

文章编号: 1001-0920(2012)03-0473-04

## 带有初态学习的可变增益迭代学习控制

曹伟<sup>1,2</sup>, 丛望<sup>1</sup>, 李金<sup>1</sup>, 郭媛<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001; 2. 齐齐哈尔大学  
计算机与控制工程学院, 黑龙江 齐齐哈尔 161006)

**摘要:** 针对一类非线性系统提出一种新的学习控制算法, 该算法在可变学习增益的迭代学习控制律基础上, 增加了系统初态的迭代学习律. 利用算子理论证明了系统在存在初态偏移时经过迭代学习后, 其输出能够完全跟踪期望轨迹, 同时得到了该算法谱半径形式的收敛条件. 将该算法与传统迭代学习控制相比较可以看出, 前者的收敛速度得到了较大提高, 而且解决了可变学习增益迭代学习控制的初态偏移问题. 仿真结果验证了该算法的有效性.

**关键词:** 非线性系统; 迭代学习控制; 初态学习; 可变学习增益; 算子理论

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Iterative learning control of variable gain with initial state study

CAO Wei<sup>1,2</sup>, CONG Wang<sup>1</sup>, LI Jin<sup>1</sup>, GUO Yuan<sup>2</sup>

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China. Correspondent: CAO Wei, E-mail: yiyuqq@yahoo.cn)

**Abstract:** For a class of nonlinear systems, a new learning control algorithm is proposed, which increases iterative learning rule of initial state of system on the base of iterative learning control with variable learning gain. By using the operator theory, it is proved that the output of system can track the expected trajectory completely after the iterative learning of system with initial state disturbance, and the convergent condition for the spectral radius form of the algorithm is given. Compared with the traditional iterative learning control, the proposed algorithm not only significantly improves the convergent speed, but also solves the initial state disturbance problem of the iterative learning control with variable learning gain. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** nonlinear system; iterative learning control; state study; variable learning gain; operator theory

## 1 引言

在迭代学习控制理论研究中, 一般均假定被控对象每次运行时的初始状态精确地在期望轨迹上. 实际问题中, 被控系统在跟踪期望轨迹时, 由于动态过程未知, 其初始状态的期望轨迹也很难给出, 若使系统状态停留在期望轨迹上则更加困难<sup>[1]</sup>. 因此系统初始状态严格重复(迭代初态与期望初态一致, 这时称初态是严格重复的<sup>[2]</sup>)也是不可能实现的, 往往存在初态偏移问题, 导致系统的输出不能完全跟踪期望轨迹, 使相应结果的应用受到极大限制.

初始状态问题是迭代学习控制的重要问题之一, 许多文献对此也作了讨论<sup>[3-11]</sup>. 但上述文献均采用学习增益为常数不可调的学习算法, 且学习增益的选取

具有一定的盲目性, 因而收敛速度通常较慢. 虽然, 徐敏等人<sup>[12]</sup>提出了一种可变学习增益的迭代学习控制律, 与学习增益不变的迭代学习控制相比较, 前者的收敛速度得到了很大的提高, 但当系统存在初态偏移时, 实际输出不能完全跟踪期望轨迹. 鉴于此, 本文提出了一种带有初态学习的可变增益迭代学习控制算法, 即系统输入和初始状态同时采用可变增益迭代学习控制律. 利用算子理论证明了该算法的收敛性, 同时得到了该算法收敛的谱半径形式的充分条件. 该算法与传统的迭代学习控制相比较, 不仅其收敛速度得到较大的提高, 而且解决了可变学习增益迭代学习控制由于初态偏移造成的系统输出不能完全跟踪期望轨迹的问题.

收稿日期: 2010-10-13; 修回日期: 2011-01-17.

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(60672015); 黑龙江省教育厅支持项目(11541390).

作者简介: 曹伟(1977—), 男, 讲师, 博士生, 从事先进控制理论与应用的研究; 丛望(1958—), 男, 教授, 博士生导师, 从事电力系统非线性控制等研究.

## 2 问题描述

考虑具有重复运行性质的一类非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_k(t), \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $t \in [0, T]$ ;  $k$  为迭代次数;  $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_k(t) \in \mathbf{R}^r$ ,  $\mathbf{y}_k(t) \in \mathbf{R}^m$  分别为系统的状态、控制、输出向量;  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  为适当维数的向量或矩阵.

假设系统 (1) 在时间区间  $t \in [0, T]$  的任意时刻均满足以下假设条件.

**假设 1**  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  关于  $\mathbf{x}(t)$  满足 Lipschitz 条件, 即存在  $K_f > 0$ , 对于  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$ , 有  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2(t))\| \leq k_f \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|$ .

**假设 2** 期望轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$  在  $[0, T]$  上连续.

**假设 3** 在  $t \in [0, T]$  中,  $\mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  有界.

**假设 4** 系统动态特性是可逆的.

**注 1** 系统动态特性可逆是指确保存在唯一的理想控制  $\mathbf{u}_d(t)$  使得系统的状态和输出为期望值.

该系统每次迭代时的初始状态均不相同, 第  $k$  次迭代的初始状态为  $\mathbf{x}_k(0)$ , 则输出误差为

$$\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t).$$

输入采用可变增益的开环 D 型迭代学习控制律

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1}(t) = \\ \mathbf{u}_k(t) + \left( k_p \mathbf{e}_k(t) + k_d \dot{\mathbf{e}}_k(t) + k_i \int_0^t \mathbf{e}_k(\tau) d\tau \right) \dot{\mathbf{e}}_k(t). \end{aligned}$$

为了叙述方便, 定义

$$\mathbf{H}(t) = k_p \mathbf{e}_k(t) + k_d \dot{\mathbf{e}}_k(t) + k_i \int_0^t \mathbf{e}_k(\tau) d\tau,$$

则输入采用可变增益的开环 D 型迭代学习律改写为

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{H}(t)\dot{\mathbf{e}}_k(t); \quad (2a)$$

同时初始状态采用可变增益的迭代学习律

$$\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{x}_k(0) + \mathbf{B}(0)\mathbf{H}(0)\mathbf{e}_k(0). \quad (2b)$$

目前的问题是如果系统 (1) 满足假设 1~假设 4, 输入采用式 (2a) 的学习律, 初始状态采用式 (2b) 的学习律, 则在何种条件下, 系统在存在初态偏移时的实际输出能够严格跟踪期望轨迹.

## 3 收敛性分析

**引理 1**<sup>[13]</sup> 设  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{c}(t)$  和  $\mathbf{a}(t)$  是  $[0, T]$  上的实值连续函数, 且  $\mathbf{a}(t)$  在  $[0, T]$  上非负, 若

$$\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{c}(t) + \int_0^t \mathbf{a}(\tau)\mathbf{x}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

则有

$$\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{c}(t) + \int_0^t \mathbf{a}(\tau)\mathbf{c}(\tau)e^{\int_\tau^t \mathbf{a}(\sigma) d\sigma} d\tau, \quad t \in [0, T].$$

**引理 2**<sup>[1]</sup> 设常数序列  $\{b_k\}_{k \geq 0} (b_k \geq 0)$  收敛到零算子  $\mathbf{Q} : \mathbf{C}_r[0, T] \rightarrow \mathbf{C}_r[0, T]$ , 并满足

$$\|\mathbf{Q}_k(\mathbf{u})(t)\| \leq M \left( b_k + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\| ds \right).$$

其中:  $M \geq 1$  为常数,  $\mathbf{C}_r[0, T]$  的  $r$  维向量取最大值范数. 设  $\mathbf{P}(t)$  为  $r \times r$  维连续函数矩阵,  $\mathbf{P} : \mathbf{C}_r[0, T] \rightarrow \mathbf{C}_r[0, T]$  为  $\mathbf{P}(\mathbf{u})(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t)$ , 若  $\mathbf{P}$  的谱半径小于 1, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P} + \mathbf{Q}_n)(\mathbf{P} + \mathbf{Q}_{n-1}) \cdots (\mathbf{P} + \mathbf{Q}_0)(\mathbf{u})(t) = 0$  对于  $t$  一致成立.

**定理 1** 满足假设条件 1~假设 4 的非线性时变系统 (1), 在学习律 (2) 的作用下, 如果满足

$$\rho(\mathbf{I} - \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t)) < 1, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

则系统 (1) 在存在初态偏移时, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{y}_k(t)$  一致收敛于  $\mathbf{y}_d(t)$ .

**注 2** 系统输入和初态分别采用式 (2) 所示的可变学习增益迭代学习控制律时, 式 (3) 给出的收敛条件实际上反映的是一个收敛范围, 取迭代学习控制律中学习增益系数满足式 (3) 的范围, 并结合具体被控对象的各个参数, 可以计算出各控制增益系数, 计算过程参见文献 [1].

**证明** 由式 (1) 和 (2) 可知

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) = \\ \mathbf{x}_{k+1}(0) + \int_0^t (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}(\tau)) + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}_{k+1}(\tau)) d\tau = \\ \mathbf{x}_k(t) + \int_0^t (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_k(\tau))) d\tau + \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{e}_k(t) - \int_0^t \frac{d(\mathbf{B}(\tau)\mathbf{H}(\tau))}{d\tau} \mathbf{e}_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

由式 (4) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t) = \\ \int_0^t (\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_{k+1}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}_k(\tau))) d\tau + \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{e}_k(t) - \int_0^t \frac{d(\mathbf{B}(\tau)\mathbf{H}(\tau))}{d\tau} \mathbf{e}_k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

两端取范数可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq \\ k_f \int_0^t \|\mathbf{x}_{k+1}(\tau) - \mathbf{x}_k(\tau)\| d\tau + \\ a \|\mathbf{e}_k(t)\| + b_1 \int_0^t \|\mathbf{e}_k(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

由引理 1, 式 (5) 变为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq \\ a \|\mathbf{e}_k(t)\| + b_1 \int_0^t \|\mathbf{e}_k(\tau)\| d\tau + \\ k_f \int_0^t \left( a \|\mathbf{e}_k(\tau)\| + b_1 \int_0^\tau \|\mathbf{e}_k(s)\| ds \right) e^{k_f(t-\tau)} d\tau \leq \\ a \|\mathbf{e}_k(t)\| + M \int_0^t \|\mathbf{e}_k(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$M = b_1 + k_f a e^{k_f T} + T k_f b_1 e^{k_f T},$$

$$b = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{B}(t)\|, \quad h = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t)\|, \quad a = bh,$$

$$b_1 = \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d(\mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t))}{dt} \right\|.$$

又因为  $e_{k+1}(t) - e_k(t) = C(t)(x_k(t) - x_{k+1}(t))$ , 有

$$e_{k+1}(t) = (I - C(t)B(t)H(t))e_k(t) + C(t) \left[ \int_0^t \frac{d(B(\tau)H(\tau))}{d\tau} e_k(\tau) d\tau - \int_0^t (f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))) d\tau \right]. \quad (7)$$

定义算子  $P: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$  为

$$Pe_k(t) = (I - C(t)B(t)H(t))e_k(t), \quad (8)$$

定义算子  $Q_k: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$  为

$$Q_k(e_k)(t) = C(t) \int_0^t \frac{d(B(\tau)H(\tau))}{d\tau} e_k(\tau) d\tau - C(t) \int_0^t (f(\tau, x_{k+1}(\tau)) - f(\tau, x_k(\tau))) d\tau, \quad (9)$$

则式(7)变为

$$e_{k+1}(t) = Pe_k(t) + Q_k(e_k)(t) = (P + Q_k)(P + Q_{k-1}) \cdots (P + Q_0)(e_0)(t). \quad (10)$$

下面对算子  $Q_k$  进行估计, 式(9)两端取范数, 并将式(6)代入, 有

$$\begin{aligned} \|Q_k(e_k)(t)\| &\leq cb_1 \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau + ck_f \int_0^t \|x_{k+1}(\tau) - x_k(\tau)\| d\tau \leq \\ &cb_1 \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau + ck_f a \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau + \\ &ck_f M \int_0^t \int_0^\tau \|e_k(s)\| ds d\tau \leq \\ &cb_1 \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau + N \int_0^t e_k(\tau) d\tau = \\ &(cb_1 + N) \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau \leq M \int_0^t \|e_k(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$N = ck_f a + ck_f MT, \quad c = \sup_{t \in [0, T]} \|C(t)\|,$$

$$M = \max(1, cb_1 + N).$$

$Q_k$  满足引理2的条件. 由式(10), (11)和引理2可知, 若  $P$  的谱半径小于1, 则  $\forall t \in [0, T]$ , 得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1}(t)\| = 0,$$

即当  $k \rightarrow \infty, t \in [0, T]$  时,  $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ .  $\square$

### 4 仿真研究

为了验证算法的有效性, 考虑如下非线性时变系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \cos(x_1(t)x_3(t)) + u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -x_2(t) - x_3(t) + \sin(x_1(t))u_2(t), \\ y_1(t) &= x_1(t), \quad y_2(t) = x_2(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $t \in [0, 1]$ . 设期望轨迹为

$$y_{d1}(t) = 12t^2(1-t), \quad y_{d2}(t) = \cos(\pi t).$$

系统初始状态为

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = -1.$$

采用式(2)迭代学习律, 并选取初始控制  $u_1(t) = u_2(t) = 0$ . 根据注2可以计算出学习控制律中的各学习增益系数, 此处限于篇幅, 仅将计算结果表示如下:

$$\begin{aligned} k_{p1} &= 0.2, \quad k_{d1} = 0.01, \quad k_{i1} = 0.7, \\ k_{p2} &= 0.001, \quad k_{d2} = 0.01, \quad k_{i2} = 0.6. \end{aligned}$$

选取传统的迭代学习控制律为

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + D(t)\dot{e}_k(t), \\ x_{k+1}(0) &= x_k(0) + B(0)D(0)e_k(0). \end{aligned}$$

为了避免传统学习律中学习增益选取的盲目性, 迭代学习增益矩阵选取为时变增益

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0.8t & 0 \\ 0 & 0.8t \end{bmatrix}.$$

也可以利用优化指标来设计最优的学习增益, 但由于这类算法需要已知系统的模型信息, 失去了迭代学习控制的优越性. 仿真结果如图1~图4所示. 从图1和图2中可以看出, 采用本文提出的学习算法, 跟踪误差只需迭代5次即可收敛到零; 采用传统的迭代学习算法, 至少要迭代20次误差才能收敛到零附近. 同时从图3可以看出, 采用不带初态学习的迭代学习控制算法时, 由于系统存在初态偏移, 系统输出曲线与期望轨迹之间存在恒定偏差. 从图4可以看出, 采用本文提出的带有初态学习的迭代学习算法时, 虽然系统存在初态偏移, 但由于对系统初态进行了迭代学习, 系统在存在初态偏移条件下, 其输出都能够在有限时间区间上完全跟踪期望轨迹. 因此, 本文所提算法解决了可变增益迭代学习控制的初态偏移问题.

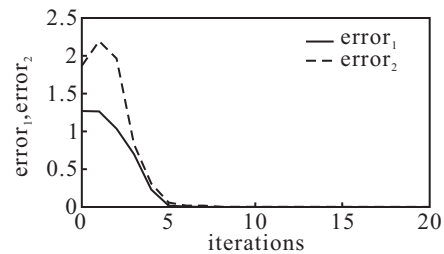


图1 可变增益迭代学习控制的跟踪误差曲线

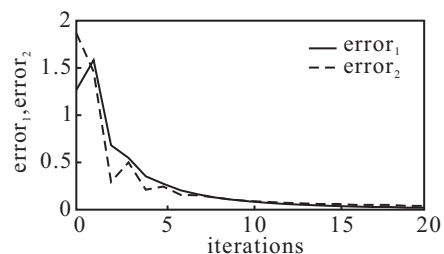


图2 传统迭代学习控制的跟踪误差曲线

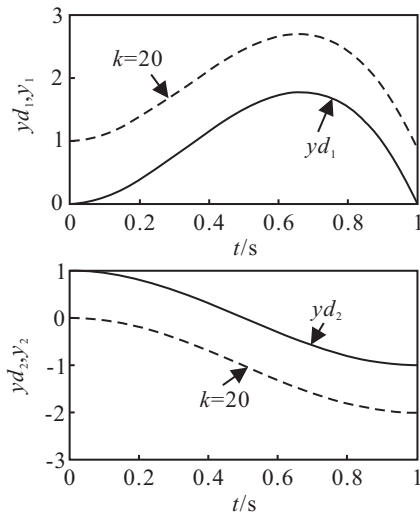


图3 不带动态学习的迭代输出轨迹

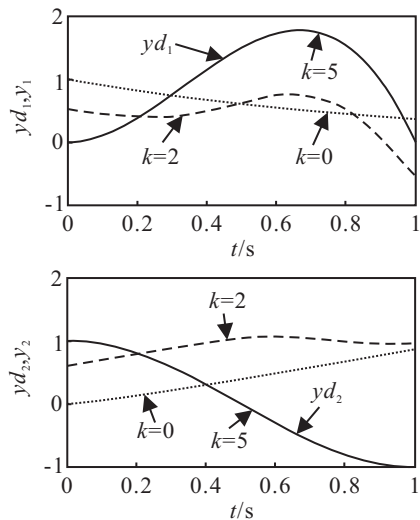


图4 可变增益的迭代输出轨迹

## 5 结论

针对一类非线性时变系统,提出了系统的输入和初始状态同时进行学习的可变增益迭代学习控制策略,得到了谱半径形式的收敛条件,并利用算子理论证明了在满足该收敛条件下,系统在存在初态偏移时经过迭代学习后其输出能够完全跟踪期望轨迹.本文提出的学习算法与传统的迭代学习控制相比较,前者的收敛速度得到较大的提高,而且解决了可变学习增益迭代学习控制的初态偏移问题.仿真结果验证了该算法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] 林辉, 王林. 迭代学习控制理论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 17-88.  
(Lin H, Wang L. Iterative learning control theory[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998: 17-88.)

- [2] 孙明轩, 黄宝健, 张学智. 任意初态下不确定时滞系统的PD型迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(6): 853-858.  
(Sun M X, Huang B J, Zhang X Z. PD-type iterative learning control for a class of uncertain time-delay systems with biased initial state[J]. Control Theory & Applications, 1998, 15(6): 853-858.)
- [3] Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error[J]. Int J of Control, 1996, 64(3): 345-359.
- [4] Park K H, Bien Z H, Wang D H. A study on the robustness of a PID-type iterative learning controller against initial state error[J]. Int J of Systems Science, 1999, 30(1): 49-59.
- [5] 孙明轩. 初态学习下的迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(8): 848-852.  
(Sun M X. Iterative learning control with initial state learning[J]. Control and Decision, 2007, 22(8): 848-852.)
- [6] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 具有  $n$  个传动器的  $n$  个关节机器人系统的学习控制方法[J]. 自动化学报, 2002, 28(2): 176-182.  
(Xie S L, Tian S P, Xie Z D. Learning control scheme for  $n$  joint robotic systems with  $n$  actuators[J]. Acta Automatica Sinica, 2002, 28(2): 176-182.)
- [7] 任雪梅, 高为炳. 任意初始状态下的学习控制[J]. 自动化学报, 1994, 20(1): 74-79.  
(Ren X M, Gao W B. Learning control with an arbitrary initial state[J]. Acta Automatica Sinica, 1994, 20(1): 74-79.)
- [8] 谢华英, 孙明轩. 有限时间死区修正迭代学习控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(11): 1225-1231.  
(Xie H Y, Sun M X. Design of iterative learning controllers with finite-time dead-zone modification[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(11): 1225-1231.)
- [9] 孙明轩. 有限时间迭代学习控制[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(6): 733-741.  
(Sun M X. Finite-time iterative learning control[J]. J of Systems Science and Mathematical Sciences, 2010, 30(6): 733-741.)
- [10] 李世平, 孙明轩, 朱胜. 初态学习下非仿射非线性系统的迭代学习控制[J]. 浙江工业大学学报, 2010, 38(3): 268-272.  
(Li S P, Sun M X, Zhu S. Iterative learning control with initial state learning for non-affine nonlinear systems[J]. J of Zhejiang University of Technology, 2010, 38(3): 268-272.)

(下转第480页)