 分布情形取  $F_I = \text{gprnd}(0.3, 84, 280)$ ,  $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ ;Weibull 分布情形取  $F_I = \text{wblrnd}(400, 0.4)$ ,  $F_{II} = \text{wblrnd}(500, 0.7)$ 。

依据上述参数选取,索赔额服从 Pareto 分布的破产概率估计及模拟结果见表 1 及图 1,索赔额服从 Weibull 分布的破产概率估计及模拟结果如表 2 及图 2 所示。结果显示,破产概率  $\varphi(T)$  的模拟值((9), (10)两式左端)与估计值((9), (10)两式右端)均表现出随  $u$  增加而减小的趋势,印证了保险风险理论中破产概率关于初始保证金单调递减的性质。同时,各种情形下破产概率的模拟值与估计值具有明显的渐近等价关系,随着初始保证金逐渐增大,二者之间的差值越来越小,表现出良好的渐近等价估计效果,理想地验证了定理 1 和定理 2 的估计效果。

表 1 破产概率的模拟及估计结果 (Pareto 索赔)

| 初始保证金 | 定理 1                                   |        |        | 定理 2                                   |        |         |
|-------|--|--------|--------|--|--------|---------|
|       | $F_I = \text{gprnd}(0.6, 96, 160)$     |        |        | $F_I = \text{gprnd}(0.3, 84, 280)$     |        |         |
|       | $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ |        |        | $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ |        |         |
|       | 估计值                                    | 模拟值    | 差值     | 估计值                                    | 模拟值    | 差值      |
| 5000  | 0.0544                                 | 0.0298 | 0.0246 | 0.0362                                 | 0.0160 | 0.0202  |
| 7500  | 0.0282                                 | 0.0152 | 0.0130 | 0.0168                                 | 0.0100 | 0.0068  |
| 10000 | 0.0189                                 | 0.0110 | 0.0079 | 0.0097                                 | 0.0078 | 0.0019  |
| 12500 | 0.0121                                 | 0.0088 | 0.0033 | 0.0063                                 | 0.0060 | 0.0003  |
| 15000 | 0.0091                                 | 0.0066 | 0.0025 | 0.0047                                 | 0.0054 | -0.0007 |

| 初始保证金 | 定理 1                                   |        |        | 定理 2                                   |        |         |
|-------|--|--------|--------|--|--------|---------|
|       | $F_I = \text{gprnd}(0.6, 96, 160)$     |        |        | $F_I = \text{gprnd}(0.3, 84, 280)$     |        |         |
|       | $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ |        |        | $F_{II} = \text{gprnd}(0.6, 120, 200)$ |        |         |
|       | 估计值                                    | 模拟值    | 差值     | 估计值                                    | 模拟值    | 差值      |
| 17500 | 0.0069                                 | 0.0052 | 0.0017 | 0.0038                                 | 0.0038 | 0.0000  |
| 20000 | 0.0055                                 | 0.0038 | 0.0017 | 0.0032                                 | 0.0028 | 0.0004  |
| 22500 | 0.0047                                 | 0.0034 | 0.0013 | 0.0028                                 | 0.0018 | 0.0010  |
| 25000 | 0.0041                                 | 0.0036 | 0.0005 | 0.0023                                 | 0.0024 | -0.0001 |
| 27500 | 0.0038                                 | 0.0034 | 0.0004 | 0.0020                                 | 0.0016 | 0.0004  |
| 30000 | 0.0033                                 | 0.0028 | 0.0005 | 0.0018                                 | 0.0014 | 0.0004  |

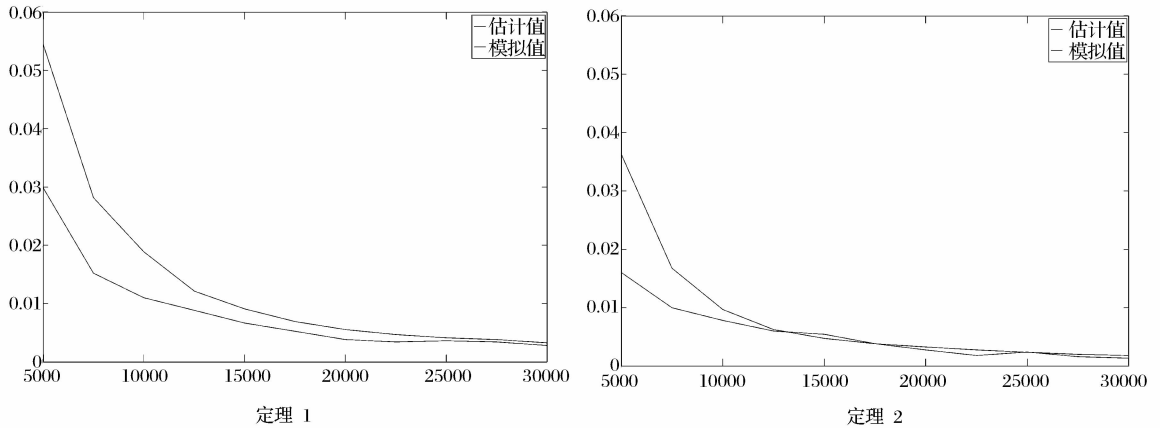


图 1 破产概率的模拟及估计结果 (Pareto 索赔)

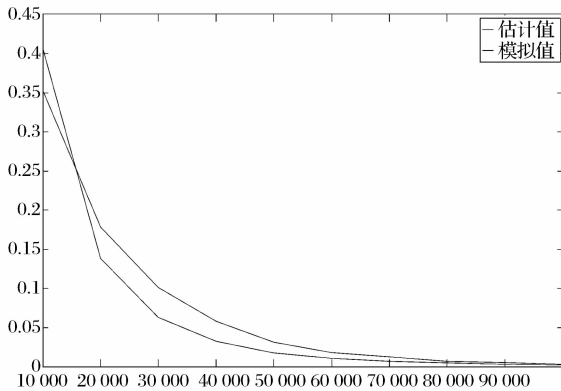
表 2 破产概率的模拟及估计结果 (Weibull 索赔)

| 初始保证金  | 定理 1                               |        |         | 定理 2                               |        |         |
|--------|------------------------------------|--------|---------|------------------------------------|--------|---------|
|        | $F_I = \text{wblrnd}(400, 0.4)$    |        |         | $F_I = \text{wblrnd}(400, 0.4)$    |        |         |
|        | $F_{II} = \text{wblrnd}(500, 0.4)$ |        |         | $F_{II} = \text{wblrnd}(500, 0.7)$ |        |         |
|        | 估计值                                | 模拟值    | 差值      | 估计值                                | 模拟值    | 差值      |
| 10000  | 0.4060                             | 0.3526 | 0.0534  | 0.2694                             | 0.2442 | 0.0252  |
| 20000  | 0.1383                             | 0.1784 | -0.0401 | 0.0948                             | 0.1154 | -0.0206 |
| 30000  | 0.0631                             | 0.1014 | -0.0383 | 0.0414                             | 0.0568 | -0.0154 |
| 40000  | 0.0325                             | 0.0586 | -0.0261 | 0.0197                             | 0.0324 | -0.0127 |
| 50000  | 0.0178                             | 0.0316 | -0.0138 | 0.0106                             | 0.0220 | -0.0114 |
| 60000  | 0.0108                             | 0.0182 | -0.0074 | 0.0068                             | 0.0098 | -0.0031 |
| 70000  | 0.0072                             | 0.0128 | -0.0056 | 0.0040                             | 0.0082 | -0.0042 |
| 80000  | 0.0049                             | 0.0074 | -0.0025 | 0.0028                             | 0.0044 | -0.0016 |
| 90000  | 0.0034                             | 0.0054 | -0.0020 | 0.0022                             | 0.0030 | -0.0008 |
| 100000 | 0.0021                             | 0.0032 | -0.0011 | 0.0014                             | 0.0020 | -0.0006 |

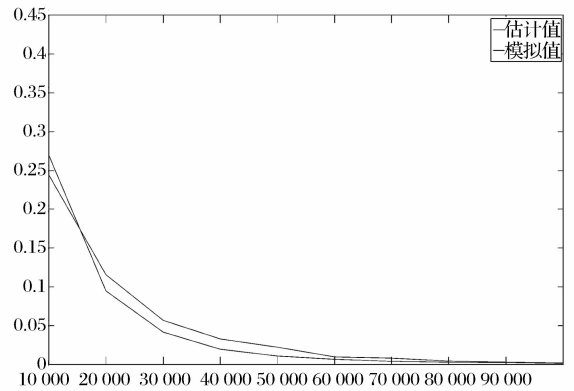
### 5 结语

破产概率是保险风险理论的核心问题。随着风险模型的逐步现实化,模型结构日趋复杂,获得破产概率的精确表达已不可能,因此对其进行估计成为研究的主流。基于对经典风险模型的反思,本文研究了对非寿险保险业务特征具有较好描述力的现代风险模型,并在其基础上考虑多个险种的混合结

构,进一步贴近非寿险业务的现实情形。本文在相当宽松的条件下,利用正则尾分布工具获得了重尾索赔情形下有限时间破产概率的渐近等价估计表达,并应用 MATLAB 工具进行数值模拟与计算,很好地验证了估计结果。本文工作是对风险模型研究的推广,并为现实中保险公司在多险种混合及聚合风险条件下初始保证金的合理界定与索赔风险控制提供了明确的理论依据。



定理 1



定理 2

图 2 破产概率的模拟及估计结果 (Weibull 索赔)

### 附录 1 正则尾分布及其性质

以下内容直接或间接地来源于 Feller<sup>[2]</sup>, Embrechts 等<sup>[4]</sup>, Goldie 和 Klüppelberg<sup>[7]</sup>, Bingham 等<sup>[19]</sup>等文献。

正则尾分布是重尾分布族的一个重要子族,是描述“极端事件”的有效工具。常见的极端事件包括大型自然灾害、恶性事故、金融风暴及巨额索赔等。正则尾分布的概念源于正则变化函数。

定义 1 (正则变化函数) 一个定义在  $(0, \infty)$  上的正可测函数  $f(x)$  称为(无穷远处的)正则变化函数,如果存在  $\alpha \geq 0$ , 使得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(kx)}{f(x)} = k^\alpha, \text{ 对 } k > 0$$

记为  $f(x) \in R_\alpha$ , 并称  $\alpha$  为  $f(x)$  的正则变化指数。

特殊地,若  $f(x) \in R_0$ , 则称  $f(x)$  为(无穷远处的)缓变函数。缓变函数在全体正则变化函数中具有最慢的变化速度,对数函数为典型的缓变函数之一。

定义 2 (正则尾分布) 设  $F(x)$  为某一非负随机变量  $X$  的分布函数,称  $F(x)$  为以  $\alpha > 0$  为指数的正则尾分布,如果  $\bar{F}(x) \in R_{-\alpha}$ , 即:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(kx)}{\bar{F}(x)} = k^{-\alpha}, \text{ 对 } k > 0$$

其中  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  为  $X$  的生存函数。此时也称  $X$  为正则尾分布随机变量。

显然,  $\alpha$  清晰地刻画了分布函数  $F(x)$  右尾的下降速度:  $\alpha$  越大,  $F(x)$  的尾部下降就越快,相应地,其尾部  $\bar{F}(x)$  就越“薄”。

正则尾分布函数具有特殊的表示,这为其应用带来了很大的方便。

性质 1(特殊表示) 设  $F(x)$  是正则尾分布函数,指数为  $\alpha$ , 则对足够大的  $x$ , 有  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ 。其中  $L(x)$  为缓变函数。

全体正则尾分布函数构成正则尾分布族,该分布族具有良好的封闭性。

性质 2(封闭性) 以下叙述中,符号“ $*$ ”表示卷积运算,“ $n *$ ”表示  $n$  重卷积运算,“ $\approx$ ”表示极限等价关系,所有极限均指  $x \rightarrow \infty$ 。

(1) 若  $\bar{F} \in R_{-\alpha}$ , 则对任意正整数  $n$ , 有  $\overline{F^{n*}} \in R_{-\alpha}$ , 且  $\overline{F^{n*}}(x) \sim \bar{F}(x)$ 。即由有限个独立同分布的正则尾分布随机变量组成的独立和,仍为正则尾分布随机变量,且具有相同指数。

(2) 若  $\bar{F}, \bar{G} \in R_{-\alpha}$ , 则  $\overline{F * G} \in R_{-\alpha}$ 。确切地,设  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L_1(x)$ ,  $\bar{G}(x) = x^{-\alpha}L_2(x)$ , 则

$$\overline{F * G} = x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))$$

即独立(但不同分布)且具有相同指数的正则尾分布随机变量,其独立和仍为正则尾分布随机变量,且具有相同指数。

(3) 若  $\bar{F} \in R_{-\alpha}$ ,  $\bar{G} \in R_{-\beta}$ , 并且  $\alpha < \beta$ , 则  $\overline{F * G} \in R_{-\alpha}$ 。即两个相互独立但指数不同的正则尾分布随机变量,其独立和仍为正则尾分布随机变量,但具有较小的指数。

(4) 设  $X, X_1, \dots, X_n$  为独立同分布且以  $\alpha$  为指数的正则尾分布随机变量,  $c_1, \dots, c_n$  为非负常数, 则

$$P\{c_1 X_1 + \dots + c_n X_n > x\} \approx (c_1^\alpha + \dots + c_n^\alpha) P\{X > x\}.$$

(5) 设  $X$  为正则尾分布随机变量,  $Y$  是满足  $P\{Y > x\} = o(P\{X > x\})$  的随机变量, 则无论二者独立与否, 总有  $P\{X + Y > x\} \approx P\{X > x\}$ 。

值得注意的是,性质(3)反映了重尾分布的一个重要特点:粗略地说,两个重尾分布随机变量的叠加,其结果等价于二者之中尾部更厚者,而尾部较轻者的影响被淹没。性质(5)显然是性质(3)的一般化。另外,性质(2), (3)均可推广至有限多个随机变量的情形。

上述性质是本文定理证明的关键工具。

以下对本文模拟使用到的 Pareto 分布与 Weibull 分布给出简介。Pareto 分布是正则尾分布族的代表性成员,经常被用作模拟巨灾风险及其他极端现象。其分布函数为:

$$F(x) = 1 - (\theta/x)^\alpha, \quad x \geq \theta.$$

其中  $\theta > 0$  为位置参数,  $k > 0$  为形状参数, 后者决定着  $F(x)$  的尾部性质:  $k$  越小, 分布的尾部越厚, 其极端行为越显著. 本文模拟中使用了 MATLAB 编程中的广义 Pareto 分布生成命令  $\text{gprnd}(k, \sigma, \theta)$ , 其中  $\sigma = k \cdot \theta$ .

Weibull 分布是另一类重要的重尾分布, 分布函数为:

$$F(x) = 1 - \exp\{-cx^\tau\}, x \geq 0$$

其中  $c > 0$  为尺度参数,  $0 < \tau < 1$  为形状参数, 后者决定着  $F(x)$  的尾部性质:  $\tau$  越小, 分布的尾部越厚, 其极端行为越显著. 模拟中使用了 MATLAB 编程中的 Weibull 分布生成命令  $\text{wblrnd}(c, \tau)$ .

**附录 2 定理证明**

定理 1 的证明

由引理 1, 为得到  $\varphi(T)$  的渐近等价估计, 只需计算概率  $P\{\xi_u(T) > u\}$  和  $P\{Y(T) > u\}$  即可. 首先计算  $P\{\xi_u(T) > u\}$ . 由 (6), (2) 两式, 给定  $T < \infty$ , 当  $u \rightarrow \infty$  时:

$$P\{\xi_u(T) > u\} = P\{Y(t) - X(t) > u\} = P\left\{\sum_{i=1}^{N^I(T)} \sum_{j=1}^{M_i^I((T-S_i^I) \wedge C_i^I)} Y_{ij}^I + \sum_{i=1}^{N^{II}(T)} \sum_{j=1}^{M_i^{II}((T-S_i^{II}) \wedge C_i^{II})} Y_{ij}^{II} - \sum_{i=1}^{N^I(T)} f(C_i^I) - \sum_{i=1}^{N^{II}(T)} f(C_i^{II}) > u\right\}$$

利用非齐次 Poisson 过程的性质对  $N^I(T)$  和  $N^{II}(T)$  取条件, 记  $p_n = P\{N^I(T) = n\}$ ,  $p_m = P\{N^{II}(T) = m\}$ , 有:

$$P\{\xi_u(T) > u\} = \sum_n \sum_m p_n p_m P\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{M_i^I((T-U_i^I) \wedge C_i^I)} Y_{ij}^I + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{M_i^{II}((T-U_i^{II}) \wedge C_i^{II})} Y_{ij}^{II} - \sum_{i=1}^n f(C_i^I) - \sum_{i=1}^m f(C_i^{II}) > u\right\}$$

其中随机变量  $U_i^I$  和  $U_i^{II}$  如定理 1 所述. 再分别对  $M_i^I((T-U_i^I) \wedge C_i^I)$  和  $M_i^{II}((T-U_i^{II}) \wedge C_i^{II})$  取条件, 并记  $q_{k_i} = P\{M_i^I((T-U_i^I) \wedge C_i^I) = k_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $q_{l_i} = P\{M_i^{II}((T-U_i^{II}) \wedge C_i^{II}) = l_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 继续上述推导, 得到:

$$P\{\xi_u(T) > u\} = \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} P\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} Y_{ij}^I + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} Y_{ij}^{II} - \sum_{i=1}^n f(C_i^I) - \sum_{i=1}^m f(C_i^{II}) > u\right\}$$

令  $k = k_1 + \dots + k_n$ ,  $l = l_1 + \dots + l_m$ . 注意到索赔额  $Y_{ij}^I$  和  $Y_{ij}^{II}$  各自的独立同分布性质, 又有:

$$P\{\xi_u(T) > u\} = \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} P\left\{\sum_{j=1}^k Y_{1j}^I + \sum_{j=1}^l Y_{1j}^{II} - \sum_{i=1}^n f(C_i^I) - \sum_{i=1}^m f(C_i^{II}) > u\right\} \approx \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} P\left\{\sum_{j=1}^k Y_{1j}^I + \sum_{j=1}^l Y_{1j}^{II} > u\right\} \quad (11)$$

由定理 1 的条件及附录 1 性质 2 之(1)、(2) 及(5),

$$P\{\xi_u(T) > u\} \approx \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} (kP\{Y_{11}^I > u\} + lP\{Y_{11}^{II} > u\}) = \sum_n \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} p_n q_{k_1} \dots q_{k_n} kP\{Y_{11}^I > u\} + \sum_m \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_m q_{l_1} \dots q_{l_m} lP\{Y_{11}^{II} > u\} = \sum_n p_n (\sum_{k_1} k_1 q_{k_1} + \dots + \sum_{k_n} k_n q_{k_n}) P\{Y_{11}^I > u\} + \sum_m p_m (\sum_{l_1} l_1 q_{l_1} + \dots + \sum_{l_m} l_m q_{l_m}) P\{Y_{11}^{II} > u\} = \sum_n n p_n E[M_1^I((T-U_1^I) \wedge C_1^I)] P\{Y_{11}^I > u\} + \sum_m m p_m E[M_1^{II}((T-U_1^{II}) \wedge C_1^{II})] P\{Y_{11}^{II} > u\} = E[N^I(T)] E[M_1^I((T-U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u) + E[N^{II}(T)] E[M_1^{II}((T-U_1^{II}) \wedge C_1^{II})] \cdot \overline{F}_{II}(u) \quad (12)$$

其次计算  $P\{Y(T) > u\}$ . 完全类似地, 可得到:

$$P\{Y(T) > u\} \approx E[N^I(T)] E[M_1^I((T-U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u) + E[N^{II}(T)] E[M_1^{II}((T-U_1^{II}) \wedge C_1^{II})] \cdot \overline{F}_{II}(u), \quad (13)$$

结合 (12) 及 (13) 式, 定理 1 得证.

定理 2 的证明

在定理 2 的条件下, 定理 1 证明过程中的 (11) 式仍然成立. 由于  $\alpha < \beta$ , 利用附录 1 性质 2 的(3), 并重复定理 1 的推导过程, 我们有:

$$P\{\xi_u(T) > u\} \approx \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} P\left\{\sum_{j=1}^k Y_{1j}^I + \sum_{j=1}^l Y_{1j}^{II} > u\right\} \approx \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} P\left\{\sum_{j=1}^k Y_{1j}^I > u\right\} = \sum_n \sum_m \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} \sum_{l_1} \dots \sum_{l_m} p_n p_m q_{k_1} \dots q_{k_n} q_{l_1} \dots q_{l_m} kP\{Y_{11}^I > u\} = \sum_n \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} p_n q_{k_1} \dots q_{k_n} kP\{Y_{11}^I > u\} = E[N^I(T)] E[M_1^I((T-U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u)$$

类似地,

$$P\{Y(T) > u\} \approx E[N^I(T)] E[M_1^I((T-U_1^I) \wedge C_1^I)] \cdot \overline{F}_I(u)$$

故 (10) 式成立. 定理 2 得证.

**参考文献:**

[1] Cramér H. On the mathematical theory of risk[M]. Stockholm:Skandia Jubilee Volume, 1930.  
 [2] Feller W. An introduction to probability theory and its applications[M]. Vol. 2, 2nd ed, New York: Wiley, 1971.  
 [3] Gerber H U. An introduction to mathematical risk theory[M]. Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, 1979.  
 [4] Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance[M]. Berlin:

- Springer, 1997.
- [5] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, et al. Stochastic processes for insurance and finance [M]. New York: Wiley & Sons, 1999.
- [6] Grandell J. Aspects of risk theory [M]. Berlin: Springer, 1991.
- [7] Goldie C M, Klüppelberg C. Subexponential distributions (A practical guide to heavy tails: Statistical techniques for analysing heavy tailed distributions) [M]. Boston: Birkhäuser, 1998.
- [8] Asmussen S. Risk theory in a Markovian environment [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1989, 2: 69—100.
- [9] Asmussen S. Subexponential asymptotics for stochastic processes: Extremal behaviour, stationary distributions and first passage probabilities [J]. Annals of Applied Probability, 1998, 8(2): 354—374.
- [10] Kaas R, Goovaerts M, Dhaene J, et al. Modern actuarial risk theory [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [11] Li Zehui, Zhu Jinxia, Chen Feng. Study of a risk model based on the entrance process [J]. Statistics & Probability Letters, 2005, 72(1): 1—10.
- [12] Li Zehui, Kong Xinbing. A new risk model based on policy entrance process and its weak convergence property [J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2007, 23(3): 235—246.
- [13] Xiao Hongmin, Li Zehui, Liu Weiwei. The limit behavior of a risk model based on entrance processes [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 56(5): 1441—1448.
- [14] Chen Feng, Zhu Jinxia, Li Zehui. Upper bounds for the ruin probabilities of the entrance-based risk model [J]. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2008, 37(16): 2634—2652.
- [15] 白建明, 肖鸿民. 一类新的累积冲击模型的性质及在保险风险理论中的应用 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2008, 44(1): 132—136.
- [16] 肖鸿民, 白建明. 重尾索赔条件下基于进入过程的保险风险模型的破产概率 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2010, 45(10): 122—126.
- [17] 唐风琴, 李泽慧, 陈进源. 一类基于进入过程的风险模型的精细大偏差 [J]. 数学物理学报, 2011, 31A(3): 737—751.
- [18] 唐风琴, 白建明. 一类带有广义负上限相依索赔额的风险过程大偏差 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2013, 48(1): 100—106.
- [19] Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. Regular variation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

## Ruin Probability Estimation for Modern Risk Model with Heavy-Tailed Claims and Multiple Insurance-Types

BAI Jian-ming, YIN Xiao-ling, CHEN Yun

(School of Management, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Ruin probability is the core theme of non-life insurance risk theory. Compared with the classical Cramér-Lundberg Model, the modern risk model presented by Li Zehui et al is more fully considerate for the main characteristics of non-life insurance operation and has a more suitable description to realistic insurance business. Based on the modern risk model, a more realistic situation with multiple types of insurance and aggregate risk is studied. Asymptotically equivalent estimations for ruin probability are derived when the claim sizes from different insurance types have regular-tailed distributions. It can be found that, under the conditions of multiple insurance-types with large claims, the extreme claim risk faced by the company will be determined inherently by those insurance types with the heaviest tail of claim size distributions, while the effects of other insurance types which have not too heavy distributed tails are vanished. The effectiveness of results is remarkably verified by a MATLAB numerical simulation. This work is a valuable promotion for insurance risk model study. It provides a convictive evidence for risk management and initial capital setting of practical insurance businesses with multiple insurance types.

**Key words:** modern risk model; multiple insurance types; ruin probability; asymptotical equivalence; regular-tailed distribution; numerical simulation