

文章编号: 1001-0920(2012)01-0139-04

一种修正的 Dubois-Prade 证据推理组合规则

权文, 王晓丹, 周进登, 郑春颖

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘要: 基于对 Dubois-Prade 证据推理理论的分析与研究, 针对 Dubois-Prade 组合规则的不足, 归纳出 3 类导致 Dubois-Prade 组合规则失效的情况; 在 Dubois-Prade 组合规则的基础上, 引入了修正因子, 给出一种修正的 Dubois-Prade 组合规则——MDP 组合规则. 实例表明, MDP 组合规则在处理高冲突、“一票否决”和动态信息融合方面都是有效的.

关键词: D-S 理论; 证据推理; 组合规则; 动态信息融合

中图分类号: TP212.9

文献标识码: A

A modified Dubois-Prade combination rule of evidence theory

QUAN Wen, WANG Xiao-dan, ZHOU Jin-deng, ZHENG Chun-ying

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China. Correspondent: QUAN Wen, E-mail: 937182228@qq.com)

Abstract: Based on the analysis and study of Dubois-Prade(DP) evidence theory, for the defects of the combination rule of DP, three kinds of reasons are concluded, which lead to the invalid of evidence. Based on the combination rule of DP, modified factor is introduced, and a modified Dubois-Prade combination rule(MDP) of evidence theory is proposed. Numerical examples show that the MDP combination rule works effectively in dealing with consistent evidence, high conflicting evidence and dynamic information fusion.

Key words: D-S theory; evidence theory; combination rules; dynamic information fusion

1 引言

证据理论又称 Dempster-Shafer 理论 (DST), 是由 Dempster^[1]于 1967 年研究多值映射问题时提出的. Dempster 将证据的信任函数与概率的上下值相联系, 构造出一个不确定性推理模型的一般框架; 之后由 Shafer^[2]加以扩充和发展, 形成了最终的 Dempster-Shafer 理论. 作为一种不确定推理方法, DST 具有坚实的理论基础, 适合于无先验信息的融合, 具有利用证据积累以缩小假设集合的特殊能力, 在区分不确定与不知道以及精确反映证据收集过程等方面显示了极大的灵活性, 目前已广泛应用于目标识别、智能决策、故障诊断和军事指挥等诸多领域.

在实际应用中, DST 在处理高冲突问题时, 常常得出有悖常理的结论, 其根本原因在于 DST 组合规则适用于高置信度、低冲突度命题, 却无法有效处理信任度趋近于 0 的情况. 对此, 国内外学者对其加以改进, 提出了许多解决方法^[3-15]. 其中 Dubois 和 Prade^[3]提出了一种针对高冲突信息融合的证据组合规则——

DP 组合规则. 该组合规则合理地进行了冲突分配, 较好地平衡了精度和可信度之间的取舍. 然而在组合过程中, 一旦辨识框架中某一元素被证明为空集时, DP 组合规则便显得无能为力. 为解决这一问题, 本文提出了一种修正的 DP 组合规则——MDP 组合规则. 数值算例表明了该组合规则的有效性.

2 D-S 基本理论

D-S 基本理论在相关文献中均有详述, 本文不再赘述. 这里只给出 Dempster 组合规则.

定义 1 设 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$ 是 2^Θ 上的两个相互独立的基本信任分配 (BBA), 定义组合后的 BBA: $m(\cdot) = [m_1 \oplus m_2](\cdot)$ 为

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0; \\ m(A) = \frac{\sum_{X, Y \subset 2^\Theta, X \cap Y = A} m_1(X)m_2(Y)}{1 - \sum_{X, Y \subset 2^\Theta, X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y)}, \\ \forall (A \neq \emptyset) \in 2^\Theta. \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2010-09-06; 修回日期: 2010-11-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60975026).

作者简介: 权文(1983—), 女, 博士生, 从事智能信息处理、机器学习的研究; 王晓丹(1966—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能信息处理、机器学习等研究.

其中: $\sum_{x,y \in 2^\theta, x \cap y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y)$ 为两证据间的冲突度, 记为 k_{12} . 若 $k_{12} \neq 1$, 则确定一个基本概率分配函数; 若 $k_{12} = 1$, 则认为 m_1 与 m_2 矛盾, 不能对 BBA 进行组合.

式(1)所给出的组合规则满足结合律和交换律, 适用于多个证据的组合.

3 Dubois-Prade 的组合规则

假设两个证据源是可靠、不冲突的, 获取的数据集为 X 和 Y . 当发生冲突时, 认为其中一个证据源正常, 另一个发生故障. 因此有:

若 $X \cap Y \neq \emptyset$, 则真值在 $X \cap Y$ 中;

若 $X \cap Y = \emptyset$, 则真值在 $X \cup Y$ 中.

依据这个准则, Dubois 和 Prade^[3]给出了一种新的组合规则, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{DP}(\emptyset) = 0; \\ m_{DP}(A) = \sum_{\substack{X,Y \in 2^\theta \\ X \cap Y = A \\ X \cap Y \neq \emptyset}} m_1(X)m_2(Y) + \\ \sum_{\substack{X,Y \in 2^\theta \\ X \cup Y = A \\ X \cap Y = \emptyset}} m_1(X)m_2(Y), \end{array} \right. \quad (2)$$

$\forall (A \neq \emptyset) \in 2^\theta.$

DP 组合规则将冲突的概率分配给冲突焦元的并集, 当焦元一致时采用合取算子, 当焦元冲突时采用析取算子. DP 组合规则比 Yager^[4]方法更为合理地将冲突重新分配, 较好地平衡了精度与可信度之间的取舍. 然而在实际应用中, 利用 DP 组合规则进行信息融合会遇到很多问题, 诸如丢失元素的基本概率赋值、不能进行动态信息融合^[16]等, 下面举例说明.

例 1 设 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别代表 3 个嫌疑犯, 辨识框架 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, 有两组独立的证据 m_1 和 m_2 , 基本置信分配如表 1 所示.

表 1 例 1 的基本置信分配

	θ_1	θ_2	θ_3	$\theta_1 \cup \theta_2$
$m_1(\cdot)$	0.1	0.4	0.2	0.3
$m_2(\cdot)$	0.5	0.1	0.3	0.1

假设根据新获取的信息可以证明 θ_3 不在犯罪现场, 即 $\theta_3 = \emptyset$. 由此可得 $k_{12} = 0.06 + 0.21 + 0.13 + 0.14 + 0.11 = 0.65$. 利用 Yager 组合规则和 DP 组合规则得到的组合结果分别为:

Yager 组合规则

$$m_Y(\emptyset) = 0, m_Y(\theta_1) = 0.21, m_Y(\theta_2) = 0.11,$$

$$m_Y(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.03 + k_{12} = 0.68;$$

DP 组合规则

$$m_{DP}(\emptyset) = 0,$$

$$m_{DP}(\theta_1) =$$

$$[m_1(\theta_1)m_2(\theta_1) + m_1(\theta_1)m_2(\theta_1 \cup \theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_1 \cup \theta_2)] + [m_1(\theta_1)m_2(\theta_3) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_3)] = 0.34,$$

$$m_{DP}(\theta_2) = 0.25,$$

$$m_{DP}(\theta_1 \cup \theta_2) =$$

$$[m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_1 \cup \theta_2)] +$$

$$[m_1(\theta_1 \cup \theta_2)m_2(\theta_3) + m_2(\theta_1 \cup \theta_2)m_1(\theta_3)] +$$

$$[m_1(\theta_1)m_2(\theta_2) + m_2(\theta_1)m_1(\theta_2)] = 0.35.$$

组合后的 mass 值加起来分别为

$$\text{Sum}_Y(\text{mass}) = 1, \text{Sum}_{DP}(\text{mass}) = 0.94 < 1.$$

显然, DP 组合规则不适用于处理上述问题.

例 2 设辨识框架 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, 有两组证据 m_1 和 m_2 , 焦元分别是 θ_1 和 θ_2 , 基本置信分配如表 2 所示.

表 2 例 2 的基本置信分配

	\emptyset	θ_1	θ_2	$\theta_1 \cup \theta_2$
$m_1(\cdot)$	0.1	0.5	0.4	0
$m_2(\cdot)$	0.3	0.6	0.1	0

假设所有的交集都为空, 可得 $k_{12} = 0.03 + 0.07 + 0.2 + 0.36 = 0.66$. 利用 Yager 组合规则和 DP 组合规则得到的组合结果分别为:

Yager 组合规则

$$m_Y(\emptyset) = 0, m_Y(\theta_1) = 0.3, m_Y(\theta_2) = 0.04,$$

$$m_Y(\theta_1 \cup \theta_2) = k_{12} = 0.66;$$

DP 组合规则

$$m_{DP}(\emptyset) = 0, m_{DP}(\theta_1) = 0.51,$$

$$m_{DP}(\theta_2) = 0.17, m_{DP}(\theta_1 \cup \theta_2) = 0.29.$$

组合后的 mass 值加起来分别为

$$\text{Sum}_Y(\text{mass}) = 1, \text{Sum}_{DP}(\text{mass}) = 0.97 < 1.$$

显然, DP 组合规则不适用于处理上述问题.

4 修正的 DP 组合规则

通过对上述及更多实例的深入分析, 可以总结出 DP 组合规则不能处理的信息融合问题有以下几类:

设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, 有两组证据 $m_1(\cdot)$ 和 $m_2(\cdot)$, 对于 $\forall \theta_i, \theta_j \in \Theta (i \neq j)$, 有

$$1) \theta_i \in \emptyset, \text{ 且 } m_1(\theta_i) \neq 0, m_2(\theta_i) \neq 0;$$

$$2) \theta_i \cup \theta_j \in \emptyset, \text{ 且 } m_1(\theta_i \cup \theta_j) \neq 0, m_2(\theta_i \cup \theta_j) \neq 0;$$

$$3) \theta_i \cap \theta_j \in \emptyset, \text{ 且 } m_1(\theta_i \cap \theta_j) \neq 0, m_2(\theta_i \cap \theta_j) \neq 0.$$

分析其原因可知, 在利用 DP 组合规则处理以上几类问题时, 由于 DP 组合规则本身的缺陷, 在组合过程中丢失了元素为空集而其基本置信分配不为零的 mass 值. 正确的处理方法是将其 mass 值重新分配. 由此可见, DP 组合规则仅适用于辨识框架是静态的信息融合问题(静态信息融合问题), 这在很大程度上限制了 DP 组合规则的推广与应用.

为了解决上述问题, 本文在式(2)的基础上引入修正因子 $\sigma(A)$ (将元素为空集而其基本置信分配不为零的 mass 值重新分配), 从而给出一种修正的 DP 组合规则(下标记为 MDP, 简称 MDP 组合规则), 即

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\text{MDP}}(\emptyset) = 0; \\ m_{\text{MDP}}(A) = \sum_{\substack{X, Y \in 2^\Theta \\ X \cap Y = A \\ X \cap Y \neq \emptyset}} m_1(X)m_2(Y) + \\ \sum_{\substack{X, Y \in 2^\Theta \\ X \cup Y = A \\ X \cap Y = \emptyset}} m_1(X)m_2(Y) + \sigma(A), \\ \forall (A \neq \emptyset) \in 2^\Theta. \end{array} \right. \quad (3)$$

其中, 定义 $\sigma(A)$ 为修正因子, 其表达如下:

$$\sigma(A) = \sum_{\substack{X, Y \in \emptyset \\ A = \emptyset}} m_1(X)m_2(Y). \quad (4)$$

$\sigma(A)$ 修正因子的数学意义是, 当辨识框架中的某个元素被证明为空时, 则将其相关的 mass 值(如例 1 中的 $m_1(\theta_3)m_2(\theta_3)$, 例 2 中的 $m_1(\emptyset)m_2(\emptyset)$) 分配给元素 $A (A = \emptyset)$. 物理含义以例 1 为例, 当嫌疑犯 θ_3 被确认不在现场后 ($\theta_3 = \emptyset$), 应与 θ_3 相关的 mass 值分配给 $\theta_1 \cup \theta_2$, 这样最为合理.

5 数值算例

这里利用 MDP 组合规则对上述例 1 和例 2 重新计算, 所得结果见表 3 和表 4. 此外通过例 3 来验证 MDP 组合规则处理高冲突、“一票否决”及动态信息融合问题的有效性.

表 3 3 种组合规则对例 1 的组合结果

组合规则	$m(\emptyset)$	$m(\theta_1)$	$m(\theta_2)$	$m(\theta_1 \cup \theta_2)$
Yager	0	0.21	0.11	0.68
DP	0	0.34	0.25	0.35
MDP	0	0.34	0.25	0.41

表 4 3 种组合规则对例 2 的组合结果

组合规则	$m(\emptyset)$	$m(\theta_1)$	$m(\theta_2)$	$m(\theta_1 \cup \theta_2)$
Yager	0	0.3	0.04	0.66
DP	0	0.51	0.17	0.29
MDP	0	0.51	0.17	0.32

例 3 假设辨识框架为 A (战斗机), B (民航机), C (轰炸机), 系统的传感器收集了 3 个证据, 分别为

$$\begin{aligned} m_1(A) &= 0.98, m_1(B) = 0.01, m_1(C) = 0.01; \\ m_2(A) &= 0.00, m_2(B) = 0.01, m_2(C) = 0.99; \\ m_3(A) &= 0.90, m_3(B) = 0.00, m_3(C) = 0.10. \end{aligned}$$

利用 D-S 组合规则, Smets 组合规则^[5], Yager 组合规则和 MDP 组合规则得到的组合结果见表 5.

从表 3 和表 4 列出的 3 种组合规则对例 1 和例 2 的组合结果可以看出, MDP 在处理一般冲突数据时, 其性能优于前两种方法. 相比较而言, Yager 方法将全部冲突分配给了全集 Θ , 虽然相比原始 D-S 组合规则更加合理, 但该方法总体过于保守. DP 组合规则如前分析, 在处理动态信息融合时, 组合结果所得系统的新证据总的基本概率赋值之和不为 1, 不满足组合要求. 而 MDP 很好地克服了 Yager 和 DP 的缺点.

从表 5 列出的 4 种组合规则对例 3 的组合结果可以看出, Dempster 组合规则不能对有冲突的证据进行有效组合; Smets 组合规则将冲突全部分给了空集 \emptyset ; Yager 组合规则将冲突分给了全集 Θ . 从 $m(A)$ 一列可看出, 当系统中有一证据给 $m(A)$ 赋值为零时(如本

表 5 4 种组合规则对例 3 的组合结果

组合规则	证据	$m(\emptyset)$	$m(A)$	$m(B)$	$m(C)$	$m(A \cup B)$	$m(A \cup C)$	$m(B \cup C)$	$m(A \cup B \cup C)$
D-S	m_1, m_2	0	0	0.01	0.99	0	0	0	0
	m_1, m_2, m_3	0	0	0	1	0	0	0	0
Smets	m_1, m_2	0.99	0	0.0001	0.0099	0	0	0	0
	m_1, m_2, m_3	0.999	0	0	0.001	0	0	0	0
Yager	m_1, m_2	0	0	0.0001	0.0099	0	0	0	0.99
	m_1, m_2, m_3	0	0	0	0.001	0	0	0	0.999
MDP	m_1, m_2	0	0	0.0001	0.0099	0.0098	0.9702	0.01	0
	m_1, m_2, m_3	0	0.882	0	0.0990	0.00009	0.0089	0.00001	0.0100

例中的证据 m_2), 无论其余证据怎样支持 A , 系统中 $m(A)$ 始终为零(即“一票否决”). MDP 组合规则不仅能够克服“一票否决”的缺陷, 而且能够有效处理动态信息融合问题(表 5 中 MDP 组合规则将证据 m_3 作为新加入的证据, 与 $m_1 \oplus m_2$ 的结果进行融合), 同时 MDP 组合规则在处理高冲突问题时, 比 Smets 组合规则和 Yager 组合规则更合理地进行了冲突分配, 较好地平衡了精度和可信度之间的取舍.

6 结 论

由于 DP 组合规则本身的缺陷, 导致其不能处理动态信息融合问题. 本文在分析 DP 组合规则中存在问题的基础上, 归纳出 3 类导致 DP 组合规则失效的情况, 并给出了一种修正的 DP 组合规则(MDP 组合规则). 数值算例表明, MDP 组合规则是有效的, 它不但继承了 DP 组合规则在处理“一票否决”、高冲突方面的优势, 而且能有效地处理 DP 组合规则所不能处理的动态信息融合问题, 具有一定的学术意义和应用价值.

参考文献(References)

- [1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping[J]. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(2): 325-339.
- [2] Shafer G. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [3] Dubois D, Prade H. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures[J]. *Computational Intelligence*, 1998, 4(3): 244-264.
- [4] Yager R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules[J]. *Information Sciences*, 1987, 41(2): 93-138.
- [5] Smets P. The combination of evidence in the transferable belief model[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(5): 447-458.
- [6] Murphy C K. Combining belief functions when evidence conflicts[J]. *Decision Support Systems*, 2000, 29(1): 1-9.
- [7] 孙全, 叶秀清, 顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式[J]. *电子学报*, 2000, 28(8): 117-119.
(Sun Q, Ye X Q, Gu W K. A new combination rules of evidence theory[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(8): 117-119.)
- [8] 张山鹰, 潘泉, 张洪才. 一种新的证据推理组合规则[J]. *控制与决策*, 2000, 15(5): 540-544.
(Zhang S Y, Pan Q, Zhang H C. A new kind of combination rule of evidence theory[J]. *Control and Decision*, 2000, 15(5): 540-544.)
- [9] 邢清华, 雷英杰, 刘付显. 一种按比例分配冲突度的证据推理组合规则[J]. *控制与决策*, 2004, 19(12): 1387-1390.
(Xing Q H, Lei Y J, Liu F X. One combination rule of evidence theory based on distributing conflict in proportion[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(12): 1387-1390.)
- [10] 何兵, 郝爱民, 赵沁平. 一种基于不确定信息的决策方法[J]. *计算机学报*, 2004, 27(2): 281-285.
(He B, Hao A M, Zhao Q P. A decision making method based on uncertainty information[J]. *Chinese J of Computer*, 2004, 27(2): 281-285.)
- [11] 林志贵, 徐立中, 严锡君, 等. 基于距离测度的 D-S 证据融合决策方法[J]. *计算机研究与发展*, 2006, 43(1): 169-175.
(Lin Z G, Xu L Z, Yan X J, et al. A decision-making method on D-S evidence fusion information based on distance measure[J]. *J of Computer Research and Development*, 2006, 43(1): 169-175.)
- [12] 邓勇, 施文康, 朱振福. 一种有效处理冲突证据的组合方法[J]. *红外与毫米波学报*, 2005, 23(1): 27-32.
(Deng Y, Shi W K, Zhu Z F. Efficient combination approach of conflict evidence[J]. *J of Infrared and Millimeter Waves*, 2005, 23(1): 27-32.)
- [13] 高社生, 倪龙强, 杨凯. 一种新的基于局部冲突分配的证据合成规则[J]. *西北工业大学学报*, 2009, 27(1): 43-46.
(Gao S S, Ni L Q, Yang K. A new and better rule for combining sharply conflicting evidences[J]. *J of Northwestern Polytechnical University*, 2009, 27(1): 43-46.)
- [14] 郭建全, 赵伟, 黄松岭. 一种改进的 D-S 证据合成规则[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(3): 606-610.
(Guo J Q, Zhao W, Huang S L. Modified combination rule of D-S evidence theory[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(3): 606-610.)
- [15] 关欣, 衣晓, 孙晓明, 等. 有效处理冲突证据的融合方法[J]. *清华大学学报: 自然科学版*, 2009, 49(1): 138-141.
(Guan X, Yi X, Sun X M, et al. Efficient fusion approach for conflicting evidence[J]. *Tsinghua University: Science & Technology*, 2009, 49(1): 138-141.)
- [16] Smets P. Analyzing the combination of conflicting belief functions[J]. *Information Fusion*, 2007, 8(14): 387-412.