

文章编号: 1003-207(2014)11-0011-08

# 基于复杂网络的金融传染风险模型研究

邓超<sup>1</sup>, 陈学军<sup>1,2</sup>

(1. 中南大学商学院, 湖南长沙 410083; 2. 中国人民银行郑州培训学院, 河南郑州 450011)

**摘要:**随着金融创新向更广和更深层面发展, 金融体系中的传染风险和系统性风险越来越大, 对此类风险进行准确度量是有效宏观审慎管理的重要内容。本文基于复杂网络理论, 采用模拟方法对金融传染风险模型进行系统研究。首先, 借鉴复杂网络的 Watts 级联动力学理论, 构建了基于随机网络的金融传染模型, 其较大的网络连通度水平不仅为传染提供更多的传播渠道, 而且抵消了风险共享的能力。其次, 引入 Gleeson 和 Cahalane (2007) 的分析框架, 探讨了计算预期违约银行节点规模的解析模型, 并对 Watts 模型中各种参数对系统风险的影响效应进行测度。最终, 形成一个包括网络模拟方法、模型解析结论, 以及网络统计分析方法等较全面的计算算法工具集合。

**关键词:** 传染风险; 级联动力学; 复杂网络; 金融网络; 随机图论; 连通度

**中图分类号:** F830.9; F832.5 **文献标识码:** A

## 1 引言

随着金融创新向更广和更深层面发展, 金融机构之间的相互关联性越来越复杂, 金融体系中的传染风险和系统性风险也越来越大。一方面, 复杂的金融网络体系增强了危机冲击的吸收和风险分担能力, 另一方面, 风险分担也有可能演变为风险传播和传染。因此, 本文拟应用复杂网络理论从新的视角来探讨金融传染风险模型问题。

本文将 Watts<sup>[1]</sup> 的传染病/信息扩散和逾渗<sup>[2]</sup> 等标准理论运用到金融体系环境, 构建金融传染风险的网络模型分析框架, 并基于 Newman<sup>[3,4]</sup> 随机图网络演化机制基础模型, 描述复杂金融网络中一个或多个机构遭受异质性冲击后, 传染现象的特性及其规模。依照 Watts 模型理论, 一个银行节点是否被传染完全依赖于其邻居节点中失败节点数量占比, 那些原本是风险分担的邻居银行节点违约就决定了传染风险动力传播机制。为了回避 Watts 模型在数学计算方法上的缺陷, 本文引入 Gleeson 和 Cahalane<sup>[5]</sup> 学术结论, 经由数值解析模型推导, 对银行间网络传染现象和传播机制进行分析和解释更为

简洁清晰。所以, 采用复杂网络动力学模型的研究方法, 其优势在于不仅能够涵盖更为广泛的网络结构和任意数量金融机构网络节点。尤其在缺少银行间完善的实际数据信息情形下, 随机网络模型也许更能捕获银行间的风险敞口状况。

在本文的金融网络模型中, 金融机构主要以银行为研究对象, 银行节点之间存在有向连接, 节点的入度和出度分别表示银行资产负债表中资产方和负债方, 银行间复杂和巨大的债务-债权关系用网络连通度刻画。银行节点之间连接敞口多元化, 一方面有利于风险分担, 另一方面也提供了更多的违约银行传播渠道, 增加了传染风险概率和系统失败规模。

本文依从 Upper<sup>[6]</sup> 所描述顺序违约算法进行模拟传染风险分析。当一个机构违约, 该违约机构敞口不能偿付部分(外生性偿还率)需要其债权人消耗资本吸收, 如果这些债权机构没有足够资本支撑其损失, 那么这些债权机构自身也就出现违约。遵从以上传染机制的文献还包括: Nier 等<sup>[7]</sup> 运用经典随机图论构建了银行体系的网络模型, 其研究发现: 如果网络内的银行资本充足率水平较高, 那么该银行体系就对传染性违约更具恢复力; 银行间负债规模扩大有可能使得连锁违约风险增加; 并且集中度更高的银行体系存在更大系统风险的倾向性表现。Gai 和 Kapadia<sup>[8]</sup> 重点检验了服从独立同分布有向连接的随机银行网络结构下遭受意外冲击的效应。认为金融体系的高度联通性减少了传染的概率。但

收稿日期: 2012-11-30; 修订日期: 2013-07-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71173241); 教育部新世纪人才基金资助项目(NCET-10-0830)

作者简介: 邓超(1965-), 男(汉族), 湖南涟源人, 中南大学商学院教授, 博士生导师, 研究方向: 银行管理、金融工程。

由于机构关联度高,受到反复冲击影响可能性增加,一旦发生传染,后果会更加严重。Stiglitz<sup>[9]</sup>也运用同样网络分析方法,研究了连通度对金融机构失去偿付力在规则网络中传播的影响。

本文的金融网络模型存在银行间连接随机机构成、外生性和静态的假设等前提,且银行违约的传播都是建立在资产负债表与银行间连接不再变化的情形之上,可能导致传染模型表现相对刻板的特征,但这样一种研究框架仍为传染风险分析提供了一种有用而灵活的基础机制。

## 2 基于 Watts 模型的银行网络

### 2.1 Watts 的网络级联模型

Watts 网络级联模型需要解决以下几方面问题: (1)基于一个既定拓补结构的网络,整个网络出现全局级联的概率是多少; (2)一旦级联发生,如何追踪级联影响的程度和规模; (3)网络属性对于级联发生结果的作用如何; (4)级联传播机制如何影响最终结果; (5)初始选择一个失败银行节点或多个脆弱节点,结果将如何演变等。

构造具有  $N$  个节点的随机网络,网络中每个节点连接到其  $k$  个邻居节点的概率为  $p_k$ , 平均邻居节点数量即网络平均度为  $\langle k \rangle = z$ 。在 Watts 的模型中,如果一个节点的邻居中为脆弱性节点的比率等于或大于给定阈值  $\varphi$ , 那么该顶点变化为脆弱性节点。为了建立级联的动力模型,每个节点对应的阈值  $\varphi$  服从随机分布  $f(\varphi)$ , 假设在任意一个  $z < \ln N$  ( $c$  为常数) 的巨大随机网络中,初始网络所有节点状态为 0, 在  $t = 0$  时点只有非常少比例  $\rho_0 \ll 1$  的节点会改变为脆弱节点。若满足级联发生条件,一个度为  $k$  的节点成为脆弱节点的概率为:

$$\rho_k = p[\varphi \leq 1/k] \tag{1}$$

为了证明公式(1)的成立,对于任意随机网络,  $\rho_k(t)$  表示  $t$  时刻时度为  $k$  的节点变为脆弱节点的变化率,利用平均场<sup>[10]</sup>的方法可得:

$$\frac{\partial \rho_k(t)}{\partial t} = -\rho_k(t) + \varphi k \rho_k(t) [1 - \rho_k(t)]$$

当整个银行随机网络处于稳态时候,变化率为 0,所以令上式右端为 0,即:

$$-\rho_k(t) + \varphi k \rho_k(t) [1 - \rho_k(t)] = 0$$

$$\text{将其化简后为 } \rho_k(t) [1 - \varphi k + \varphi k \rho_k(t)] = 0$$

$$\text{进一步变形为: } \rho_k(t) \left[ \rho_k(t) - \frac{\varphi - 1/k}{\varphi} \right] = 0;$$

$$\text{当 } \varphi < 1/k \text{ 时, } \rho_k(t) = 0; \text{ 当 } \varphi \geq 1/k, \rho_k(t) =$$

$\frac{\varphi - 1/k}{\varphi}$ ; 所以,  $\varphi = 1/k$  即为传染阈值临界值,且公式(1)得证。

因此,随机选择一个节点度为  $k$  脆弱性节点的概率为:  $\rho_k p_k$ 。只要这样的节点联接到网络中一个逾渗聚类,级联就会传播蔓延。故而全局级联发生的条件为:脆弱节点的子网络必须在整个网络形成渗流,一个巨大连通的聚类<sup>[11]</sup> (giant connected cluster)在整个网络中占据相对大的比率。

至此,我们可以将网络中的一个复杂动力学问题转化为一个静态的渗流问题,从而采用生成函数方法求解级联传染的最终规模。

### 2.2 银行网络模型

第一步,生成具有  $N$  个银行节点和代表银行间头寸的有向边的网络基础架构。在银行网络体系中,随机选择具有  $j$  个债务人和  $k$  个债权人的银行的概率为  $p_{jk}$ 。网络的随机特性意味着任意两个银行之间的连接遵循预先定义的概率,每个银行的连通度或者度不仅可以确定而且是随机的。在本文分析框架中,银行间连接网络的形成具有外生性。

第二步,网络模型中每个银行节点被赋予一个资产负债表,并依据其入度  $j$  和出度  $k$  来量化资产负债表。

假定初始状态下,银行节点初始状态的净值  $c_{jk}$  与银行总资产关系为:  $c_{jk} = \gamma a_{jk}$ , 其中  $\gamma$  为一个比例常数。令一个  $(j, k)$  类型银行总资产为一个单位即  $a_{jk} = 1$ , 则银行的净值为  $c_{jk} = \gamma a_{jk} = \gamma$ 。依照 Upper<sup>[6]</sup>的研究,外部资产为  $e_{jk} = 0.8$ , 银行间资产占比 20%。所有  $(j, k)$  类节点的入边表示银行向其债务人给予同等规模的贷款,每笔贷款承受相同规模的损失冲击为  $0.2/j$ 。

### 2.3 违约阈值与传染机制

首先定义一个阈值  $T_{jk}^n$  以表示,即在下一时点  $n + 1$  不出现违约的状况下,一个  $(j, k)$  类银行在时点  $n$  所能接受的最大金融压力水平。假定处于困境贷款笔数为  $m$ , 如果一个  $(j, k)$  类银行有  $m$  个违约债务人,且  $m > T_{jk}^n$ , 那么可称该银行为“脆弱银行节点”,该银行将在接下来的时点出现违约,否则其仍旧有偿付力,即为安全银行节点。

其次假定违约银行的贷款偿还时间超出体系中传染传播的时间,因受时间约束,违约银行不具备偿还其未偿付银行间债务的条件,即可设短期偿还率为零。如果在时点  $n$ , 多个银行违约,那么这些违约银行的债权银行就在时点  $n + 1$  遭受多个冲击。 $(j,$

$k$ ) 类债权银行遭受冲击损失为  $0.2m/j$ 。这样的冲击传播过程直至持续到没有新的违约出现, 违约传染终止。

假定所有传染都是通过入度连接边  $j$  传播, 若不考虑外部资产  $e_{jk}$  流动性风险因素, 那么一个有  $m$  个违约债务人的  $(j, k)$  类银行遭受的冲击损失超过其净值, 即为:

$$0.2m/j > \gamma \quad (2)$$

则有  $T_{jk}^n = [5j\gamma_{jk}]$ 。

### 3 Watts 模型分析银行网络传染

为了将 Watts 模型引入对银行间网络传染的分析, 须说明银行网络模型中每个银行节点的净值  $\gamma_{jk}$  与 Watts 模型中的阈值  $\varphi_i$  之间的对应关系。根据不等式(2)可知, 若令  $m=1$ , 则为  $0.2/j > \gamma$ , 即为:  $1/j > \gamma/0.2$ ; 另根据等式(1)可知 Watts 模型中的阈值  $\varphi_i$  与度的关系为:  $\varphi \leq 1/k$ , 即为脆弱节点。Watts 模型中度  $k$  描述为无向特性, 等价于入度  $j$ 。故而 Watts 模型中的阈值  $\varphi_i$  与银行节点净值  $\gamma_{jk}$  之间的对应关系为:

$$\varphi_i = \gamma/0.2 \quad (3)$$

例如, 当银行间网络模型中所有银行节点的净值  $\gamma = 5\%$  时, 对应阈值  $\varphi_i = 0.25$ ; 若设定银行净值水平范围为  $\gamma = [0.01, 0.1]$ , 则对应阈值范围  $\varphi_i = [0.05, 0.5]$ 。显然从不等式(2)可以得到, 当银行间网络所有银行节点具有统一不变的净值  $\gamma$  时, 一个银行的脆弱性完全取决于该银行节点入度  $j$ , 银行间网络传染的程度也取决于网络结构和不同度分布特征属性。另外, 不等式(2)是对 Watts 阈值模型的扩展, 即初始违约从单一银行违约扩展到多家银行违约的情形。后一种情形在下一节内容予以的讨论。

#### 3.1 Watts 级联模型与银行网络传染的数值模拟

正如 Watts 模型所表述的那样, 一家银行加入到级联过程的决定, 主要依赖于它的最近邻居节点的状态。因此为每个节点安排一个阈值  $\varphi_i$ , 并服从概率分布  $f(\varphi)$ , 就好像不同银行的金融状况。每个节点的状态是可以时间函数表示的二元变量  $v_i(t) \in \{0, 1\}$ ,  $v_i(t) = 1$  意味着加入到级联中, 成为脆弱节点或银行违约;  $v_i(t) = 0$  则表示仍为独立正常状态。随机选择一个节点, 如果其最近邻居节点中脆弱节点所占比率小于阈值  $\varphi_i$ , 该节点属正常状态, 即  $v_i(t) = 0$ ; 如果该比率超过阈值, 则该节点也自动加入级联中成为脆弱节点  $v_i(t) = 1$ 。在一个

银行随机网络的子集中, 可以利用网络邻接矩阵  $a_{ij}$  表示这些银行并模拟违约传染的传播过程:

1) 为每个节点依照标准分布  $f(\varphi_i)$  给定一个阈值  $\varphi_i$ ;

2) 初始所有节点都为正常状态 ( $v_i(0) = 0, \forall i$ ), 可以人为随机选择一个的极少量  $\rho_0$  的脆弱节点作为种子节点, 并触发级联动力的发生;

3) 依据以下决策规则, 更新每个节点的状态  $v_i(t)$ :

$$v_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } \frac{1}{k_i} \sum_j a_{ij} v_j(t) > \varphi_i \\ \text{否则, 无变化} \end{cases} \quad (4)$$

4) 重复步骤 3) 直到不再有状态变更。

显然, 最终网络中成为脆弱节点的密度(级联规模)等于  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i(t)$ 。因此可以计算得到一个预期级联规模, 记作  $\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i(t)$ 。

#### 3.1.1 仿真测试: 计算预期银行违约规模

首先, 我们编程生成以 Erdos-Renyi 随机网络作为银行网络的机制模型, 其节点规模可视作为银行资产数量, 边的密度表示银行间相互借贷的数量, 假定网络中每个银行的资产负债数量相同。图 1 显示了一个包含 100 个银行节点, 边连接概率为 0.02 的网络。

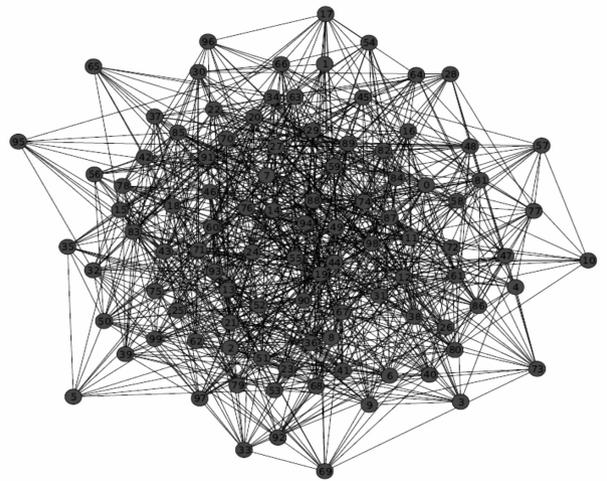


图 1 银行间节点网络视图

其次, 以该网络为基础编程实现以上 Watts 级联动力模型的 1) 到 4) 流程, 通过数值模拟预期级联规模, 结论显示  $\varphi_i - \rho$  之间的关系如图 2。

从图 2 中 Watts 模型的预期级联规模变化趋势发现, 当网络平均度  $z$  为固定值 2 时, 随机选择一个

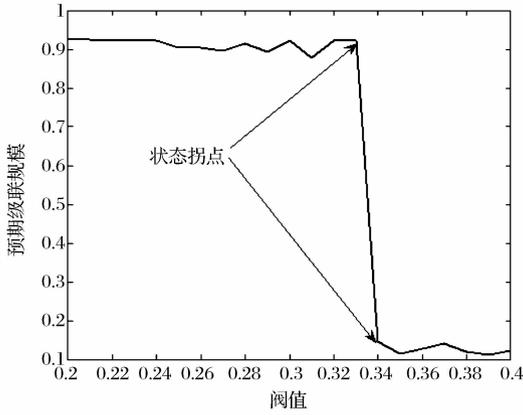


图2 Watts 模型的预期级联规模变化趋势

银行网络节点作为违约冲击来源,即初始级联规模  $\rho_0$  为 0.01。当每个银行净值水平  $\gamma$  从 4% 不断变化到 6.8% ( $\varphi_i$  增加至 0.34) 附近以前,所计算的预期违约银行的规模一直处在一个较大值状态,而当银行净值水平超过 6.8%,随后陡然跌至很小违约规模拐点值。因此,直觉来看,银行网络是否出现大规模级联或全局级联,一定存在一个条件边界。

### 3.2 产生大规模违约传染的条件

银行网络是否出现大规模违约传染,须依据复杂网络理论考察网络中是否存在一个巨大的脆弱节点聚类,巨大脆弱聚类的相关规模可以视作系统性失败的影响范围。我们引入 Newman 生成函数方法推导出<sup>[3]</sup>。

在网络中,一个度为  $k$  的脆弱银行节点,其度分布  $p_k$  的概率生成函数为:

$$G_0(x) = \sum_k \rho_k p_k x^k$$

其中,复数变量  $x \in [0,1]$ ,  $\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ F(1/k) & k > 0 \end{cases}$ , 并且累积分布为  $F(\varphi) = \int_{\varphi=0}^{\varphi} f(\varphi) d\varphi$ 。所以  $G_0(x)$  生成了包含所有脆弱银行节点的度分布和阈值分布的信息。进而可推导出脆弱节点平均度  $z$  的生成函数为:

$$z = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \frac{\partial G_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = G_0'(1)$$

最终得到巨大脆弱聚类的发生条件方程:

$$G_0''(1) = \sum_k k(k-1) \rho_k p_k = z \tag{5}$$

其中,  $z$  为脆弱节点平均度,表示一阶邻接点的平均数目。

Watts 模型在 Erdos-Renyi 网络上的数值模拟和理论计算也证实这个预测。根据级联条件等式(5)可以得到 Watts 阈值模型的级联窗口区域,即

如图 3 所示实线与 Y 轴的  $(\varphi, z)$  封闭区域。正如理论描述所言,图中  $z = 1$  为触发全局级联的最低边界。而图中点画线  $z = 2$  和箭头所指阈值  $\varphi_i = 0.34$  的交点,在理论上印证了上述图 2 的数值模拟的拐点。

在级联窗口的图形中可以直观看到,起初随着网络平均度  $z$  值的不断增加,脆弱聚类规模不断增加,风险传播效应增强,传染概率增加;但最终级联区域迅速减少,风险分担效应使得脆弱银行数量减少,发生系统传染的概率降低。

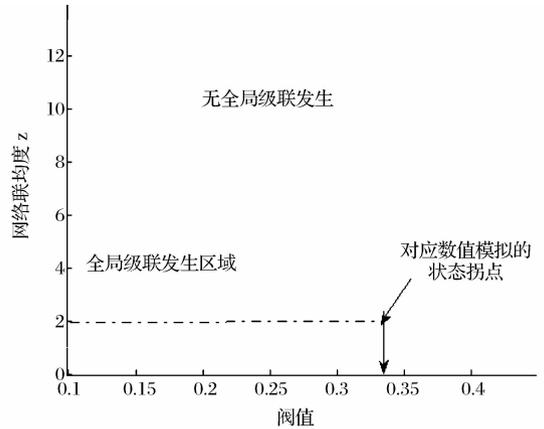


图3 阈值模型的级联条件边界区域

## 4 解析法计算预期级联规模

虽然 Watts 针对不同度和阈值分布情况,得到了许多网络级联规模和频率的重要数值结论。但 Watts 模型在数学计算方法上不易于实现,尤其是缺少完善的预测预期级联规模  $\rho$  的方法。因此,为了证实生成函数产生的结论,须将随机图按照图形模型生成树形拓扑结构的网络。本节将从单一银行节点作为违约冲击来源,扩展到初始随机冲击由多个违约银行节点构成的情形,逻辑方法采用 Gleeson 等<sup>[12]</sup>提出的基于树形结构的级联分析方法,推导出计算预期违约银行节点规模的解析方程。

### 4.1 预期违约银行规模的解析公式

基本思路如下,随机选择节点 A 作为树的根节点,目标是经若干时间步后,计算节点 A 成为脆弱节点的概率  $\rho$ 。与 Watts 模型规定初始为单一脆弱节点略有不同,在此设定初始为很小占比  $\rho_0$  的脆弱节点种子集合。

情形一,初始  $t = 0$ , A 节点状态属于两种情况:要么属于脆弱节点种子集合,概率为  $\rho_0$ ;要么属于有偿付力的安全银行节点存在于  $(1 - \rho_0)$  部分节点

中;

情形二,在时点  $t = 1$  时,对于  $(1 - \rho_0)$  部分安全节点而言,如果 A 节点与脆弱节点种子存在直接邻居关系,正是需要考察的对象。若该节点中邻居节点中有  $m$  个脆弱节点超过临界值  $T_{jk}^n = [5j\gamma_{jk}]$ ,则该节点更新为脆弱节点;

情形三,在时点  $t = 2$  时,如果 A 节点邻居的邻居节点与脆弱节点种子存在直接邻居关系,并且这个子孩子节点中邻居节点中有  $m$  个脆弱节点超过临界值  $T_{jk}^n = [5j\gamma_{jk}]$ ,则该孩子节点更新为脆弱节点;

情形四,推广至时点  $t = n$  时,在  $t = 0$  时点引发的节点更新,最终会经过  $n$  个时点传染到节点 A。

定义  $q_{jk}^n(m)$  作为一个银行节点满足:在时点  $n$  具有偿付力;且其  $j$  个子节点中有  $m$  笔困境贷款资产(源于上一个时点其债务人的违约)的条件概率。其中,若一节点  $j$  个子节点中有  $m$  笔困境贷款资产超过临界值:  $T_{jk}^n = [5j\gamma_{jk}]$ ,则该节点成为脆弱节点的概率为  $F(\frac{m}{j} - \gamma)$ 。因此,在时点  $n$  具有偿付力

银行所承受的困境贷款资产总占比为:  $\sum_{m=0}^j q_{jk}^n(m) = 1 - \rho_{jk}^n$ , 其中  $\rho_{jk}^n$  定义为在时点  $n$  违约的  $(j, k)$  类银行占比。

接下来要考察银行从时点  $n$  到  $n + 1$  的状态是如何改变的。从初始时刻  $t = 0$  开始,令  $\rho_{jk}^0 = \rho^0$ 。根据情形二,得到在  $t = 0$  时点,一个入度为  $j$  的节点中有  $m$  个邻居属于脆弱节点种子的概率服从二项分布:  $\binom{j}{m} \rho_0^m (1 - \rho_0)^{j-m}$ 。

因此,在情形二时点  $t = 1$  时,预期违约银行节点规模为:

$$\rho_{jk}^1 = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{m=1}^j \binom{j}{m} \rho_0^m (1 - \rho_0)^{j-m} F\left(\frac{m}{j} - \gamma\right)$$

称该过程为“节点更新”。若  $(j, k)$  类银行有  $m$  笔困境贷款并且在时点  $n$  满足条件  $0.2m/j > \gamma$ , 那么这些银行违约,并且都是那些以前具有偿付力的银行。然而每一个新违约银行又成为体系中其他  $k$  个银行的债务人,相应地也就触发了  $k$  个新的困境资产,这就是时点  $n$  和时点  $n + 1$  之间的“边更新”,记为  $q_{jk}^n(m)$ 。

从  $q_{jk}^n(m)$  的定义可知,须求得节点在较低层中的  $j$  个子节点中至少有  $m$  个为脆弱节点的概率,即  $\binom{j}{m} q_{jk}^n (1 - q_{jk}^n)^{j-m}$ 。又因为在初始阶段  $t = 0$ , 一定

有  $\rho^0 = q^0$ , 按照  $t = 1$  情况的处理逻辑,在时点  $t = n + 1$  时,违约银行预期规模为:

$$\rho_{jk}^{n+1} = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{jk} p_k \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} q_n^m (1 - q_n)^{j-m} F\left(\frac{m}{j} - \gamma\right) \quad (6)$$

从公式(6)中可以发现,为求得预期违约银行节点规模  $\rho_{jk}^{n+1}$ , 需要先求出  $q_n$ 。

从“边更新”描述可知,从该节点的父节点随机选择一条边,沿该边可以到达一个度为  $k$  的子节点的概率为  $(k/z)p_k$ 。或者说,被选择节点有  $k$  个邻居:其中一个处在第  $n + 2$  层的邻居为该选择节点的父节点,剩下的  $k - 1$  个子节点处在第  $n$  层。因此有结论:在  $t = n + 1$  时点,困境贷款的规模表达式为:

$$q^{n+1} = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{jk} \frac{k p_k}{z} \sum_{m=0}^{j-1} \binom{j-1}{m} q_n^m (1 - q_n)^{j-1-m} F\left(\frac{m}{j} - \gamma\right) \quad (7)$$

其中  $q^n$  为一个银行节点在时点  $n$  违约的概率,且在时点  $n + 1$ , 该节点邻居银行节点尚未违约,因初始条件为  $\rho^0 = q^0$ 。等式(7)的另外一种表达式为:

$$q^{n+1} = \rho_0 + (1 - \rho_0) G(q_n), \quad \rho^0 = q^0 \quad (8)$$

其中,非线性方程:

$$G(q_n) = \sum_{jk} \frac{k p_k}{z} \sum_{m=0}^{j-1} \binom{j-1}{m} q_n^m (1 - q_n)^{j-1-m} F\left(\frac{m}{j} - \gamma\right) \quad (9)$$

通过求迭代方程(8)的稳定状态解  $q_\infty$ , 即一个处于树的倒数第二层节点成为脆弱节点的概率。一旦  $q_\infty$  被找到,就可以用来计算根节点 A 自身成为脆弱节点的概率,这个概率值完全对应最后处于稳态时的脆弱节点密度和预期违约银行节点规模,其等式如下表示:

$$\rho = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{jk} p_k \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} q_\infty^m (1 - q_\infty)^{j-m} F\left(\frac{m}{j} - \gamma\right) \quad (10)$$

从理论上分析,按照树的层级更新,只要保证网络结构的局部类似树形结构和每个节点最多更新一次的条件,结论仍然适用于随机图的 Watts 模型。

最终,当  $t \rightarrow \infty$  时,解方程(8)和(10)可以确定银行网络中违约节点的预期规模。

#### 4.2 求解不动点

首先重写迭代方程(10),令  $q_{n+1} = g(q_n)$ , 对  $n \rightarrow \infty$ , 必定有  $q_{n+1} = q_n$ , 令  $q_\infty = x$ , 有:

$$x = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{z} p_{jk} \sum_{m=0}^{j-1} \binom{j-1}{m} x^m (1 - x)$$

$$j - 1 - mF(m, j) \equiv g(x) \tag{11}$$

为了计算方便,在此引入辅助系数<sup>[4]</sup>:

$$C_\ell = \sum_{j=\gamma+1}^{\infty} \frac{j}{z} p_j (-1)^\ell (j-1) \sum_{m=0}^{\ell} (-1)^m \binom{\ell}{m} F(m, j)$$

因此,  $g(x) = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell x^\ell$

因  $F(m, j)$  为阈值累积分布函数,如果对于统一阈值  $\gamma$  服从高斯分布和标准方差  $\sigma$ , 则  $F(m, j)$  的累积分布方程:

$$F(m, j) = 1/2[1 + \operatorname{erf}(\frac{m/j - \gamma}{\sigma \sqrt{2}})], \text{ 其中}$$

$\operatorname{erf}(x)$  是误差函数。

已知存在  $y = x$  和  $y = g(x)$  两条曲线,  $q_\infty$  的稳态解一定出现在这两条曲线最靠近坐标原点与对角线交点处,即迭代方程(8)的不动点。显然,初始选择的脆弱种子  $\rho_0$  决定了  $y = g(x)$  曲线在  $x = 0$  附近的形状,并因此影响到将要第一次与对角线相交叉的位置。

#### 4.2.1 仿真测试:发现不动点

为了便于计算,考虑选择完全连接的拓扑结构为银行网络的演化机制模型。在完全网络中所有节点都有相同的邻居节点,则脆弱节点占比为  $\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i(t)$ 。依据 Watts 更新规则,因为初始脆弱节点  $\rho_0$  在时点  $n + 1$  之后仍旧为脆弱节点,只有  $(1 - \rho_0)$  占比部分节点将在未来的时点内需要更新。所以在完全网络结构中,在时点  $n + 1$  总的脆弱节点规模应该为:

$$\rho_{n+1} = \rho_0 + (1 - \rho_0)F(\rho_n)$$

上述方程显示从初始条件  $\rho_0$  到最终极限值  $\rho_\infty$  的增长变化是一个非线性映射。在同一坐标系内描绘出  $y_r = \rho_0 + (1 - \rho_0)F(\rho)$  和  $y_l = \rho$  两条曲线,如果这两条曲线在最接近坐标原点处存在交叉点,那么最终脆弱规模  $\rho_\infty$  极限值存在,即为方程映射的不动点。

当  $\rho_0 = 0.01$  固定不变,描绘两条曲线的统一阈值分别为 0.3(银行净值为 6%)和 0.4(银行净值为 8%)服从高斯分布,且标准方差均为  $\sigma = 0.2$ 。如图 4 所示,阈值为 0.3 时,虚线曲线只是在最远端与直线相交,计算得  $\rho_\infty \approx 0.9998$ , 预期银行违约节点规模高达 99.98%, 说明出现系统性风险。当阈值为 0.4 时,实线曲线与直线出现三个交点,计算得  $\rho_\infty \approx 0.0494$ , 预期银行违约节点规模为 4.94%, 没有出现全局级联。显然,最终预期违约银行规模  $\rho_\infty$  依

赖于网络银行节点统一净值  $\gamma$  水平的变化,并存在发生状态变化的一个临界点阈值。

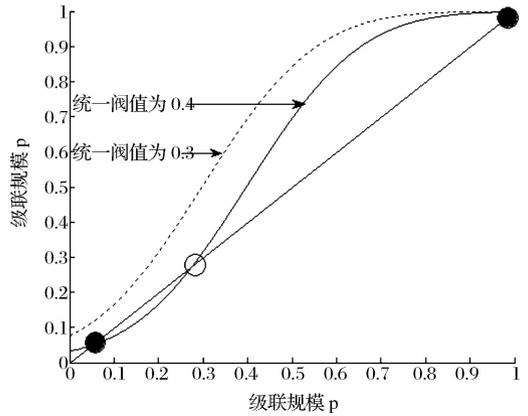


图 4 银行净值分别为 6% 和 8% 的不动点情形

#### 4.3 最终违约传染规模与传染发生概率

在 Watts 模型中,单一种子触发效应的量化都是以脆弱聚类  $S_v$  表示。如果节点的一个邻居成为脆弱节点,也即这些银行节点只要有一笔贷款违约,那么脆弱聚类中所有节点也都将成为脆弱节点。当满足级联条件等式(5)时,在整个银行间网络中一定存在一个包含大部分脆弱银行节点的聚类,该聚类被称作脆弱聚类  $S_v$ 。此时,整个聚类内所有银行节点出现违约。同时也因为脆弱聚类内违约银行比率增大,而处于脆弱聚类外面的银行节点也将出现违约。至此,整个银行间网络出现全局级联,其预期违约规模可以由公式(10)计算得到。所以,当银行节点的统一净值  $\gamma$  固定不变时候,发生全局传染的概率是与窗口内脆弱聚类的规模  $S_v$  直接关联,可以用脆弱聚类规模近似表示全局级联发生的概率。通过解座逾渗问题得到脆弱聚类规模的计算公式如下:

$$S_v = \sum_{jk} p_{jk} [1 - (1 - q_\infty)^j] F(1, j) \tag{12}$$

其中  $q_\infty$  为方程  $q_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{z} p_{jk} [1 - (1 - q_n)^{j-1}] F(1, j)$  的稳态解。

##### 4.3.1 仿真测试:全局级联规模及其发生概率

当  $\rho_0 = 0.01$ , 银行统一净值  $\gamma = 4\%$  时,最终全局传染规模的解析结果由方程(10)计算可得,即为图 5 中最上端实线;发生全局传染概率由方程(12)直接计算可得,图中中间点画线曲线;由前文内容可知,传染只能发生在网络平均度为  $z$  的窗口区间内,见图 5 中点画线垂线对应于银行统一净值  $\gamma = 4\%$  时的窗口区间值。当平均度介于 2.5 与 3.5 之间,即银行间网络连通度处于低水平时,处于巨大脆弱

聚类中的任意一个银行节点遭受异质性冲击,都极易引发全局性传染,其传染概率的峰值接近 80%。而当平均度  $z$  处于较大水平时,一旦传染爆发,整个银行网络陷入系统性风险。从图 5 可以观察到,当  $z > 7$ , 全局性传染发生概率极小。

此外,在图 5 中还列举了银行间统一净值  $\gamma = 4\%$  和  $\gamma = 5\%$  两种效果。与金融风险监管理论一致,当银行净值水平提高到 5% 时候,传染窗口  $z$  缩小至:1 到 5 之间,传染概率峰值也降低到 60% 左右。

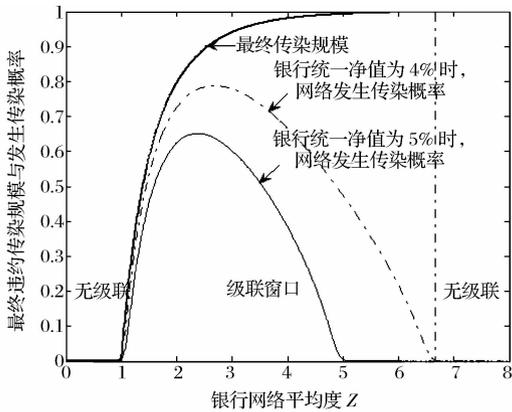


图 5 银行网络的连通度、传染规模及传染发生率

因此,银行网络的连通度水平  $z$  与传染概率之间的关系体现在两个方面:一是使得传染通过更多银行间的连接渠道传播到其他邻居银行节点,另一方面出现的违约风险将由更多银行节点分担。当系统内银行间连接程度较高,系统表现出了既稳健又脆弱的特性,虽然传染概率降低了,但是一旦传染爆发,整个银行网络出现系统风险,提高银行的净值水平能够有效降低传染概率。

## 5 结语

首先,Watts 模型较好地解释了当银行网络中一个银行节点遭受外部性冲击时,整个系统是否会陷入全面级联或系统性风险的传染问题,通过设定统一的银行净值的阈值水平,考察代表银行资产状况的银行间连接入度,判断银行节点是否违约,利用生成函数推导出网络中巨大脆弱聚类规模以及出现全局级联状态变化的条件方程,结合随机网络结构化模型对银行间网络的连通度  $z$  与全局传染效应的状态转变之间是否存在一个临界值,以及预期违约银行规模等关键指标进行数值模拟。Watts 模型政策意义在于,银行间的连通度既是一个冲击吸收器

也是一个冲击放大器,银行节点的入度水平低,表明风险多元化程度低,此类银行节点成为冲击传播传导的几率就高;而当银行网络的连通度比较高,一旦传染爆发,整个银行网络将陷入系统性风险。

为了克服 Watts 模型在数学算法上的操作性缺陷,本文引入了 Gleeson 等提出的基于树形结构的级联分析方法,将 Watts 模型的初始冲击单一种子随机选择的假设,放松到有向随机网络的多个银行网络节点失败的初始冲击条件,探讨了解析建模方法,并推导出与 Watts 模型相对应的数学解析公式,能够快速和精确测度模型中许多不同参数变化对系统风险影响的效果。

尽管本文提出了一个简洁分析银行间网络传染效应的基本模型框架,但研究中仍存在不足。如整个模型的构建都是基于相对静态的方法,对于资产负债表处于随机选择的情形下如何确定级联条件,本文并没有涉及相关研究。此外,模型中关于银行间偿付率为零的强制性假设,局限了传染机制研究,同时也没有包括流动性失败和资产抛售等更容易放大系统风险的情形。

## 参考文献:

- [1] Watts D J. A simple model of global cascades on random networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2002, 99 (9): 5766—5771.
- [2] Callaway D, Newman M, Strogatz S, et al. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs [J]. Physical Review Letters, 2000, 85 (25): 5468—5471.
- [3] Newman M E J. Random graphs as models of networks [M]// Bornholdt S, Schuster H G. Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet. New York: John Wiley, 2002
- [4] Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications[J]. Physical Review, 2001, 6402 (2): 026118.
- [5] Gleeson J P, Cahalane D J. Seed size strongly affects cascades on random networks[J]. Physical Review E, 2007, 75: 056103.
- [6] Upper C. Simulation methods to assess the danger of contagion in interbank markets[J]. Journal of Financial Stability, 2011, 7(3): 111—125.
- [7] Nier E, Yang Jing, Yorulmazer T, et al. Network models and financial stability[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2007, 31(6): 2033—2060.

- [8] Gai P, Kapadia S. Contagion in financial networks[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2010; rspa 20090410.
- [9] Stiglitz J. Risk and global economic architecture: Why full financial integration may be undesirable[R]. NBER Working Paper, 2010.
- [10] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14): 3200.
- [11] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393: 440—442.
- [12] Gleeson J P, Hurd T R, Melnik S, et al. Systemic risk in banking networks without Monte Carlo simulation [M]// Kranakis E. Advances in network analysis and its applications. New York: Springer Verlag, 2011.

## To Study the Model of Financial Contagion Risk Base on Complex Networks

DENG Chao<sup>1</sup>, CHEN Xue-jun<sup>1,2</sup>

(1. Business School of Central South University, Changsha 410083, China;

2. Zhengzhou Training Institute, The People's Bank of China, Zhengzhou 450011, China)

**Abstract:** The failing bank can lead to the potential collapse of the whole financial system, sophisticated financial instruments based on the assumption of stable equilibria in economic systems was seen as a major cause of the 2008 financial crisis. Contagion risk and the scale of systemic breakdown in the financial system are the key concern for effective macro prudential oversight. Recently these insights from the study of complex networks have been applied to the financial system.

Some simulation-based studies of financial contagion risk on the framework of complex networks models are mainly concerned in this paper. Banks are the nodes, inter-connected if financial flows and exposures exist among them. One of the key problems in this paper is that of understanding the role of the network structure in relation to the contagion effect.

We apply techniques from cascade dynamics on complex networks of Watts, which gives a degree distribution  $p_k$  and the average degree of the network  $\bar{k}$ . A bank is called vulnerable if their threshold  $\varphi$  is smaller than the inverse of their degree  $k$ , i. e.  $\varphi \leq 1/k$ , such that one infected neighbor suffices to attain the threshold. Starting from a small number of failed banks, the aim is to characterize the probability that failures propagate at the systemic level as a function of some relevant parameters, like the connectivity of the network and the net capital of banks. In numerical simulations, it can be found that while greater connectivity helps lower the probability of contagion, it can also increase its spread in the event of problems occurring. Greater connectivity does not only create more channels through which contagion can spread but also improves counteracting risk-sharing benefits.

Most importantly, the proposed methodology can be employed in many segments of the entire financial system, providing a useful tool in the hands of regulatory authorities in assessing more accurate estimates of systemic risk. It is investigated that how several new mathematical modeling approaches represented by the analytical framework of Gleeson may be applied. Overall goal will be to develop a comprehensive toolkit of computational algorithms that will include network simulation methods, analytic results for several models, plus statistical and graphical methods.

**Key words:** contagion risk; cascade dynamics; complex networks; financial networks; random graphs; connectivity